

研究集会「数学と現象:

Mathematics and **P**henomena in **M**iyazaki **2013**」

日時:平成25年11月15日(金)~11月16日(土)

場所:宮崎大学工学部 B棟2階B210教室

案内:<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

報告集

はじめに

この報告集は平成 25 年 11 月 15 日（金）～16 日（土）に宮崎大学で開催された研究集会「数学と現象：Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2013 (略称：MPM2013)」の講演及び実験をまとめたものです。本年度の研究集会は、研究集会「偏微分方程式と現象：PDEs and Phenomena in Miyazaki (略称：PPM)」と呼ばれていた頃から数えて 11 回目にあたります。今回は広い意味で「流れ」に関する研究を行っている研究者をお呼びし、講演や実験をお願いいたしました。例年のメインイベントの一つである特別実験講座では、福岡工業大学の下川倫子先生に参加者体験型の実験講座を準備していただきました。実験は、砂山のパターン形成に関するものでした。下川先生には、参加者が楽しみながら学べるための、さまざまな工夫をしていただきました。そのため、参加者全員、時間を忘れて実験を楽しんだのではないかと思います。また、実験講座には高校生の参加者もあり、今後もこのような傾向が続けばと願っております。講演では、車や人など古典的な流体の研究では取り扱われてこなかったものの流れの研究、血液が流れる血管の病気の研究、古典的な流体の新しい実験研究・理論研究が紹介されました。例年、参加者の分野が幅広く、今回も、講演者の方々には異分野の方も理解できるように講演を工夫していただきました。また、参加者の皆様には活発な議論をしていただきました。このような講演者、参加者の皆様のご協力に改めて感謝申し上げます。この研究集会が分野間の垣根を低くし、学際領域における新しい研究テーマの発掘につながれば幸いです。

この報告集は研究集会のウェブページにも公開されています。過去の研究集会の報告集も同ウェブページに公開されていますので、ぜひご覧ください。

<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

この研究集会は宮崎大学工学教育研究部の平成 25 年度学部長裁量経費「参加者体験型の実験講座を含む数学と現象の研究集会」の援助を受けました。ここに謝意を表します

2014 年 1 月
世話人を代表して
今 隆助

目次

1. 友枝 明保 (明治大学)
自然渋滞の解明から解消へ：数理モデルと実証.....1-23
2. 相木 雅次 (慶応大学)
Motion of a Vortex Filament in an External Flow 24-29
3. 畠山 金太 (宮崎大学)
動脈硬化の成り立ちと合併症.....30-40
4. MPM2013 特別実験講座
下川 倫子 (福岡工業大学)
二成分砂山の縞構造 41-50
5. 小園 茂平 (宮崎大学)
有限個の正弦波を擾乱として生成された乱流の空間発展51-57
6. 久保 隆徹 (筑波大学)
Weighted $L_p - L_q$ estimates of Stokes semigroup
in some unbounded domain58-71
7. 澤田 宙広 (岐阜大学)
非圧縮流体の局所適切性と非適切性の境目について 72-76
- * 過去のプログラム (PPM2003 ~ PPM2011, MPM2012) 77-96

研究集会 「数学と現象 : Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2013 (略称 : MPM2013)」

日時 : 2013年11月15日(金) ~ 11月16日(土)
会場 : 宮崎大学工学部B棟2階B210教室
案内 : <http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

プログラム

11月15日(金)

午後の部

14:00-14:55 友枝 明保 (明治大学)

「自然渋滞の解明から解消へ : 数理モデルと実証」

15:15-16:10 相木 雅次 (慶応大学)

「Motion of a Vortex Filament in an External Flow」

16:30-17:25 畠山 金太 (宮崎大学)

「動脈硬化の成り立ちと合併症」

11月16日(土)

午前の部 << MPM2013 特別実験講座 >>

10:15-12:15 下川 倫子 (福岡工業大学)

「二成分砂山のパターン形成」

注 宮交バス「橘通り3丁目→宮崎大学(木花キャンパス)」の土曜日の朝の時刻表 :

8:21 → 8:54, 8:41 → 9:18, 9:11 → 9:52, 9:21 → 9:54, 9:41 → 10:18 (遅刻!)

