研究集会「数学と現象：Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2012」

日時：平成24年11月16日（金）～11月17日（土）
場所：宮崎大学工学部 B棟2階B210教室
案内：http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/

アブストラクト

研究集会 「数学と現象： Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2012 (略称：MPM2012)」

日時： 2012 年 11 月 16 日（金）〜 11 月 17 日（土）
会場： 宮崎大学工学部 B 棟 2 階 B210 教室
案内： http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/

プログラム

11 月 16 日（金）

午後の部

14:00-14:55 **中岡 慎治**（理化学研究所）
「免疫応答ダイナミクスの数理研究 – 皮膚炎の統合的理解に向けて –」

15:15-16:10 **眞崎 聡**（広島大学）
「非線形シュレディンガー方程式の最小非散乱解について」

16:30-17:25 **郷田 直輝**（国立天文台）
「自己重力多体系の非線形現象と力学構造」

11 月 17 日（土）

午前の部 ≪ **MPM2012 特別実験講座** ≫

10:15-12:15 **末松 J. 信彦**（明治大学）
「微生物の集団が形成する秩序パターン 〜 生物対流の実験と数理 〜」

注 宮交バス「橘通り 3 丁目→宮崎大学（木花キャンパス）」の土曜日の朝の時刻表：

8:21 → 8:54，8:41 → 9:18，9:11 → 9:52，9:21 → 9:54，9:41 → 10:18（遅刻！）

午後の部

14:00-14:55　**柴田 達夫**（理化学研究所）

「走化性細胞における１細胞の自己組織化を
実験、統計解析、理論モデル化から解明する」

15:15-16:10　**岩渕 司**（中央大学）

「Ill-posedness for the nonlinear Schrödinger equations
in one and two space dimensions」

16:30-17:25　**瀬野 裕美**（東北大学）

「生物個体群サイズ制御のパラドックス：数理モデルからの示唆」

本研究集会は，科学研究費補助金

課題番号	研究種目	研究代表者	課題名
24540216	基盤 C	飯田雅人	反応拡散系の漸近解構築への理論的アプローチ
20540181	基盤 C	北　直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
22540231	基盤 C	大塚浩史	平衡点渦系の平均場と点渦系の関連の探求
23740099	若手 B	梅原守道	連続体近似による天文現象のモデル化と数学解析
23840041	研ス支援	今　隆助	Lotka-Volterra 方程式を用いた構造化生態系モデルの数理的研究

および平成 24 年度宮崎大学工学部長裁量経費

申請代表者	プロジェクト名
辻川　亨	「実験科学と理論の融合を目指した」偏微分方程式と現象に関する研究集会

の援助を受けています.

世話人：　辻川 亨，飯田 雅人，北 直泰，大塚 浩史，梅原 守道，今 隆助（宮崎大学）

連絡先：　辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1　宮崎大学工学部工学基礎教育センター

E-mail：tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381／0985-58-7288（事務室）& FAX：0985-58-7289

作成日：2012.11.07

免疫応答ダイナミクスの数理研究 -- 皮膚炎の統合的理解に向けて --

＊中岡慎治[a1] ＊S. Nakaoka[a]

[a] 理研・免疫センター・免疫数理モデリング（YCI ラボ）

表皮は生体防御機能の第一バリアーとして外界からの物質やウィルス、バクテリアの侵入を阻止する働きを担う。たとえば、表皮細胞は異物の侵入に応じて炎症促進性のサイトカインを放出するが、サイトカインの種類に応じて誘導される免疫細胞の種類が変わり、結果的にアトピー性皮膚炎や尋常性乾癬といった多様な皮膚障害性の疾患につながる。過剰な免疫応答によりどのようにして皮膚疾患が誘発・維持されるのか、もしくは組織レベルで慢性炎症が持続するメカニズムは多くが不明のままである。

複雑な皮膚炎の発生機序や適切な治療方法の理解に向けて、定量的計測データを基盤とした数理手法を開発・応用していくことを大きな目標として研究を進めている。多様な分子細胞相互作用を把握するため、第一目標として炎症に関わる皮膚表皮細胞・免疫細胞に関するトランスクリプトーム解析、バイオインフォマティクスを活用した情報基盤の開発・整備を進めている。

一方、表皮のバリアー障害がどのようにして免疫系を活性化し、慢性化した炎症状態の持続につながるかは明らかにされていない。数理モデル構築とシミュレーション研究により、皮膚障害性疾患のダイナミクスを理解するための数理研究も同時に必要である。手始めとして、表皮の基底層に存在する幹細胞の増殖・分化のダイナミクスを記述した決定論的・確率的数理モデルを構築し始めている。表皮細胞集団ダイナミクスを記述した確率過程のシミュレーションを実施し、細胞増殖や角層の剥離が表皮の恒常性(ここでは表皮層の安定的な維持)にどのように影響するのかを調べる研究に取り組み始めた段階である。同時に、表皮細胞間の炎症性物質を介したコミュニケーションによって、局所的な炎症反応が組織レベルまで伝播して維持される過程をシミュレーションすることで、表皮のおける皮膚炎発症初期段階に起こっている現象を追跡するための研究も進めている。

本研究集会では、免疫系および数理研究について紹介した後、上記の課題に関する筆者の最近の研究進捗状況を報告させていただく予定である。

非線形シュレディンガー方程式の
最小非散乱解について

眞崎 聡 (広島大学工学研究院)*

1. 序

本講演では, 非線型分散型方程式の一種である非線型シュレディンガー方程式について考察する. 特に, 全空間における初期値問題の解の振る舞いを考察する.

