

研究集会「**数学と現象：**

Mathematics and **P**henomena in **M**iyazaki **2013**」

日時:平成25年11月15日(金)～11月16日(土)

場所:宮崎大学工学部 B棟2階B210教室

案内:<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

アブストラクト

研究集会 「数学と現象 : Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2013 (略称 : MPM2013)」

日時 : 2013年11月15日(金) ~ 11月16日(土)
会場 : 宮崎大学工学部B棟2階B210教室
案内 : <http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

プログラム

11月15日(金)

午後の部

14:00-14:55 友枝 明保 (明治大学)

「自然渋滞の解明から解消へ : 数理モデルと実証」

15:15-16:10 相木 雅次 (慶応大学)

「Motion of a Vortex Filament in an External Flow」

16:30-17:25 畠山 金太 (宮崎大学)

「動脈硬化の成り立ちと合併症」

11月16日(土)

午前の部 << MPM2013 特別実験講座 >>

10:15-12:15 下川 倫子 (福岡工業大学)

「二成分砂山のパターン形成」

注 宮交バス「橘通り3丁目→宮崎大学(木花キャンパス)」の土曜日の朝の時刻表 :

8:21 → 8:54, 8:41 → 9:18, 9:11 → 9:52, 9:21 → 9:54, 9:41 → 10:18 (遅刻!)

午後の部

14:00-14:55 小園 茂平 (宮崎大学)

「有限個の正弦波を擾乱として生成された乱流の空間発展」

15:15-16:10 久保 隆徹 (筑波大学)

「Weighted $L_p - L_q$ estimates of Stokes semigroup in some unbounded domain」

16:30-17:25 澤田 宙広 (岐阜大学)

「非圧縮流体の局所適切性と非適切性の境目について」

本研究集会は、科学研究費補助金

課題番号	種目	代表者	課題名
24540216	基盤 C	飯田雅人	反応拡散系の漸近解構築への理論的アプローチ
25400178	基盤 C	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の解の挙動に関する解析
23740099	若手 B	梅原守道	連続体近似による天文現象のモデル化と数学解析
25800095	若手 B	今 隆助	数理生物学に現れる差分方程式の Lotka-Volterra 方程式を用いた研究

および平成 25 年度宮崎大学工学部長裁量経費

申請代表者	プロジェクト名
今 隆助	参加者体験型の実験講座を含む数学と現象の研究集会

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨, 飯田 雅人, 北 直泰, 梅原 守道, 出原 浩史, 今 隆助 (宮崎大学)
連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部工学基礎教育センター
E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

作成日 : 2013.10.10

自然渋滞の解明から解消へ：数理モデルと実証

友枝 明保 (明治大学 研究・知財戦略機構/JST CREST)

高速道路上では、個々のドライバーが車間距離に応じて加速と減速の操作を行うだけにもかかわらず、車の数が増え集団となると、同じ車の台数であってもスムーズな流れから、渋滞という新しい流れの状態を生み出します。合流や料金所といったボトルネックが無くとも生まれるこの種の渋滞は自然渋滞（図1）と呼ばれ、その形成メカニズムが数理モデル（偏微分方程式で記述される圧縮性流体モデル [1, 2]、常微分方程式で記述される追従モデル [3, 4]、変数が全て離散化されたセルオートマトンで記述されるセルオートマトンモデル [5, 6]）、及び実際の車を用いた実証実験 [7, 8] によって明らかにされてきました。さらに、自然渋滞の形成メカニズムを数理モデル・実証実験から明らかにすることで、自然渋滞を生まないような運転術 [9] を導くこともできます。

本講演では、渋滞学と呼ばれる渋滞研究分野の中でも、高速道路に見られる自然渋滞に関する研究について、関連する錯視現象（図2）にも触れながら、自然渋滞の発生メカニズムから実践できる自然渋滞を生まない運転術までを紹介します。



図1: 自然渋滞のきっかけとなっているサグ部の例（高槻BS付近）



図2: 縦断勾配錯視の例：遠坂は上り坂に見えるが、実際は下り坂である。（香川県屋島ドライブウェイ）

参考文献

1. B. S. Kerner and P. Konhauser, Phys. Rev. E, **48**, R2335 (1993).
2. A. Tomoeda, et al., JSIAM Lett., **1**, 72 (2009).
3. M. Bando, et al., Phys. Rev. E, **51**, 1035 (1995).
4. D. Shamoto, et al., Phys. Rev. E, **83**, 046105 (2011).
5. M. Kanai, et al., Phys. Rev. E, **72**, 035102 (2005).
6. 友枝明保, 西成活裕著, 「渋滞学入門」, 「現象数学入門」第三章, 三村昌泰編, 東大出版会
7. Y. Sugiyama, et al., New J. Phys., **10**, 033001 (2008).
8. 友枝明保, 「渋滞解消への数理と実証」, 社団法人日本道路協会「道路」847号 (平成23年10月号), pp.12-17.
9. R. Nishi, et al., Trans. Res. B, **50**, 116 (2013).