午後の部

14:00-14:55 小園 茂平 (宮崎大学)

「有限個の正弦波を擾乱として生成された乱流の空間発展」

15:15-16:10 久保 隆徹 (筑波大学)

「Weighted $L_p - L_q$ estimates of Stokes semigroup in some unbounded domain」

16:30-17:25 澤田 宙広 (岐阜大学)

「非圧縮流体の局所適切性と非適切性の境目について」

本研究集会は、科学研究費補助金

課題番号	種目	代表者	課題名
24540216	基盤 C	飯田雅人	反応拡散系の漸近解構築への理論的アプローチ
25400178	基盤 C	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の解の挙動に関する解析
23740099	若手 B	梅原守道	連続体近似による天文現象のモデル化と数学解析
25800095	若手 B	今 隆助	数理生物学に現れる差分方程式の Lotka-Volterra 方程式を用いた研究

および平成 25 年度宮崎大学工学部長裁量経費

申請代表者	プロジェクト名
今 隆助	参加者体験型の実験講座を含む数学と現象の研究集会

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨, 飯田 雅人, 北 直泰, 梅原 守道, 出原 浩史, 今 隆助 (宮崎大学)
連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部工学基礎教育センター
E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

作成日 : 2013.10.10

2013年11月15日(金)～11月16日(土)

研究会 「数学と現象: Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2013 (MPM2013)」

@ 宮崎大学工学部B棟2階B210室

自然渋滞の解明から解消へ : 数理モデルと実証



友枝 明保 (Akiyasu Tomoeda)

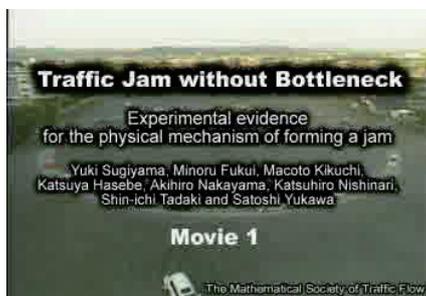
明治大学 研究・知財戦略機構 / JST CREST

Self-introduction "Akiyasu Tomoeda"

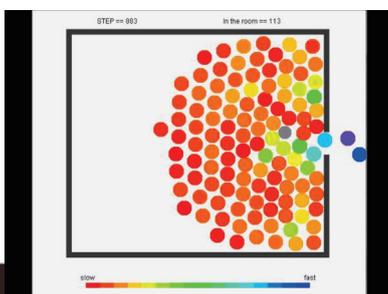


• Research Topics (1)

○ 交通渋滞



– 群衆運動



"Jamology"



– 公共交通での渋滞「ダンゴ運転」



– 待ち行列の拡張と発進波



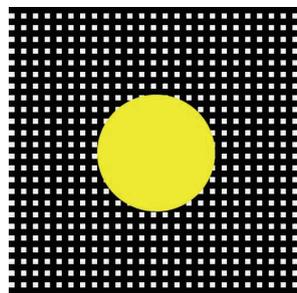
Self-introduction "Akiyasu Tomoeda"



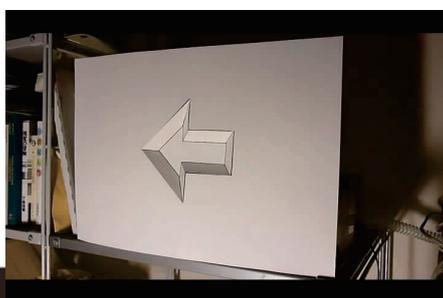
- Research Topics (2) **"Computational Illusion"**
 - 縦断勾配錯視と渋滞
 - フットステップ錯視アート



– 「矢印の幻惑」

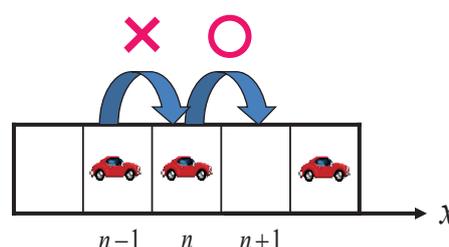


– コリジョンコース現象



講演の流れとキーワード

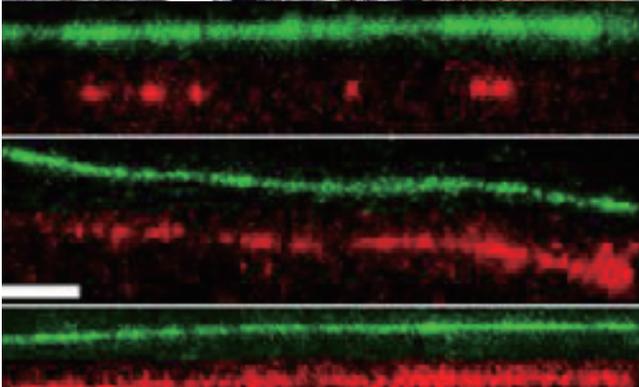
- 「渋滞学(Jamology)」とは？
 - 渋滞現象に対して数理モデルを用いて説明し、渋滞制御までを実践する学問
- 高速道路の流れ－交通流現象－
 - どのような車の流れが「渋滞」なのか？
 - 自然渋滞の要因：サグ部での渋滞発生メカニズム
- 交通流現象の数理モデリング
 - 偏微分方程式による現象の記述：流体モデル
 - 常微分方程式による現象の記述：追従モデル
 - セルオートマトンによる現象の記述：CAモデル
- 渋滞解消運転術とは？
- まとめ