線型方程式では起こらない非線型特有の現象として, 定在波解や爆発解の存在などが知られている. 定在波解とは $e^{i\omega t}\varphi(x)$ $(\omega > t)$ という形の解のことを指し, 時間 t に対しては位相の変化しかしないような解である. また, 爆発とは大雑把に述べるとある時刻で一点に波が集中してしまうような状況である.

これらの非線型現象を理解するポイントの一つは "非線型性の強さ" である. 非線型性がない場合の線型の (自由) シュレディンガー方程式の解は分散性と呼ばれる性質を持っており, 波は無限遠方へ広がっていく. そこへ非線型性による相互作用がその分散を妨げる引力として働くことで, 上の様な非線型現象が発生する. 例えば, その引力が非常に強いために波が線型の分散効果を振り切って空間一点へと集中してしまう状態が, 爆発である. 一方, 引力が分散効果とうまく釣り合うと, 分散も集中もせずある特定の形状の波が長時間残る. これが定在波解である. また, 非線型性が弱い場合には線型の解と同様の振る舞いをする (より詳しく言うと, 時刻無限大である線型解に収束する) こともあり, この状態を散乱と呼んでいる. このように, 非線型方程式の解の振る舞いは非線型性の強さによって大きく変化する.

今回は, 初期値の集合を対応する解の振る舞いに応じて分類しようという問題を考察する. この問題は, 非線型シュレディンガー方程式などの非線型分散型方程式に関して, 近年盛んに研究されている. 非線型方程式の解の振る舞いが非線型性の強さで決まることを上で述べたが, では, その非線型性の強さはいったい何に左右されているかというと, それは大雑把には解の "大きさ" と "形状" である. したがって, このような解の振る舞いによる分類は, 結果的に初期値の大きさや形状に関する分類として実現されるはずである.

以下, より具体的に話を進める. 今回, 考察するのは以下の方程式である:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^{p-1}u, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \in X, \end{cases} \tag{NLS}$$

但し, u は $\mathbb{C}$ 値未知関数, $p > 1$ である. X は初期値の空間で, この X を解の振る舞いによって分類したい.

方程式 (NLS) に関してはエネルギー臨界 $p = 1 + \frac{4}{N-2}$ のときに $X = \dot{H}^1$ の分類がなされた (Kenig-Merle [1], Killip-Visan). その後, エネルギー劣臨界 $1 + \frac{4}{N} < p < 1 + \frac{4}{N-2}$ にも拡張され $X = H^1$ に対する同様の分類がなされた (Holmer-Roudenko, Akahori-Nawa, Fang-Xie-Cazenave). 但し, これらの分類は X 全体ではなく, 基底状態 (以下で紹介) より小さいエネルギーをもつものに制限した, X の部分集合に対する分類である. 現在は,

* 〒 739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1
e-mail: masaki@amath.hirosima-u.ac.jp

基底状態と同じエネルギーをもつ部分 (Duyckaertz-Merle) や, 基底状態を少し超えた部分 (Nakanishi-Schlag) の分類も少しずつなされてきている.

方程式 (NLS) においては, L^2 臨界と呼ばれる $p = 1 + \frac{4}{N}$ を境に状況が大きく変化する事が知られている. 本講演での結果と比べるため, $p = 1 + \frac{4}{N}$ の場合の分類を紹介する. $X = L^2$ とする. 基底状態 Q は楕円型方程式 $-\Delta Q + Q = |Q|^{p-1}Q$ の正値球対称解とする. このとき, もし $u_0 \in L^2(= X)$ が $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ を満たすならば解 u は散乱する (Dodson). ここで, Q から出発した解 $e^{it}Q$ は散乱しないので, Q は非散乱初期値全体での L^2 ノルムの最小値を与えていることになる. この意味で, 基底状態解 $e^{it}Q$ は**最小非散乱解**と呼べる. まとめると, $X = L^2$ において, 0 を中心とする半径 $\|Q\|_{L^2}$ の球の内部は散乱する初期値の集合となっており, その球上には最小の非散乱初期値 Q がある, という状況である [1].

2. 主結果

今回の目標は $p < 1 + \frac{4}{N}$ において $X = \mathcal{F}H^1$ に対する同様の分類を与えることである. 以後, (NLS) の解 u が $t \to \pm\infty$ で散乱するとは $\lim_{t\to\pm\infty} e^{-it\Delta}u(t)$ が $\mathcal{F}H^1$ の位相で存在することとする. また,

$$S_{\pm} := \left\{ u_0 \in \mathcal{F}H^1 \;\middle|\; u_0 \text{を初期値とする (NLS) の解 } u \text{ が } t \to \pm\infty \text{ で散乱する} \right\}$$

とし, 散乱初期値集合 S を $S = S_+ \cap S_-$ と定める. 初期値の大きさを測るスケール不変量として次を定義:

$$\ell(u_0) := \|xu_0\|_{L^2}^{\frac{N}{2}-\frac{2}{p-1}} \|u_0\|_{L^2}^{\frac{2}{p-1}-\frac{N+2}{2}}.$$

今回の主結果は以下である. まず, 最小の非散乱初期値が存在について.