Motion of a Vortex Filament in an External Flow

相木雅次（慶應義塾大学）

Abstract

本講演では、非圧縮非粘性流体中の渦糸の運動を表すモデル方程式である Localized Induction Equation (LIE) を扱う。特に、渦糸自身が励起する速度場とは別に外部流もある状況を考え、渦糸が閉じている場合、つまり渦輪の運動を表す問題に対して得られた結果について紹介する。

1 背景

流体の運動に関する研究において「渦」は、中心的なトピックの一つとして盛んに調べられてきた。その起源は、1858年の Helmholtz[1] の論文までさかのぼり、この論文で「渦度」や「渦線」などの渦に関する基本的な概念の定式化が行われた。それ以降、渦にまつわる様々な現象が観測、研究されてきたが、その一つに渦糸というものがある。

流体の渦度が空間曲線上に集中して分布したものを渦糸と呼ぶ。ここで渦度 ω は、流体の速度場 \mathbf{v} に対して $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ で定義されるベクトルで、渦糸においては曲線上の各点でその点における渦度が曲線の接線方向を向いていて、曲線上以外の点では、渦度がゼロになっている。渦糸の運動も古くから研究されており、運動を表すモデル方程式として 1906 年に Da Rios[2] によって Localized Induction Equation (LIE) が提唱された。LIE は、

$$(1) \quad \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss}$$

で与えられる非線形偏微分方程式である。ここで $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^1(s, t), \mathbf{X}^2(s, t), \mathbf{X}^3(s, t))$ は、時刻 t において弧長パラメータ s でパラメータ付された渦糸の位置ベクトル、 \times は、3次元ユークリッド空間における外積、下付き添え字は各変数に関する偏微分を表す。LIE に対しては、初期値問題や初期値-境界値問題の可解性に関する結果が得られている。西山-谷 [3] は、ソボレフ空間における初期値問題の時間大域的可解性を証明した。小磯 [4, 5] は、幾何学的に一般化された問題設定で、橋本変換と呼ばれる未知関数の変換を (1) に適用して得られる非線形 Schrödinger 方程式に対する初期値問題の可解性を証明した。最近では、Banica and Vega[6, 7] や Gutiérrez, Rivas, and Vega[8] らによって有限時間で角を形成する (1) の自己相似解の解析が行われた。また、講演者ら [9] によって (1) に対する初期値-境界値問題の可解性が示された。

式 (1) は、外部流 \mathbf{V} がある場合に

$$(2) \quad \mathbf{X}_t = \frac{\mathbf{X}_\xi \times \mathbf{X}_{\xi\xi}}{|\mathbf{X}_\xi|^3} + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$$

へと自然に拡張される。ここで、(1) と違い、(2) にしたがって運動する渦糸は、外部流の影響で一般には伸び縮みする。したがって曲線の弧長パラメータは運動の過程で保存されないので渦糸のパラメータ付を ξ とした。渦糸の伸び縮みの影響が LIE に対して $|\mathbf{X}_s|^{-3}$ という形で表れている。方程式 (2) に対しては、西山 [10] によって閉じた渦糸の運動に対して弱解の存在が示されているが、滑らかな解の存在や解の一意性は知られていなかった。

2 問題設定・主結果

本講演では以下で与えられる, 方程式 (2) の閉じた渦糸に対する初期値問題

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{X}_t = \frac{\mathbf{X}_\xi \times \mathbf{X}_{\xi\xi}}{|\mathbf{X}_\xi|^3} + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t), & \xi \in (0, 1), t > 0, \\ \mathbf{X}(\xi, 0) = \mathbf{X}_0(\xi), & \xi \in (0, 1), \\ \mathbf{X}(0, t) = \mathbf{X}(1, t), & t > 0, \end{cases}$$

に対して得られた滑らかな解の一意存在について紹介する. 具体的には, 以下の定理を紹介する.

定理 2.1 自然数 $m \geq 4$ と $T > 0$ に対して, 初期値 \mathbf{X}_0 が $\mathbf{X}_0 \in H^m(0, 1)$ と $|\mathbf{X}_{0s}| \equiv 1$ を満たし, 外部流 \mathbf{V} が $\mathbf{V} \in C([0, T]; W^{m, \infty}(\mathbf{R}^3))$ を満たすならば, ある $T_0 \in (0, T]$ が存在して

$$\mathbf{X} \in C([0, T_0]; H^m(0, 1)) \cap C^1([0, T_0]; H^{m-2}(0, 1))$$

なる (3) の解が一意に存在する.