渋滞学とは？



様々な渋滞現象

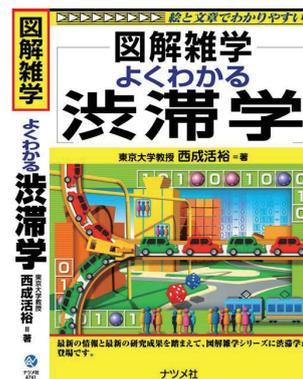


渋滞学

- “渋滞学” = 渋滞に関する学問 (Jam + ology)
- “渋滞” = 自己駆動粒子 (Self Driven Particles)
の多体相互作用による流れの滞り現象

従来の物理では扱うことが困難な粒子までを対象

- Vehicles : Car, Bus, Train, Airplane, ...
- Pedestrians : Evacuation, Queue, ...
- Logistics : Transportation problem, Production line, ...
- Swarm, Animals : Ants, Bird, Fish, ...
- Jams in human body : Blood, Kinesin, Ribosome, ...
- Camphor boats
- Internet packet transportation
- Infectious disease, Forest fire, Economic, ...



渋滞現象の数理に関する参考文献

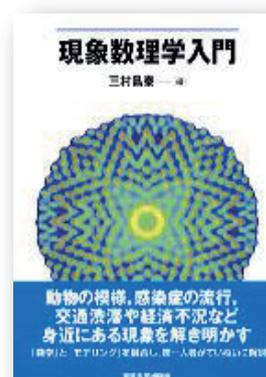
- 「現象数理学入門」 東京大学出版会 (2013年9月28日)

【内容紹介】

動物の模様, 感染症の流行, 交通渋滞や経済不況など, 私たちの身のまわりにあるさまざまな現象を数理的に解明する方法とは? それぞれの分野の第一人者が, 「シミュレーション」「数値解析」「モデリング」の3つの視点から初心者向けにわかりやすく解説。

第三章: 友枝明保・西成活裕「渋滞学入門」

値段: 3,360円



“渋滞”の定義とは？

数理科学における定義

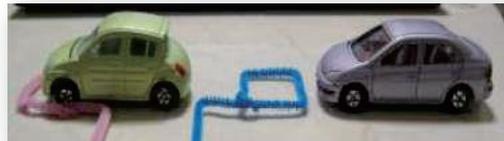


交通流の測定 一日本道路公団

■ 測定方法

– 観測装置

- » 2kmごと, 車線ごとに設置
- » 5分間平均データを記録



2つのループコイル: 7m間隔

– 観測装置は2つのループコイルからなる

- » 7m間隔で道路下に埋め込み
- » 通過時のパルスから車両台数を計測
- » 2つのコイルを通過した時間差から車両の平均速度を計算

■ 測定データ

- 交通流量 Q (台/5min): 5分間に通過する総台数
- 平均速度 \bar{v} (km/5min): 5分間の各車の速度平均

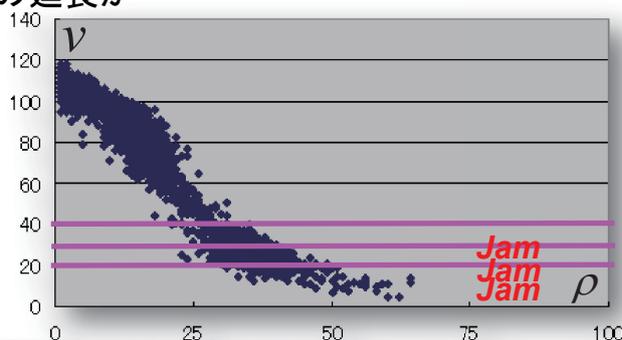
$Q = \rho \bar{v}$ の関係より、密度(台/km)を算出

渋滞の定義 —測定から—

■ 渋滞: 平均速度がある一定速度以下になった場合

- 首都高速道路株式会社
 - » 時速20km以下のとき
- 阪神高速道路株式会社
 - » 時速30km以下のとき
- 日本高速道路株式会社
 - » 時速40km以下で1kmの車列の延長が15分以上継続したとき
- 一般道路
 - » 時速10km以下