定理 1. $N \geqslant 1$ で

$$1 + \frac{2 - N + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N} < p < 1 + \frac{4}{N}$$

と仮定する. このとき, 次をみたす $u_{0,c} \in \mathcal{F}H^1$ が存在する.

1. $u_{0,c} \notin S_+$.
2. $\ell(u_{0,c}) = \inf\{\ell(u_0) \mid u_0 \in \mathcal{F}H^1 \setminus S\}$.

性質 2 は, もし $u_0 \in \mathcal{F}H^1$ が $\ell(u_0) < \ell(u_{0,c})$ を満たすならば $u_0 \in S$ となることを意味している. 先ほど紹介した $p = 1 + \frac{4}{N}$ の場合には, 基底状態 Q が定理 1 の二つの性質を満たすものであったが, 今回の $p < 1 + \frac{4}{N}$ の場合はそうでない:

定理 2. 定理 *1* の $u_{0,c}$ を初期値にもつ解は定在波解 $e^{i\omega t}\varphi(x)$ ではない.

参考文献

[1] Kenig, C. and Merle, F., *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.

[2] Masaki, S., *On minimal non-scattering solution for focusing mass-subcritical nonlinear Schrödinger equation*, in preparation.

[1] この場合には大きさのみによる分類となったが, これは一般的ではない. 実際に, $p > 1 + 4/N$ の時には大きさだけでなくその形状にも左右される.

自己重力多体系での非線形現象と力学構造

郷田　直輝（国立天文台 JASMINE 検討室）
E-mail: naoteru.gouda@nao.ac.jp

1．はじめに

宇宙には広大なスケールに渡って様々なタイプの天体が存在し，階層構造を形成していることが分かっている [1] (図 1)．これらの天体の形成過程や力学構造等を解明することが宇宙物理学の大きな課題の 1 つである．小さいスケールからみていくと，恒星と惑星，(恒星が約 1000 億程度集まった)銀河, その銀河の集団である銀河団, さらに銀河団が複数個連なった超銀河団が存在する．超銀河団と銀河がほとんど無いボイド（空洞）をあわせて泡のようにみえる構造は宇宙の大構造と呼ばれ，数億光年程度のサイズとなる．なお，星から宇宙の大構造に至るまで, 密度にして約 44 桁も広がりがある．では何故，密度がオーダーでかなり異なる構造ができるのであろうか. その理由を一言でいえば, 天体構造を形成する源が重力であり，そしてその重力が実際的に長距離力であるためである．短距離力では，その力の到達距離に見合った領域範囲で決まる密度しかもつことができないが，重力の場合は，質量を増やせばどこまでも力が及び大きなサイズの構造を作り，それに見合った様々な密度をとることができるのである．このように重力が宇宙の構造形成を解明する大きな鍵となる．

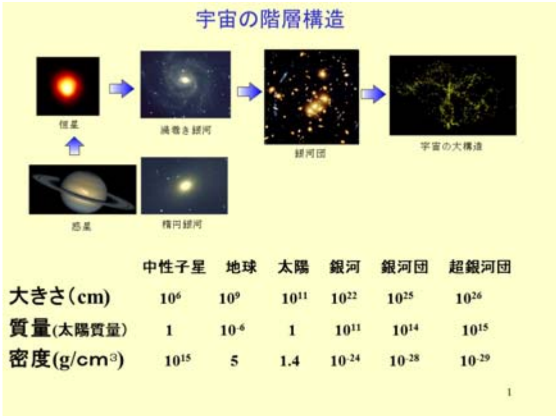

図 1:宇宙の階層構造．恒星と惑星のシステムからはじまり, 宇宙の大構造に至るまで広大なスケールにわたって, 様々なサイズの天体構造が宇宙には存在している.

さて，宇宙での構造形成問題をはじめ，宇宙物理学の様々な問題を解き明かすために, 既存の物理学を応用することが必要であり, それが今までも多くの天体現象の解明に役立ってきた．では，宇宙物理学は既存の物理学を単に応用するだけかといえばそうではない．逆に宇宙物理学での問題が新しい物理学を芽生えさせる可能性がある．地上の実験室系では見られない現象が宇宙では起こるからである．例えば，自己重力多体系での物理があげられる．自己重力多体系とは，その系を構成する各々の“粒子”(星などの天体)が，お互いの重力（万有引力）だけで運動しつつ，系が束縛されている場合の系である．自己重力多体系は，後述するように地上の実験室系では見られない興味深い緩和過程や力学構造をもたらす．特に本講演では，自己重力多体系の緩和過程，（準）平衡状態などの物理的特徴について，短距離力の系との違いを中心に発表する [2]．

２．自己重力多体系の力学構造

自己重力多体系の身近な例は，太陽系である．ニュートン力学では 2 体だけの場合の万有引力による運動は，解析的に解ける（ケプラー運動）．しかし，実際の太陽系は，惑星を複数個含み，厳密には 2 体ではなく，多体系である．3 体からなる系の運動の研究が行われたが，ほとんどの場合で非常に複雑な運動を描くことが分かってきた．まさにカオス研究につながるものである．ただ，太陽系の場合は，太陽の質量に比べて惑星の質量は非常に小さいので，惑星の運動は，太陽とその惑星の 2 体問題として解いた場合で良い近似となる．ただ，ラプラスやポアンカレの研究によると，その太陽系でさえ，厳密には非常に複雑な振る舞いをすることが分かってきた [3]．惑星の楕円軌道も実際には他の惑星からの重力を受けて微小ではあるが複雑に変化していく．また，非常に高い確率で太陽系は，壊れない，つまり力学的にほぼ安定であるが，壊れる可能性はゼロではない．厳密には完全に安定かどうか分からない，ということが分かってきた [3]．