この定理を証明する上では, 解の高階評価をどのように導出するかが一番のキーポイントになるので, 講演ではその点に重点を置いて発表する.

References

- [1] H. von Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen*, J. für die reine und angewandte Mathematik, **52** (1858), pp. 297–392.
- [2] L. S. Da Rios, *Sul Moto D'un Liquido Indefinito Con Un Filetto Vorticoso Di Forma Qualunque*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **22** (1906), No.1, pp. 117–135 (written in Italian).
- [3] T. Nishiyama and A. Tani, *Initial and Initial-Boundary Value Problems for a Vortex Filament with or without Axial Flow*, SIAM J. Math. Anal., **27** (1996), no. 4, pp. 1015–1023.
- [4] N. Koiso, *The Vortex Filament Equation and a Semilinear Schrödinger Equation in a Hermitian Symmetric Space*, Osaka J. Math., **34** (1997), No.1, pp. 199–214.
- [5] N. Koiso, *Long Time Existence for Vortex Filament Equation in a Riemannian Manifold*, Osaka J. Math., **45** (2008), No. 2, pp. 265–271.
- [6] V. Banica and L. Vega, *On the Stability of a Singular Vortex Dynamics*, Commun. Math. Phys., **286**(2009), pp. 593–627.
- [7] V. Banica and L. Vega, *Scattering for 1D cubic NLS and singular vortex dynamics*, J. Eur. Math. Soc., **14**(2012), pp. 209–253.
- [8] S. Gutiérrez, J. Rivas, and L. Vega, *Formation of Singularities and Self-Similar Vortex Motion Under the Localized Induction Approximation*, Comm. Partial Differential Equations, **28**(2003), no. 5 and 6, pp. 927–968.
- [9] M. Aiki and T. Iguchi, *Motion of a Vortex Filament in the Half-Space*, Nonlinear Anal., **75** (2012), pp. 5180–5185.
- [10] Nishiyama, *On the motion of a vortex filament in an external flow according to the localized induction approximation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **129** (1999), no. 3, pp. 617–626.

動脈硬化の成り立ちと合併症

畠山金太（宮崎大学医学部病理学講座構造機能病態学分野）

はじめに

心筋梗塞、脳梗塞、閉塞性動脈硬化症などの虚血性心血管病の多くは、動脈硬化巣（プラーク）を基盤に血栓が形成されて発症することが明らかとなり、アテローム血栓症と総称されている。今回、プラークの進展とその合併症であるアテローム血栓症の発症メカニズムについて概説する。

1 動脈硬化巣の特徴

一般的にプラークと呼ばれる病変は、斑状の盛り上がりを示し、中心に壊死組織（脂質コア）を含み、表面はコラーゲンを主成分とする線維性被膜で覆われた病変である。プラークの組織像は極めて多様で、脂質成分や線維成分の多寡により不安定プラークや線維性プラークなどと呼ばれる。

2 プラークの進展と慢性炎症

プラーク内にはマクロファージやTリンパ球の浸潤を認め、また少数ではあるが樹状細胞や肥満細胞も観察される。これらの細胞成分はプラークの進展との関連が示唆されており、特にマクロファージはプラーク破綻に深く関与するとされている。このような炎症反応は高血圧、脂質異常症、糖尿病などの危険因子（環境因子）と遺伝因子の相互作用によって生じる個体差の大きな慢性炎症である。

3 アテローム血栓症：炎症と血栓形成の関与

心筋梗塞の発症メカニズムとして冠動脈プラークの破綻と血栓形成が重要である。脳梗塞に関してはアテローム血栓性脳梗塞の頻度が脳卒中の約30%を占めるまで増加している。その原因は心筋梗塞と共通の病態と考えられており発症機序には血栓性、塞栓性、血行力学性の3つが関与している。下肢の閉塞性動脈硬化症（ASO）についても同様の病態が考えられているが、より末梢の微小循環系の異常も重要な因子となる。このように心筋梗塞、脳梗塞、ASOなどのアテローム血栓症においては、共通したメカニズムの一つとして炎症反応と血栓形成は重要な因子となっている。

4 プラークと血栓形成

プラーク内には凝固カスケード反応のトリガーである組織因子が過剰発現しており、また血小板活性化作用の強いコラーゲンやポドプラニン発現も増加し、さらに線溶活性も低下している。このようにプラーク破綻によるイベント発症においては、炎症反応の亢進とプラークの過凝固性（プラークの質の変化）は重要な因子と考えられる。一方、プラークが破綻しても心筋梗塞の発症には至らない無症候性の冠動脈血栓は剖検例の約10%に認めるが、このような血栓