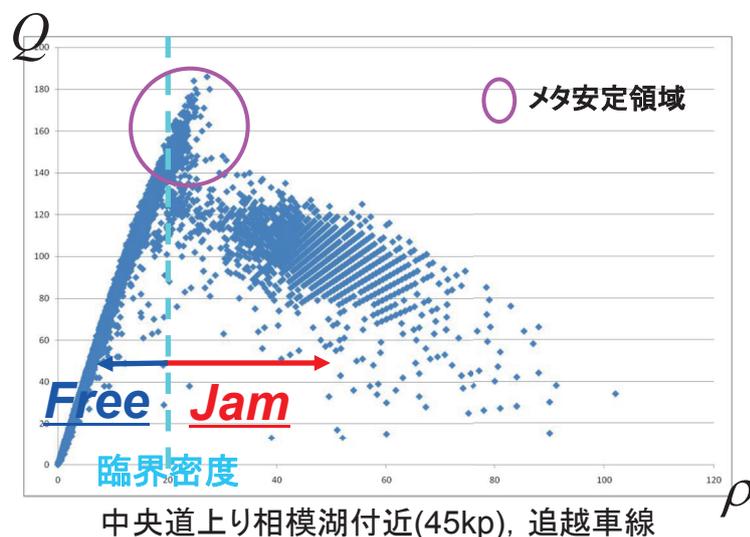
科学的な定義は？



基本図(流量と密度の関係)

■ 交通流のユニバーサルな特徴を記述する図

- 縦軸に流量(Q), 横軸に密度(ρ) ($Q = \rho v$)
- 各点が各時刻(五分平均)の密度流量関係に相当



■ 自由走行相

» 時速 約80km

■ 渋滞相

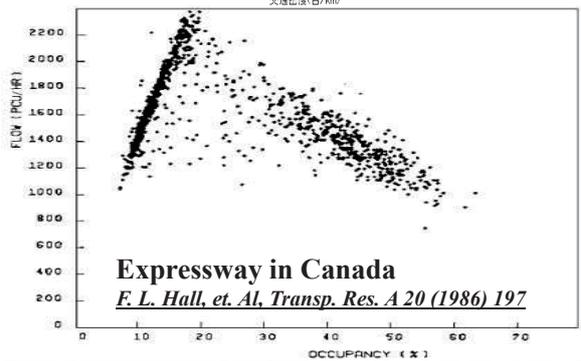
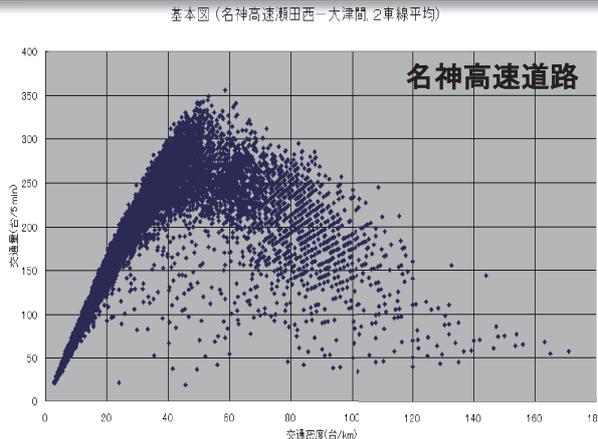
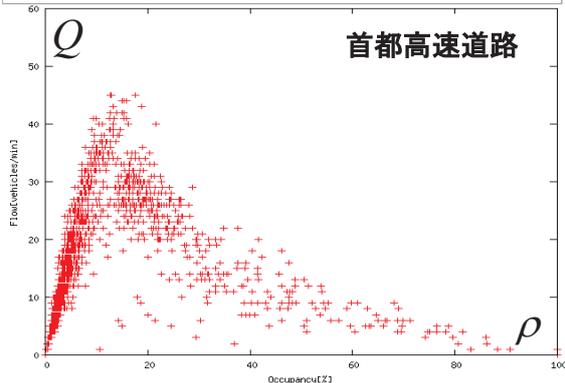
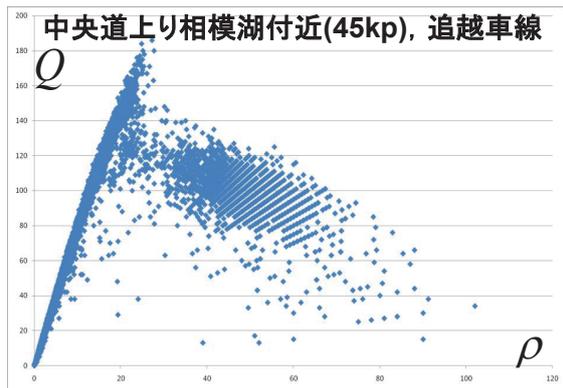
» 時速 約-20km

■ メタ安定領域 (相転移部)