以上のように太陽系でさえ，複雑な振る舞いをする．質量が等価な 3 体であれば，カオス軌道にもなり複雑な運動をする．では，星が約 1000 億個も集まった（さらに，ダークマターも存在する）銀河では，星は一体どのような軌道を描き，そして全体としてどのような力学状態になっているのだろうか？また，どのような緩和過程を経てそのような力学状態に至ったのであろうか？

３．銀河と力学構造

銀河の力学構造がどのようになっているのか，実は我々が住む天の川銀河でさえ，詳細にはまだ分かっていない．いくつかのモデルの提唱や N 体計算による数値シミュレーションの解析は多く行われているが，現実の力学構造はまだ知られていない．ただ，銀河は楕円銀河や渦巻き銀河といったいくつかのタイプがあるが，タイプ毎に（個々の銀河が生まれた時期は異なっていても現在は）共通の物理的特徴（星の分布など）がある [4]．従って，理由はまだ分からないが，銀河はなんらかの緩和過程を受けて，完全な定常状態ではないにしても，ある種の準定常状態になっていると考えられる．しかも観測によると楕円銀河は，主に規則的な軌道で構成されている可能性が高い．3 体でさえカオスになるのに多数の星やさらにはダークマターまで存在する銀河で軌道は本当に規則的なのだろうか？　このように，どのような緩和過程を経て，どのような力学状態に落ち着くのかが大きな課題となっている．

４．１次元シート多体系の緩和過程とカオス的遍歴

著者と共同研究者は現実の銀河といった 3 次元系ではなく，1 次元シート多体系とよばれる，無限に広がった一様なシートが複数枚存在し，シート面に垂直な方向のみ 1 次元的に運動する系を最初のステップとして解析した [2, 5]．この系を先ず考えたのは高精度での数値実験が可能であること，位相空間がコンパクトであるので取り扱いやすいこと，そして自己重力という長距離力の系の物理的特徴は研究することができるからである．

数値解析の結果，シート系は以下のような非常に複雑な進化をすることが分かった．

(1) 力学的時間スケール Tc で力学平衡（ビリアル平衡）になる．
(2) 時刻 $t \sim NTc$(N は，シート数)で，系はエネルギー等分配が成立し，系は“準平衡状態(QE)”になる．
(3) $t \sim 10^4 NTc$ で系のグローバルなエネルギー分布関数は変化し，“遷移状態(TS)”と名付けた新たな状態に移行する．
(4) 再度, 準平衡状態に戻るが, 以前の準平衡状態とは厳密には異なる様態となる．さらに, 次は別の遷移状態に変化する．このような状態の遷移を繰り返していくが，同じ状態にはならない．
(5) $t \sim 10^6 NTc$ で，長時間平均をとるとミクロカノニカル分布に一致する．つまり，エルゴード性が成立する．

上記の状態遷移に関しては，ある遷移状態に滞在している時間の分布は，時間の-2 乗に比例していることが分かった．また，ある準平衡状態に滞在している時間の分布もベキ分布であるが，指数が異なり-0.5 乗となる．このようにベキ分布になるというのが重要な特徴である．実は，このような状態の遷移と滞在時間のベキ分布というのは，“安定カオス”[6]とよばれる状態と共通の特徴である．

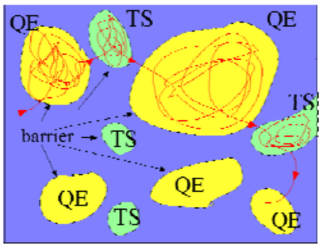

図 2:（2N 次元）位相空間中での軌道（系全体の状態の進化をあらわす）の概念図.

このような特徴が現れるのは，2N 次元位相空間で，系をある状態に留めおく，“バリア”（トーラスのようなもの）が存在し，系があるバリア内にあるときは，ある状態をとり，時間が経つと，違うバリア領域に移り渡って違う状態をとっていくと推測される（図 2）[2]．このバリアのサイズがもしフラクタル分布をしていれば，滞在時間がベキ分布をすることが理解できる．また，エルゴード性が成立する時間スケールは，バリアの中でもっとも大きなサイズで決まるのかもしれない．

なお，この遷移過程は，他の系でも見られるカオス的遍歴[7]と共通点が多い．カオス的遍歴では，秩序状態と乱れた状態がお互いに入れ替わりつつ遷移が継続して起こるものであるが，この遷移が起こる原因は，系の中に乱雑性を引き起こす“局所的な力”と，系の規則化を促す“平均場”の両方が含まれ，その 2 つの力が均衡していることによる．1 次元シート系では，実はシート数 N を増やすとリアプノフ指数の値がゼロに近づき，カオス性が薄れることが分かっている[2, 5]．つまり, N を大きくすると平均重力場が支配的になるからである．しかし, 有限の N では，シート数の離散性による平均場からのずれが，乱雑を引き起こす源であり，平均場との均衡が複雑な遷移をもたらすと考える．