はプラーク進展に関与している。

5 血栓の成長とイベント発症

血栓の形成には 1) 血管壁の性状変化、2) 血流の変化、3) 血液成分の変化、が関与している。プラーク破綻にともなう血栓形成においては、血管壁の性状変化、特に破綻したプラーク内の組織成分（組織因子など）と血液との接触が最も重要と考えられる。

さらに心血管イベント発症には血栓の増大も重要なプロセスとなる。血栓の増大は、血小板の活性化、マイクロパーティクル、プロスタサイクリン、PAI-1（Plasminogen Activator Inhibitor-1）、一酸化窒素、CD39 などの凝固線溶系のバランスや血流（末梢塞栓やシェアストレスによる血流異常）などにより制御されている。このような血栓の成長プロセスに関与する多くの因子は炎症性サイトカインによる調節を受けている。

おわりに

動脈硬化の発生から心血管イベント発症にいたるプロセスにおいては、分子間、細胞間あるいは臓器間の連関が病態の進行に重要である。そして基盤病態としての慢性炎症と凝固線溶・血小板の関連性とその制御機構の解明は新規治療法の開発に寄与すると考えられる。

二成分砂山のパターン形成

下川倫子 (福岡工業大学 工学部知能機械工学科)

二種類の粉体を混ぜ合わせ、狭い隙間に流し込むと二種類の粉体が分離した相分離パターン(図 1(a))や縞パターン(図 1(b))が観察される。二種類の粉体は粒の形、大きさがそれぞれ異なる。粒径が小さく、歪な形の粉体 A と粒径が大きく、丸い形の粉体 B を組み合わせると、相分離パターンが形成される。一方、粒径が大きく、形が歪な粉体 C と粒径が小さく、丸い形の粉体 D の組み合わせでは、縞パターンが観察される。粒子の形に依存した物理量である安息角と粒子の大きさを考慮した数理モデルにより、相分離パターン(図 1(c))と縞パターン(図 1(d))の遷移現象を表現することができる[1]。

講演者は縞パターンの形成に着目し、大きな砂山で同様の実験を行った。図 1(b)に見られるように、従来の実験では麓から峰にかけて一様の規則正しい波長をもった縞構造が観察される(図 1(b))。一方、大きな砂山で同様の実験を行ったところ、山の上部と下部に異なる二種類の波長を持った新しい縞構造が自発的に形成された(図 2)[2]。講演では従来の砂山のパターン形成の紹介を行うとともに、講演者の発見した二重縞構造の研究成果を報告する。演示実験ではいくつかの粉体を組み合わせ、実際に砂山のパターンを作成していただく予定である。

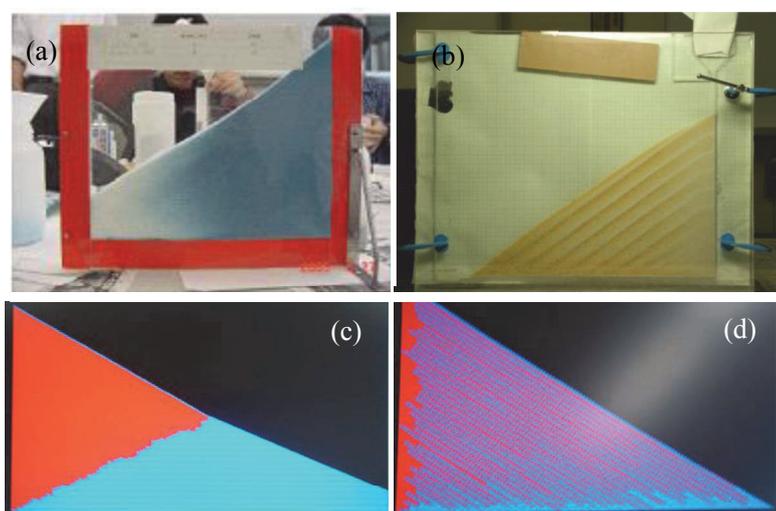


図 1 二成分砂山のパターン
(a)(b)実験結果[3], (c)(d)シミュレーション結果

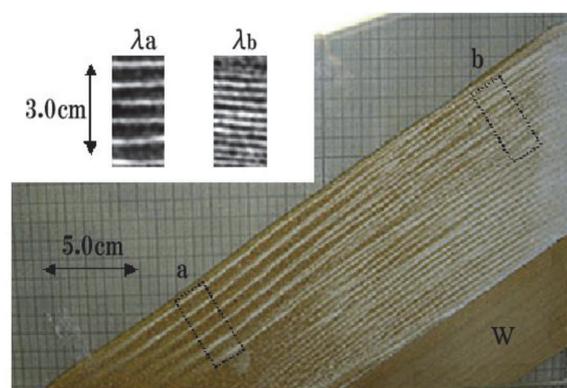


図 2 二重縞構造

大きな砂山(従来の倍のサイズ)での実験では、山の上部(b領域)と下部(a領域)で異なる縞構造が観察される。

Reference

- [1] H. A. Makse, S. Havlin, P. R. King, and H. E. Stanley, *Nature* **386**, 379 (1997).
- [2] M. Shimokawa and S. Ohta. *Phys. Rev. E* **77**, 011305 (2008).
- [3] http://stat.fm.nitech.ac.jp/~isobe/H20_text.pdf