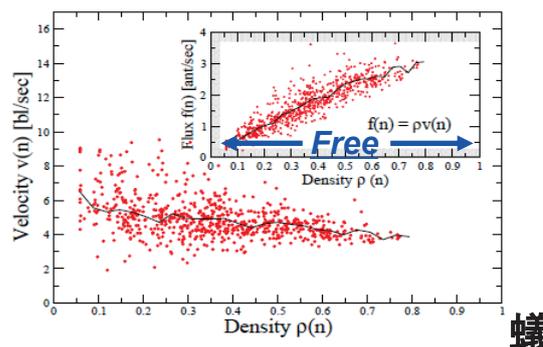
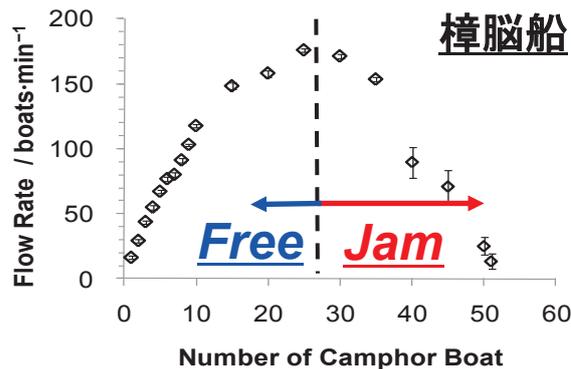
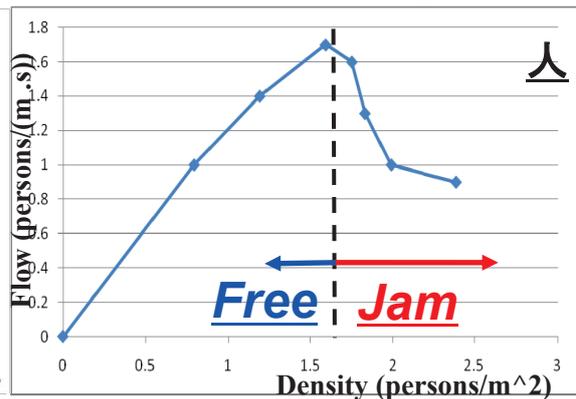
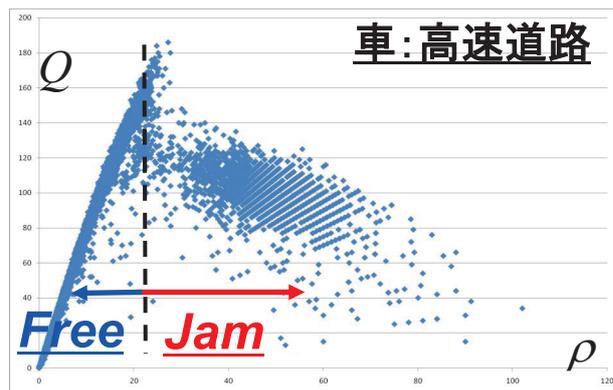
» ドライバーが頑張っている状態
(数分程度の寿命)

» 一様流不安定性

実測データの例



様々な渋滞現象の基本図

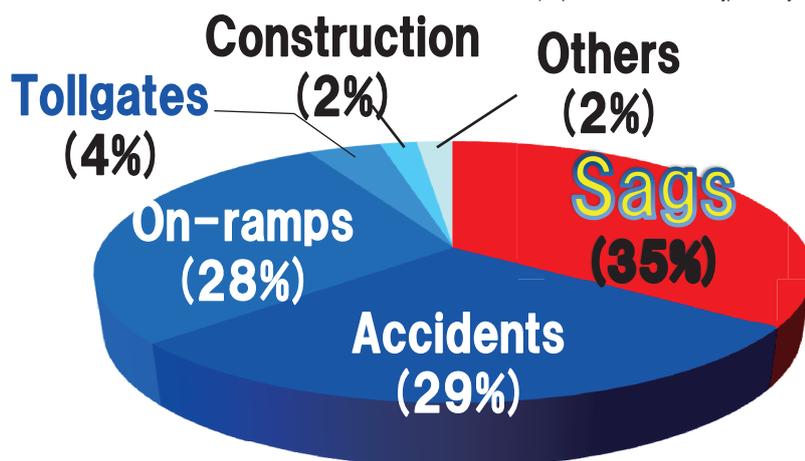


高速道路の渋滞 自然渋滞とは？



高速道路での渋滞原因

NEXCO東日本 (<http://www.e-nexco.co.jp/activity/maint/congestion/mechanism.html>)



- **サグ部**での渋滞が最も多い。
- 10年前の最も大きな原因：**料金所**
→ **ETC**の導入により減少[†]
(**E**lectronic **T**oll **C**ollection System)



[†] ETC利用者は2007年11月現在、累計2000万台以上(全国平均で70%以上) (Wikipedia)

サグ部での渋滞発生メカニズム

■ サグ(sag) = ドライバーが気がつかない程度の上り坂



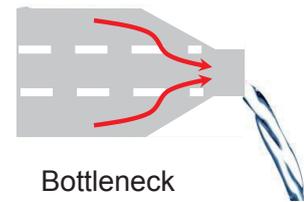
1. サグ部では, 車の速度が自然と落ちる.
2. 後続車は追突を避けるためブレーキをちょっと踏む.
3. ブレーキが増幅して後方へ伝播. (一様流不安定性)
4. 数十台後ろでは完全に止まってしまう. (衝撃波形成)

この現象はある車間距離以下(臨界密度)になると起こる.