５．新しい統計力学の構築に向けて

1 次元シート系では，数値解析により，複雑な遷移現象を経て，非常に長時間後にエルゴード性が成立すること，シート数を増やすとカオス性が薄れ，緩和時間が長くなること，また，エルゴード性が成立後も状態は遷移を続けることが分かってきた．これらの特徴は，地上で見られる気体といった短距離力が支配する系とは全く異なる．気体では，分子数が増えれば増えるほど，早く緩和し，ミクロカノニカル分布に近づくのみである．そのため，短距離力の系では緩和後の巨視的状態が予測可能となり統計力学が勝利をおさめた．しかし，重力といった長距離系の場合は，単純ではない．ただ，長距離力系といえども，古典ハミルトン系であり，ハミルトニアンにすべての情報が含まれているはずである．何か長距離力の緩和過程と(準)平衡状態に関して予測はできないのであろうか？それには位相空間の幾何学的, 測度論的議論が鍵になると考えている．なお，長距離力系は重力系以外でも非中性プラズマやビーム物理学の分野においても関連している．これらの系は，ボルツマン方程式＋ポアソン方程式という系の進化を司る方程式も共通する．そのため，現象に関しても共通点がみられる場合もあり，現象の統一的理解が可能かもしれない．さらに， 非線形集団運動，カオス，長距離力系の統計力学に関する基礎科学の発展につながるかもしれない．また，これらは当然，数学とも密着し，数学との協力は必要不可欠なものである．分野を超えた相互協力を是非期待したい．

６．JASMINE（赤外線位置天文観測衛星）計画で探る天の川銀河の力学構造

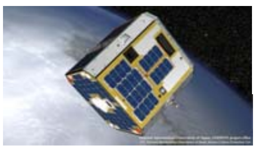

図 3：2013 年度打ち上げ予定の超小型衛星 Nano-JASMINE.

自己重力多体系の力学構造の今後の発展としては，理論(カオス，複雑系なども)，実験（数値シミュレーション）の進展も必要であるが，自然科学である以上, 現実の系がどのようになっているかを知ることも重要である．その系として近未来に詳細かつ精密に分かる可能性があるのが，唯一，我々が住む天の川銀河である．力学構造を知るためには，星の 3 次元分布と運動情報が必要となるが，その測定を行う天文学の一分野が位置天文学である．そこで，位置天文学の簡単な説明とともに，今後の位置天文観測衛星計画，特に日本で著者を中心に検討，開発を進めている赤外線位置天文観測衛星(JASMINE)計画[1),8)]を紹介させていただく．

図 4：完成した Nano-JASMINE 衛星の打ち上げ実機.

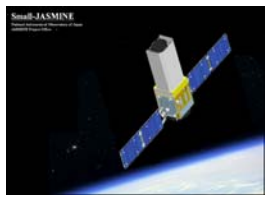

図 5：小型 JASMINE 衛星

参考文献

1) 郷田直輝：「天の川銀河の地図をえがく」，旬報社， 2009.
郷田直輝：「ダークマターとは何か」， PHP サイエンス・ワールド新書， 2012.
2) 郷田直輝：重力多体系での自己組織化，J.Plasma Fusion Res, 87, pp.441-448, 2011.
郷田直輝：「自己重力多体系の物理」，数理科学，2000 年 3 月号.
3) 丹羽敏雄：「数学は世界を解明できるか」，中公新書，1999.
4) 谷口義明・岡村定矩・祖父江義明編：シリーズ現代の天文学「銀河 I」，日本評論社，2007.
5) T．Tsuchiya， T．Konishi and N．Gouda， Physical Review E，**50**，2607, 1994.
T．Tsuchiya， N．Gouda and T．Konishi， Physical Review E，53，2210, 1996.
T．Tsuchiya， N．Gouda and T．Konishi， Astronomy and Space Science，257，319, 1997.
6) 相沢洋二・原山卓久：「カオスを視る」，別冊・数理科学，1998 年 10 月号.
7) 金子邦彦・津田一郎:「複雑系のカオス的シナリオ」,朝倉書店，1996
8) JASMINE 計画：http://www．jasmine-galaxy．org/index-j．html

微生物の集団が形成する秩序パターン　～　生物対流の実験と数理　～

末松 J. 信彦 （明治大学　大学院先端数理科学研究科）

微生物の中には外部環境に応答して方向性を持った遊泳をするものがいる。例えば、餌となる化学物質の濃度が高い方に泳いだり（走化性）、明るい方向に向かって泳いだり（走光性）、重力に逆らって泳いだり（走地性）することが知られている。この様な方向性を持った遊泳を走性とよぶ。走性により上向きの遊泳が促されると、培養液の水面付近に微生物の密度が高い領域ができる。微生物は水よりも密度が高いため、ある閾値を越えると密度不安定な状態になり、やがて対流パターンへと発展することが知られている。この現象は生物対流と呼ばれており、熱対流との類推で流体力学的な機構の解明が進んでいる。しかし、個々の微生物の特性が反映されるため、生物対流には単純な熱対流と一致しない部分も多く残されている。