有限個の正弦波を擾乱として生成された乱流の空間発展

宮崎大・工・機械設計システム工学科 小園茂平

一般に、実験流体力学者は風洞や水槽と呼ばれる装置を使って、理想的な流れを作り、その中に模型を置いたりセンサーを置いたりして、流れにまつわる量を測り暮らしている。我々はマルチファン型風洞[1]という新しいタイプの風洞ツールを使い、いろいろな風を生成して実験を行ってきた。本報告では、①マルチファン型風洞がどのような風洞で、乱流をどのように作りどのように計測するかを説明し、②現在進行している当研究室のプロジェクトの二三の結果を紹介する。

乱流は、おおざっぱにいうと、流れと直角方向に平均流速勾配を持たない一様乱流と勾配を持つ剪断乱流とがある。われわれは一様乱流としては一様等方性乱流の生成を、剪断乱流として大気境界層シミュレーションを主な研究対象としてきた。本報告のほとんどは一様等方性乱流について述べる。

当初は、強風時の変動風の1次元カルマン型スペクトルといわれる半理論的な波数領域の式に従い目標スペクトルをつくり、それを時間領域に変換して一本の時刻歴を作り、マルチファン型風洞の全送風機にその同一の信号を入力し“乱流”を作っていた。これは、質量保存則から想像できるように、上流の送風による押し込みが下流で同じ運動をする流れ、すなわち脈動流に近いものであった。速度変動スペクトルは低周波数の強制運動による寄与と高周波数の自然生成された乱れによる寄与の間に落ち込みがあり、いわゆる“スケールの分離”が見られた。これは乱流とは言い難いものであった。そこで、本物の乱流（そういうものがあるとする）に近づけるためにいろいろの手段を試みてきた。

マルチファン型風洞では乱れの作り方は二つの手段がある。入力信号の振幅と位相を各送風機で変化させて、隣り合う送風機から押し出される気流間の剪断不安定を利用する方法と、信号そのものに強制的に変動を与える方法である。これらを組み合わせて、いかにしたら強乱かつ大スケールの乱流（即ち、乱流レイノルズ数 Re_λ が大きい乱流）が風洞内で実現できるかということを考えてきた。

以下、その経過を簡単に述べる。

吉田他[2]では、同じカルマン型スペクトルに従う時刻歴を使いながらも、マルチファン型風洞ではそれぞれの送風機は独立に制御できるので、送風機ごとに時刻歴の位相をランダムにずらして入力した（“ランダム位相法”と略称する）。図1は最下流での乱流のスペクトルを示す。位相を揃えていたときのスケール分離は消えて連続的な

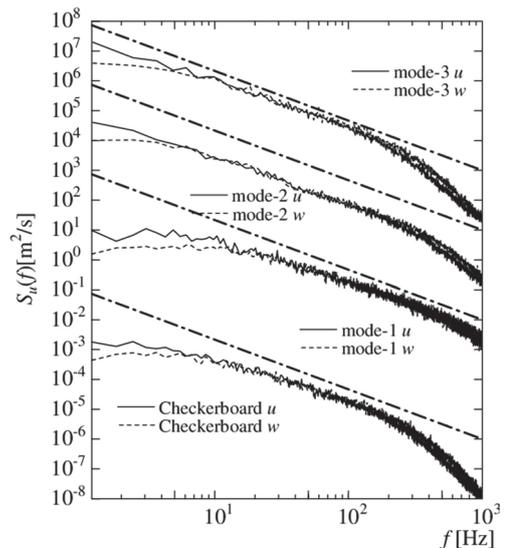


図1 カルマン型スペクトルに基づく合成波を外部擾乱として使用した乱流スペクトルの空間発展（吉田他 2010[2]）

スペクトルが見られ、Kolmogorov のいわゆる $-5/3$ 乗則に従う領域も見られる。このランダム位相法に着目した。

吉田他[2]のスペクトルの低周波数が強制擾乱によるものかどうかの疑問が残ったので、池田他[3]では40個の一定振幅の正弦波擾乱を合成して一本の時刻歴を作った。送風機はランダム位相法を使って運転した。図2は測定部入り口近くのスペクトルの空間発展を示している。最上流 $X/Mz=4.6$ では強制擾乱によるフラットなスペクトル域が見られるがすでに $X/Mz=18.6$ では、十分発達乱流で見られる連続的なスペクトルが出現し $-5/3$ 乗則に相当する領域が見られる。