自然渋滞 (Phantom Jam)

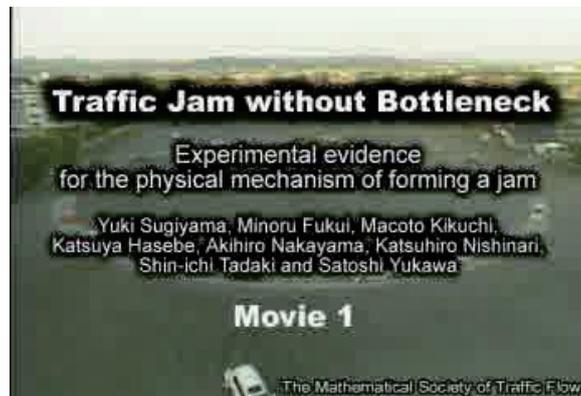
■ 自然渋滞 (Phantom Jam)

= ボトルネックの無いところで起こる渋滞



■ 円周走行による再現実験 (2003)

Y. Sugiyama, et. al., New Journal of Physics 10, 033001 (2008).



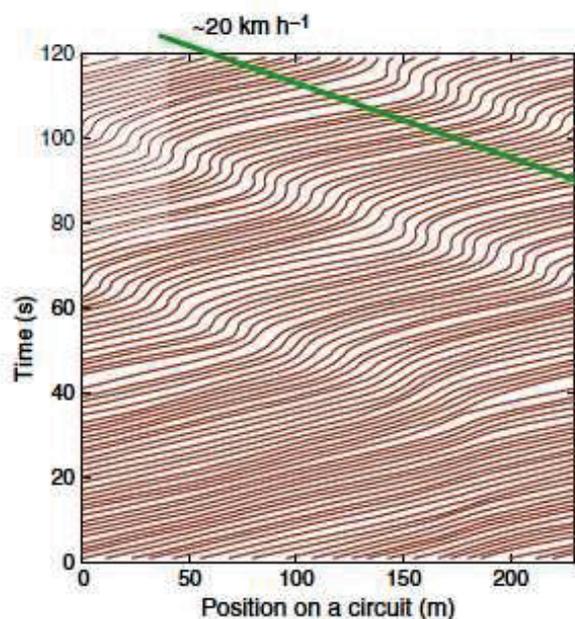
• 実験条件

半径36m(1周230m), 車23台, 最高速度30km/h

実測による渋滞クラスタの伝播速度

■ 円周走行による再現実験 (2003)

Y. Sugiyama, et. al., New Journal of Physics 10, 033001 (2008).



- ボトルネックの存在
→ 渋滞形成の本質ではない
- 本質は？
→ 速度擾乱が後方に
増幅伝播するかどうか
(= 臨界密度)
- 渋滞流は車の進行方向と逆に上流へ伝播し、速度はほぼ一定で 20km/h[†]

†「交通工学通論」(越 編著, 技術書院, 1989)

トンネル入り口で生じる速度揺らぎ



トンネル内でのライト点灯

→ ブレーキランプと勘違い＝無駄な減速からの速度ゆらぎ発生

縦断勾配錯視の例(屋島ドライブウェイ, 上り)

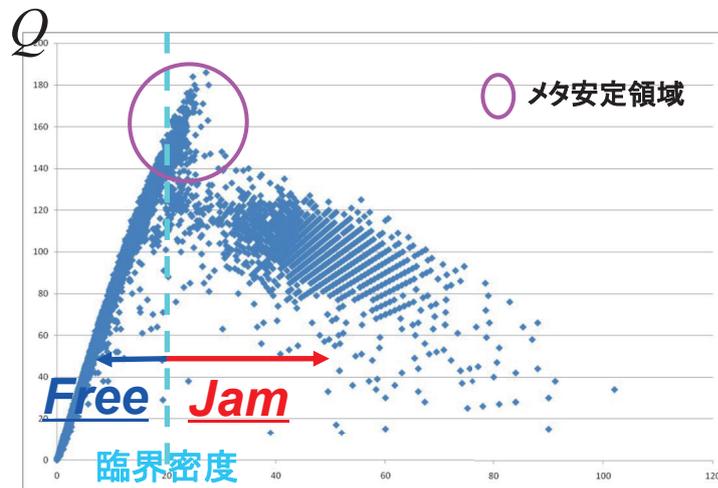


交通流現象の 数理モデリング

数理モデル化

■ 交通流の本質的特徴を捉えた数理モデル

= 基本図を再現する数理モデル



中央道上り相模湖付近(45kp), 追越車線

■ 自由走行相

» 時速 約80km

■ 渋滞相

» 時速 約-20km

■ メタ安定領域 (相転移部)