光合成微生物であるミドリムシは単細胞の鞭毛虫で、光応答部位（眼点と副鞭毛体）を持つために走光性を示すことが知られている。このミドリムシの培養液を密閉セル（Fig. 1）に入れ、空間均一な強い光を下から照射すると、数十秒～数分で斑点状の模様が現れてくる（Fig. 2）。顕微鏡観察などの結果から、この模様は微生物が誘起する対流により形成される生物対流パターンであることが分かる。さらに時間が経過すると、このパターンは徐々に容器の中央に集まってきて局在化する。この様な局在化する対流は、生物対流の中でも特殊なものであり、主に光応答性の微生物で認められる。

本講演では、ミドリムシの生物対流を中心に筆者の近年の研究成果[1]に基づいた知見を紹介すると共に、その他の微生物に見られる生物対流[2]や熱対流[3]と対比することで、ミドリムシの生物対流の特徴を示す。また、演示実験では、実際にミドリムシの培養液に光を照射し、生物対流が形成される様子の観察や、光マスクを用いたパターンの制御を行う。実際に触れることで、生物対流現象を体験し、その特徴を理解してもらいたい。

References
[1] N. J. Suematsu *et al.*, *J. Phys. Soc. Jpn.* **80** (2011) 064003.
[2] S. Childress *et al.*, *J. Fluid Mech.* **69** (1975) 591-613.
[3] M. G. Velarde *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977) 581-624.

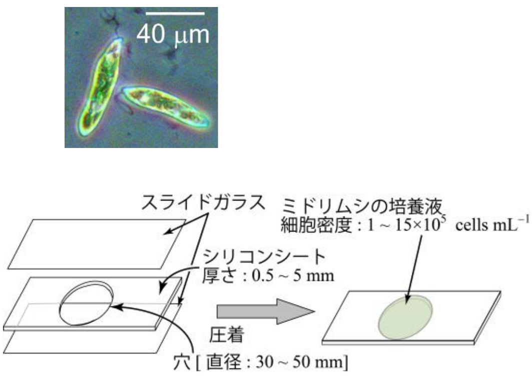

Fig. 1　試料作成の概念図

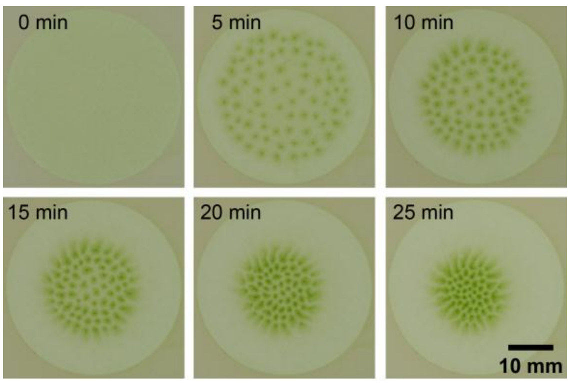

Fig. 2　生物対流形成のスナップショット

走化性細胞における１細胞の自己組織化を実験、統計解析、理論モデル化から解明する

柴田達夫

理化学研究所・発生再生科学総合研究センター　フィジカルバイオロジー研究ユニット

細胞の走化性は化学物質の濃度勾配に対して方向性のある運動を示す性質で、単細胞生物の環境探索や多細胞生物の形態形成に重要な細胞機能のひとつです。本研究では、走化性シグナル伝達系の鍵となる反応であるイノシトールリン脂質シグナル反応が、外部のシグナルのない状況においても自己組織的な自発活動をしていることを見いだし、1 細胞蛍光イメージングとその統計的な解析によってその動態を抽出しました。細胞はリン脂質の一種である PIP3 の濃度が局所的に上昇した局在パタンを細胞膜に作ります。局在パタンは一過的に形成される場合と、継続的に形成される場合がありました。局在パタンが継続的に形成される場合、それはあるスピードで移動する波状の時空間動態を示しました。私たちは、イメージングの統計的解析と、これまで知られている分子生物学の知識に基づいて数理モデルを構築し、局在パタンを再現することが出来ました。数理モデルは局在パタンが一過的に作られる場合と継続的に作られる場合の両方を、うまく再現します。理論的にはこれらはイノシトールリン脂質シグナル反応の振動的性質と興奮的性質に関係しています。さらに、これらの自己組織化の動態が走化性における濃度勾配の認識機構とどのように関係しているかを調べました。その結果、このような自己組織化のメカニズムによって、緩やかな勾配認識に高い感受性を示すことを明らかになりました。

参考文献

1. Shibata, T., M. Nishikawa, S. Matsuoka, and M. Ueda. 2012. Modeling the self-organized phosphatidylinositol lipids signaling system in chemotactic cells based on quantitative image analysis. Journal of Cell Science, in press. doi:10.1242/jcs.108373
2. Yoshiyuki Arai, Tatsuo Shibata, Satomi Matsuoka, Masayuki Sato, Toshio Yanagida and Masahiro Ueda, (2010), "Self-organization of the phosphatidylinositol lipids signaling system for random cell migration", Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 107 12399–12404
3. Masatoshi Ueda and Tatsuo Shibata (2007), "Stochastic signal processing and transduction in chemotactic response of eukaryotic cells" Biophysical Journal 93:11-20 (2007)
4. 柴田達夫、上田昌宏「細胞における情報処理の確率性と自発的対称性の破れ」(2011)「生命科学の新しい潮流 理論生物学」 共立出版 編集 望月敦史、p.97-115

Ill-posedness for the nonlinear Schrödinger equations in one and two space dimensions

岩渕 司 (中央大学理工学部)