池田他[3]では40個の正弦波擾乱を用いて入力擾乱を合成し、その結果、乱流らしい渦構成を持ち $Re_\lambda=753$ の高レイノルズ数一様乱流を生成できたが、正弦波の個数が多すぎて、最低限どのような条件が必要かは不明であった。すなわち、乱流発達に本質的に寄与する周波数成分の条件を明らかにしてはいなかった。

そこで、高牟禮[4]では正弦波を2個だけ使用し、乱流がどこまで生成できるかを調べた。図3は正弦波合成波 $u=\sin(2\pi f_A)+\sin(2\pi f_B)+U$ ($f_A=0.912\text{Hz}$, $f_B=0.168\text{Hz}$, $U=4.67\text{m/s}$) を、ランダム位相法に従い各送風機に $0.4N$ ($1\leq N\leq 99$) の位相差を割り当てて作った乱流のスペクトルの下流方向空間発展である。もともとの二つの正弦波に対応するピークが残留しているものの、 f_A より高い周波数に新たな乱れの寄与が見られる。この研究はまだ道半ばであり、今後、 $|f_A\pm f_B|$ の値がどのような時に効果的な乱流生成となるか、無次元パラメータとしてどのように表現できるかなどの問題に取り組む予定である。

[参考文献]

- 1) S. Ozono, A. Nishi, H. Miyagi, J. of Wind Eng. Ind. Aero., Vol. 94, 225-240 (2006).
- 2) 吉田, 坂口, 小園, 宮崎大学工学部紀要, 第39号, 9-14 (2010) .
- 3) 池田, 小園, 日本機械学会論文集, B編, 79巻, 300号, 555-566 (2013) .
- 4) 高牟禮, 池田, 小園, 日本流体力学会年会 2013, 東京 (2013).

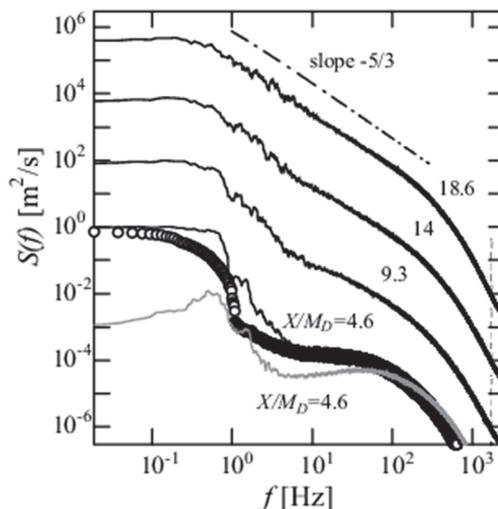


図2 40個の正弦波合成波を外部擾乱に使用した乱流スペクトルの空間発展 (池田他 2013[3])

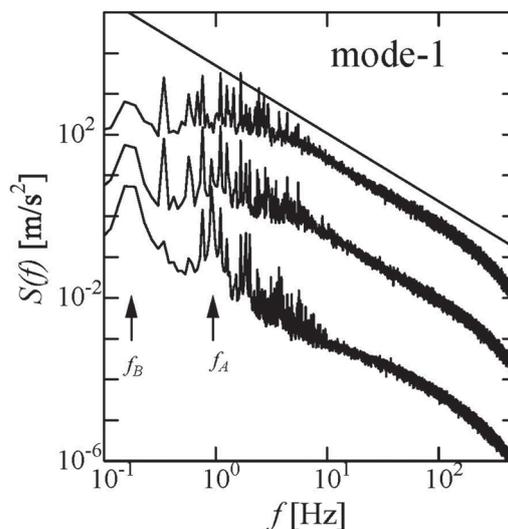


図3 2個の正弦波合成波を外部擾乱に使用した乱流スペクトルの空間発展 ($f_A=0.912\text{Hz}$, $f_B=0.168\text{Hz}$) (高牟禮他 2013[4])

Weighted $L_p - L_q$ estimates of Stokes semigroup in some unbounded domain

久保 隆徹 (筑波大学 数理物質科学研究科)*

本研究は小林孝行教授 (佐賀大学) との共同研究に基づく. $n \geq 2$ とし, Ω を外部領域, すなわち, $\Omega \setminus B_{R_0}(0) = \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}(0)$ となる正定数 R_0 が存在する領域とする. 外部領域 Ω に対して, 次の Navier-Stokes 方程式を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = 0, & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad u(t, x) = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = a(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (\text{NS})$$

ここで $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$ と $\pi(t, x)$ は, 非圧縮性流体の流速と圧力を表しともに未知量である. また, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ は初期流速である.