» ドライバーが頑張って
運転している状態
(数分程度の寿命)

» 一様流不安定性

交通流を記述する数理モデル

■ Several approaches based on Particles, Time and Space

- Fluid Dynamical Model

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \dots, \frac{\partial v}{\partial t} = \dots$$

- Car-Following Model

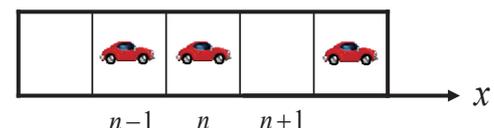
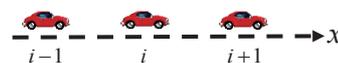
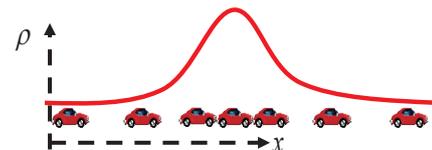
$$\frac{dx_i}{dt} = V(\Delta x_i) \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = a \left(V(\Delta x_i) - \frac{dx_i}{dt} \right)$$

- Cellular Automaton Model

`if (cell[n+1].car == true) {cell[n].vel = 0;}`

`else {cell[n].vel = 1;}`

...



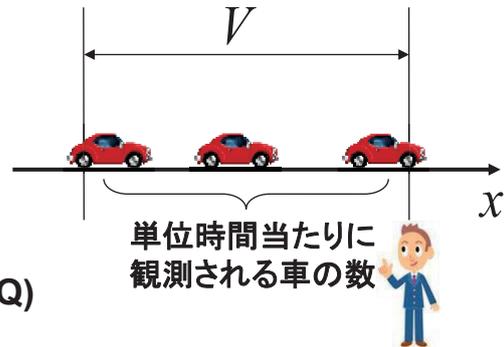
Model	Particle	Time	Space
Fluid Dynamical Model	Continuous (Macroscopic)	Continuous	Continuous
Car-Following Model	Discrete (Microscopic)	Discrete	Discrete
Cellular Automaton Model			

流量の基本関係式

■ (流量) = (密度) × (速度)

$$Q = \rho v$$

単位時間当たり通過する車の台数(Q)
は $\rho \times V$ 台.



Q 台/sec, 台/h : 目の前を単位時間に通過する台数

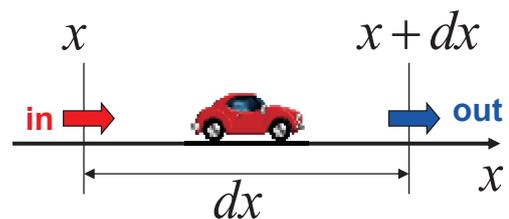
ρ 台/m, 台/km : 単位距離当りに存在する車の台数

V m/sec, km/h : 単位時間当りで動く距離

車の「流れ」を表す方程式

■ 車の台数の保存則

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \underbrace{+Q(x)}_{\text{In}} - \underbrace{Q(x+dx)}_{\text{Out}} \\ &= Q(x) - \left(Q(x) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) \\ &= -\frac{\partial Q}{\partial x} dx \end{aligned}$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

■ 車の流量 $Q(x)$ を決定するための仮定

- 「流量は密度の関数である」(Kinematic Wave の仮定)

$$Q(x) = \rho(x) V_{opt}(\rho(x))$$

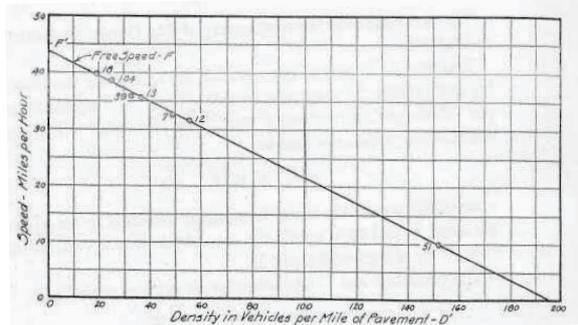
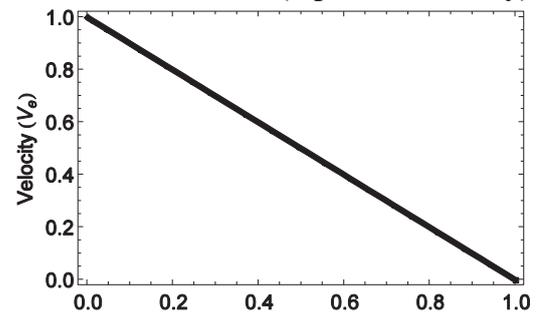
速度密度関係式 $V_{opt}(\rho)$