本講演では, 次の非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = u^2 & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = \phi(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{NLS}$$

空間次元 n が 1 と 2 の場合を取り扱い, 初期値の Sobolev 空間における正則性の観点から初期値問題が適切となるか否かについて考察する. ここで初期値問題の解が一意的に存在して初期値への連続依存性が成り立つとき, その初期値問題は適切であると呼ばれており, 適切性が得られない場合は非適切であると呼ばれている. $\mathbb{R}^n$ 上の関数 f が Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^n)$ に属するとは次を満たすことである.

$$\|f\|_{H^s} := \left\|(1+|\xi|)^s \widehat{f}\right\|_{L^2} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

ただし $\widehat{f}$ は f の Fourier 変換を表す. (NLS) に対しては初期値の関数が滑らかならば初期値問題の適切性が得られ, 適切性が得られるか否かの臨界の関数空間を見出だすためには尺度不変性の議論から得られる関数空間がその目安となる. 方程式 (NLS) の解 u と $\lambda > 0$ に対して $u_\lambda(t,x)$ を $u_\lambda(t,x) := \lambda^2 u(\lambda^2 t, \lambda x)$ と定めるとこれは方程式を不変に保つスケール変換となる. 一方 Sobolev 空間において $\lambda > 0$ に関するノルム不変性を考えることによって

$$s = s_c := \frac{n}{2} - 2$$

という関係式が得られ, $H^{s_c}(\mathbb{R}^n)$ が尺度不変性が成り立つ関数空間である. 空間次元が 4 次元以上の場合には, $s \geq s_c$ ならば $H^s(\mathbb{R}^n)$ において時間局所解に関する適切性が得られ (Cazenave-Weissler [3] を参照), 空間次元が 3 以下のときには尺度不変性の臨界指数 s_c での適切性は一般に明らかにされていない. 空間次元が 3 以下のとき $s = 0$ の場合すなわち $L^2(\mathbb{R}^n)$ における適切性は Tsutsumi [6] によって示された.

本講演では特に空間 1 次元と 2 次元の場合を考察する. 空間 2 次元の場合, $s > -3/4$ とし時間局所解の適切性を Colliander-Delort-Kenig-Staffilani [4] が証明した. Bejenaru-da Silva [1] はそれを改善して $s > -1$ のとき時間局所解に関する適切性の結果を示した. 一方で尺度不変性が成り立つ臨界指数は $s_c = -1$ でありこの場合を含めて次の結果を得た.

定理 1. $n = 2$, $s \leq -1$ とする. このとき, 初期値の列 $\{\phi_N\}_{N=1}^\infty \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, $T_N \to 0\,(N \to \infty)$ を満たす時刻の列 $\{T_N\}_{N=1}^\infty$, および初期値が $u_N(0) = \phi_N$ である (NLS) の解の列 $\{u_N\}_{N=1}^\infty$ が存在し次が成り立つ.

$$\lim_{N\to\infty} \|\phi_N\|_{H^s} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \|u(T_N)\|_{H^s} = \infty.$$

空間 1 次元の場合, $s > -3/4$ のときに時間局所解の適切性を Kenig-Ponce-Vega [5] が証明した. Bejenaru-Tao [2] は彼等の結果を改善して $s \geq -1$ のとき時間局所解に

関する適切性, $s < -1$ のとき非適切性の結果を示した．ここで尺度不変性が成り立つ臨界指数は $s_c = -3/2$ である．$s = -1$ の場合についてより精密な結果を得るためにSobolev空間の実補間空間であるBesov 空間を導入して考察した．

定義 (Besov 空間). $\psi, \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は次を満たすとする．

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, |\xi| \leq 2\}, \quad \operatorname{supp}\widehat{\psi_0} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\},$$
$$\widehat{\psi}(\xi) + \sum_{j\geq 1} \widehat{\psi_0}(2^{-j}\xi) = 1 \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

このとき $\psi_j\,(j = 1, 2, 3 \cdots)$ を $\psi_j(x) := 2^{nj}\psi_0(2^j x)$ と定義し, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ に対してBesov空間 $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ のノルムを次で定義する．

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} := \|\psi * u\|_{L^p} + \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{sj}\|\psi_j * u\|_{L^p}\right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

定理 2. $n = 1$, $q > 2$ とする．このとき, 初期値の列 $\{\phi_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $T_N \to 0\,(N \to \infty)$ を満たす時刻の列 $\{T_N\}_{N=1}^{\infty}$, および初期値が $u_N(0) = \phi_N$ である (NLS) の解の列 $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$ が存在し次が成り立つ．

$$\lim_{N\to\infty} \|\phi_N\|_{B^{-1}_{2,q}} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \|u(T_N)\|_{B^{-1}_{2,q}} = \infty.$$

注意. (1) 次の包含関係が成立する．

$$H^{-1}(\mathbb{R}) = B^{-1}_{2,2}(\mathbb{R}) \subset B^{-1}_{2,q}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R}) \quad \text{for } 2 < q \leq \infty, s < -1.$$

Bejenaru-Tao [2] はSobolev空間 $H^{-1}(\mathbb{R})$ において時間局所適切性を示したが, 正則性 $s = -1$ の場合にはBesov空間を用いて適切となる空間をより広くすることはできず $B^{-1}_{2,q}(\mathbb{R})\,(q > 2)$ において非適切となる．

(2) 尺度不変性の議論から得られる臨界指数と, 適切性と非適切性のための臨界指数 s_c は, 空間2次元では一致し, 空間1次元では異なる．

参考文献

[1] I. Bejenaru, D. De Silva, *Low regularity solutions for a 2D quadratic nonlinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 11, 5805–5830.