本講演では, Navier-Stokes 方程式を重み付き L^p 空間での考察が目的である. そのために, まず重み関数のクラスと重み付き L^p 空間について紹介する.

定義 1 (Muckenhoupt class \mathcal{A}_p). $1 < p < \infty$ とする. 重み関数 $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が Muckenhoupt class \mathcal{A}_p に属するとは次を満たすことを言う:

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty$$

ここで, \sup は座標軸に平行な辺をもつ立方体 Q の全体でとるものとする.

例えば, $w(x) = (1 + |x|^2)^{\alpha/2}$ ($-n < \alpha < n(p-1)$) が $w \in \mathcal{A}_p$ になる.

この重み関数 $w \in \mathcal{A}_p$ を用いて, 重み付き L^p 空間 $L^p_w(\Omega)$ を以下で定義する:

$$L^p_w(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\bar{\Omega}) \mid \|u\|_{p,w} = \|uw^{1/p}\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p w dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

この Navier-Stokes 方程式 (NS) を重み関数 $w(x) = \langle x \rangle^s = (1 + |x|^2)^{s/2}$ をもつ L^p 空間で考察を行う. $w(x)$ が Muckenhoupt class に属すれば, その重み関数 $w(x)$ をもつ $L^p_w(\Omega)$ は Helmholtz 分解が成立し, $L^p_w(\Omega)$ からソレノイダル空間 $L^p_{w,\sigma}(\Omega)$ への射影作用素 P が有界であり, さらに, Stokes 作用素 $A = -P\Delta$ が $L^p_{w,\sigma}(\Omega)$ 上で解析半群 e^{-tA} を生成することもわかっている ([3]).

次に (NS) の小さい初期値に対する時間大域解を示す重要な鍵となる Stokes 半群の $L^p - L^q$ 評価について考える. この重み付き L^p 空間に対して次の重み付き $L^p - L^q$ 評価を示すことができた.

* e-mail: tkubo@math.tsukuba.ac.jp

定理 2 (Stokes 半群の重み付き $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2$, $1 < p \leq q < \infty$ とし, また s, s' を $-n/q < s' \leq s < n(1 - 1/p)$ を満たすようにとり, 重み関数 w を $w = \langle x \rangle^s$ とする. このとき, $a \in L_w^p(\Omega), t > 0$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{s'} e^{-tA} Pa\|_{L^q(\Omega)} &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\Omega)}, \\ \|\langle x \rangle^{s'} \nabla e^{-tA} Pa\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \left(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} + t^{-\frac{n}{2p}} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \right) \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

注 3. 重みがない L^p 空間については, 岩下 [4] ($n \geq 3$), 檀・小林・柴田 [1] ($n = 2$) により以下の評価が示されている. 定理 2 はそれらの自然な拡張になっている.

$$\begin{aligned} \|e^{-tA} Pa\|_{L^q(\Omega)} &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|a\|_{L^p(\Omega)}, \\ \|\nabla e^{-tA} Pa\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \left(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{n}{2p}} \right) \|a\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

定理 2 の証明の鍵となるのが以下の 2 つ補題である.

補題 4 (\mathbb{R}^n での Stokes 半群の $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2$, $1 < p \leq q < \infty$. $a \in L_w^p(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $k \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ:

(i) $-\frac{n}{q} < s' \leq s < n(1 - \frac{1}{p})$ に対して, 次が成り立つ:

$$\|\langle x \rangle^{s'} \partial_t^k \nabla^\alpha e^{-tA} Pa\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}-k} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) $s' \leq s \leq 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$\|\langle x \rangle^{s'} \partial_t^k \nabla^\alpha e^{-tA} Pa\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2p}-\frac{|\alpha|}{2}-k} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

補題 5 (局所エネルギー減衰定理 ([1],[2])). $n \geq 2$, $1 < p < \infty$. $R > R_0$ に対して次を満たす正定数 $C_{p,R}$ が存在する:

$$\|\partial_t^m e^{-tA} a\|_{W_p^2(\Omega_R)} \leq \begin{cases} C_{p,R} t^{-\frac{n}{2}-m} \|a\|_{L^p(\Omega)}, & n \geq 3, \\ C_{p,R} t^{-1-m} (\log t)^{-2} \|a\|_{L^p(\Omega)}, & n = 2. \end{cases}$$

ただし, $t \geq 1$, $a \in L_{\sigma,R}^p(\Omega) = \{f \in L_\sigma^p(\Omega) \mid \text{supp } f \subset B_R(0)\}$.