[2] I. Bejenaru, T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 1, 228–259.

[3] T. Cazenave, F. B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal. **14** (1990), no. 10, 807–836.

[4] J. E. Colliander, J. -M. Delort, C. E. Kenig, G. Staffilani, *Bilinear estimates and applications to 2D NLS*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 8, 3307–3325.

[5] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 8, 3323–3353.

[6] Y. Tsutsumi, *L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), no. 1, 115–125.

生物個体群サイズ制御のパラドックス：数理モデルからの示唆

瀬野裕美
東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09
seno@math.is.tohoku.ac.jp

ABSTRACT

現在の地球上の生態系の多くは人間の生活の影響を受けている。20 世紀半ばを過ぎてから徐々に生態系への影響の深刻さが認識され，社会問題として取り上げられる事例が蓄積されるに伴って，科学的問題としても取り組まれるようになった。従来，農業・水産業における資源管理の対象となっていた系に対して，現在では，保全生物学，景観生態学等の応用的な生態学によって，レジリアンス，生態系サービスなどの生態系と人間社会との相互作用に関する概念が導入されながら，その持続可能性について検討されている。この流れに沿うように，これまで，農業・水産業に関連する資源管理の最適化の数理モデル研究に加えて，数理生態学でも，人間による環境条件の悪化が生態系に与える影響に関する数理モデル研究が発展してきたが，近年，人間による環境条件の改変による生態系維持という側面をテーマとする数理モデル研究も育ちつつある。今後，このような人間による生態系制御の問題を取り扱う数理モデルの基礎研究が新たに体系化されてくると期待される。本講演では，生態系ダイナミクスに対する人間の介入による生態系制御という観点から，基礎的な個体群動態モデルから数理的に得られる諸結果を概観し，将来の発展が期される数理モデル研究のテーマについて検討したい。

One of serious problems in agriculture has been the pest outbreak. Usually some pesticides have been used against the pest. However, in some cases, such a pesticide is effective only in the early period of its application and results in an outbreak of the pest in the later period. Such phenomenon is often called the *pest resurgence* [1-4]. It could be caused by the emergence of a pesticide-resistant strain of the pest or by the decrease of its enemy population affected by the pesticide [1, 2]. Some researches showed that a small amount of pesticide could increase the pest fecundity whereas a large amount of pesticide decreases the pest population. Such phenomenon is called the *hormesis* or *hormoligosis*. Hormesis would play an important role to cause the resurgence [4]. In our work [3, 6], we analyze a time-discrete host-parasite system in order to consider the condition in which the harvesting of the host (pest) population results in the increase of the host population itself so as to cause the paradox of pest control, that is, the resurgence. Our model is a time-discrete population dynamics model extended from the Nicholson-Bailey model [5], introducing the host intra-specific density effect and the harvesting effect [3, 6, 7]. We could analytically prove that the resurgence occurs even when the harvesting does not directly affect the parasite (natural enemy) population at all. Our result suggests that such a paradox would not be necessarily caused by the reduction of the natural enemy population due to the harvesting itself (e.g., with a pesticide), or by the appearance of some pesticide-resistance or the pest hormesis. Instead, the purely ecological balance in the population dynamics may cause it [3, 6, 7]. Our theoretical results can be easily extended to those for the other contexts including some biological conservation in not only land but also marine habitat. Our conclusion implies the importance of biological (ecological) researches for controlling ecological system.

References

[1] DeBach, P., Rosen, D. and Keffett, C.E., Biological control of coccid by introduced natural enemies. In *Biological control* (C.B. Huttaker ed.), Plenum Press, New York, pp. 165-194, 1971.

[2] Hardin, M.R., Benrey, B., Coll, M., Lamp, W.O., Roderick, G.K. and Barbosa, P., Arthropod pest resurgence: an overview of potential mechanisms. *Crop Prot.*, **14**: 3-18, 1995.

[3] Matsuoka, T. and Seno, H., Ecological balance in the native population dynamics may cause the paradox of pest control with harvesting. *J. theor. Biol.*, **252**: 87-97, 2008.

[4] Morse, J.G., Agricultural implications of pesticide-induced hormesis of insects and mites. *Hum. Exp. Toxicol.*, **17**: 266-269, 1998.

[5] Nicholson, A.J. and Bailey, V.A., The balance of animal populations. *Proc. Zool. Soc. Lond.*, **3**: 551-598, 1935.

[6] Seno, H., Native intra- and inter-specific reactions may cause the paradox of pest control with harvesting. *J. Biol. Dyn.*, **4**(3): 235-247, 2010.

[7] Seno, H., A paradox in discrete single species population dynamics with harvesting/thinning. *Math. Biosci.*, **214**: 63-69, 2008.

世話人：辻川 亨，飯田 雅人，北 直泰，大塚 浩史，梅原 守道，今 隆助（宮崎大学）
連絡先：辻川 亨（宮崎大学工学部工学基礎教育センター）
E-mail：tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL：0985-58-7381／0985-58-7288（事務室），FAX：0985-58-7289