上の 2 つを用いて cut-off テクニックにより外部領域での評価を導くことができる. 本講演では, 本研究の動機と定理 2 の証明のアウトラインについて報告し, 時間があれば Navier-Stokes 方程式への応用についても報告する.

参考文献

- [1] W. Dan, T. Kobayashi and Y. Shibata, Appl. Math. **16** (1998).
- [2] W. Dan and Y. Shibata, J. Math. Soc. Japan **51** (1999).
- [3] R. Farwig and H. Sohr, J. Math. Soc. Japan, **49**, No.2(1997).
- [4] H. Iwashita, Math. Ann. **285** (1989).
- [5] T. Kobayashi and T. Kubo, Tsukuba Journal of Mathematics, **37**(2013).

非圧縮流体の局所適切性と非適切性の境目について

澤田 宙広 (岐阜大学工学部)*

問題 非圧縮流体の運動を記述するナビエ・ストークス方程式 (粘性: $\mu > 0$) 及びオイラー方程式 (非粘性: $\mu = 0$) を全空間 \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) で考える.

$$(NS) \text{ or } (E) \quad \begin{cases} u_t - \mu \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

初期値 u_0 に両立条件 $\nabla \cdot u_0 = 0$ を課す. $\mu > 0$ (簡単の為 $\mu = 1$ とする) の場合,

$$(INT) \quad u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbf{P}(u(\tau), \nabla)u(\tau) d\tau$$

積分方程式の解 (mild solution) を構成して, これが (NS) を満たすことを確かめる. $\mu = 0$ の場合, 強解 (strong solution) を適切なクラスで考える. ここにおいて, 圧力は $p = \sum_{i,j=1}^n R_i R_j u^i u^j$ と与えられる.

目的 u_0 が与えられたとき, 解 (u, p) を時間局所的に一意構成できるか, 初期値鋭敏性を保持しているかを調べたい. 本講演では, 初期値の属する関数空間による分類を行う. 即ち, $u_0 \in X$ に対して, 時間局所解の一意存在と初期値鋭敏性が保証されるとき, (NS) または (E) は X で局所適切であるという. 一方, 存在・一意性・初期値鋭敏性のどれかが満たされないとき, (NS) または (E) は X で非適切であるという.

結果 1 (ナビエ・ストークス) 次の関数空間の列を考える:

$$\dot{H}_2^{n/2-1} \subset L^n \subset \dot{B}_{p,\infty}^{-1+n/p} \subset BMO^{-1} = \dot{F}_{\infty,2}^{-1} \subset \dot{F}_{\infty,q}^{-1} \subset \dot{F}_{\infty,\infty}^{-1} = \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$$

ただし, $p \in [n, \infty), q > 2$ とする. これらは (NS) の初期値問題において, 初期値の属するクラスとして自己相似解のスケールについてスケール不変である. Koch-Tataru は, $n \geq 2$ において, (NS) は BMO^{-1} で局所適切であることを示した; 尚, 一意性については少し制限を加える必要がある (Miura). 一方, Bourgain-Pavlovic は, $n = 3$ において, (NS) は $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ で非適切であることを示した. 同様に, $\dot{B}_{\infty,q}^{-1}$ ($q > 2$) で非適切であることも分かる (Yoneda).

結果 2 (オイラー) オイラー方程式は双曲型であるから, 放物型の様な平滑化効果は期待できない. 故に, C^1 に近いところに局所適切と非適切の境目があると予想される. そこで, 次の関数空間の列を考える: $C^{1+\alpha} \subset C^{1+\varepsilon} \subset B_{\infty,1}^1$ (ただし $\alpha > \varepsilon > 0$), 及び

$$H^s \subset W^{\beta,p} \subset B_{p,1}^{1+n/p} \subset B_{\infty,1}^1 \subset B_{\infty,q}^1 \subset B_{\infty,\infty}^1 (= \mathcal{C}^1 \sim C^1) \subset B_{\infty,\infty}^{1-\gamma}$$

ただし $2 < p < \infty, s > 1 + n/2, \beta = s - (n/2 - n/p) > 1 + n/p, q > 1, \gamma > 0$ である. Pak-Park は, $n \geq 2$ において, (E) は $B_{\infty,1}^1$ で局所適切であることを示した. 一方, $n = 3$ において, (E) は $B_{\infty,q}^1$ ($q > 1$) で非適切であることが分かる.

* 〒 501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1 岐阜大学工学部電気電子・情報工学科応用物理コース
e-mail: okihiro@gifu-u.ac.jp



MPM

世話人: 辻川 亨, 飯田 雅人, 北直泰, 梅原 守道, 出原浩史, 今 隆助

連絡先: 辻川 亨 (宮崎大学工学部工学基礎教育センター)

E-mail: tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL: 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務局), FAX: 0985-58-7289