■ Greenshieldの観測結果

$$V_{opt}(\rho) = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right)$$



最適速度関数 (Optimal Velocity)



B. D. Greenshields, *Proceedings of the Highway Research Board*, Washington D.C., 14 (1935), 448.

流体モデル (Kinematic Wave Theory)

■ 車の密度に関する方程式

– Viscous Burgers Equation (LWR Model)

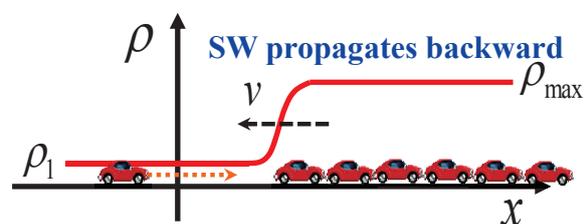
G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley and Sons, New York, 1974)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_0 \left(1 - 2 \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

Density: $\rho(x, t)$

衝撃波解：渋滞の最後尾

$$\rho = c_1 \frac{\rho_{max} D}{V_0} \tanh \left[c_1 \left(x - V_0 \left(1 - \frac{2c_2}{\rho_{max}} \right) t \right) \right] + c_2$$



流体モデル (Dynamical Wave Theory)

■ 保存則と車の集団の運動方程式

- Conservation law of vehicles

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0$$

H. J. Payne, in *Mathematical Models of Public Systems*, 51 (1971).
B. S. Kerner and P. Konhäuser, *Phys. Rev. E* 48, R2335 (1993).
A. Tomoeda, et al., *JSIAM Letters*, 1, 72 (2009).

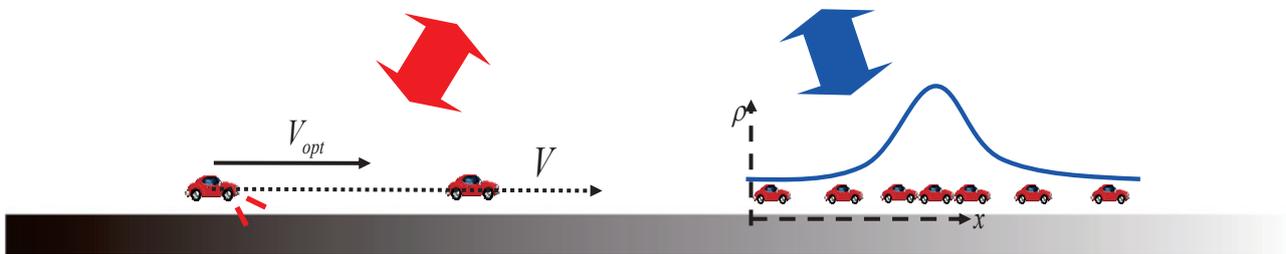
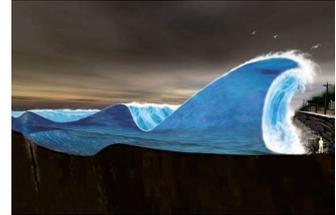
Density: $\rho(x, t)$

- Motion of vehicles

Velocity: $V(x, t)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V_{opt}(\rho) - V) - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

relaxation term anticipation term



追従モデル (Car-following model)

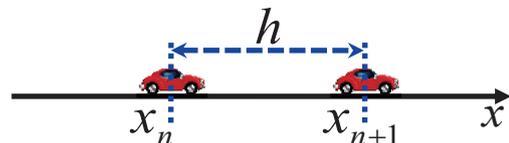
■ 車の個々の追従挙動を表現したミクロモデル

「前方の粒子の挙動のみを見て、自らの運動を制御する。」

- **Newell Model** *G.F. Newell, Oper. Res., 9 (1961) p.209*

» 前方車との車間距離によって速度を調整する.

$$\frac{d}{dt} x_n(t + \tau) = V(x_{n+1} - x_n)$$



- **Optimal Velocity Model** *Bando, et al, J.Phys. I 5 (1995) p.1389*

» 前方車との車間距離で決まる最適速度によって加速度を調整する.

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{1}{\tau} \left(V(x_{n+1} - x_n) - \frac{dx_n}{dt} \right)$$

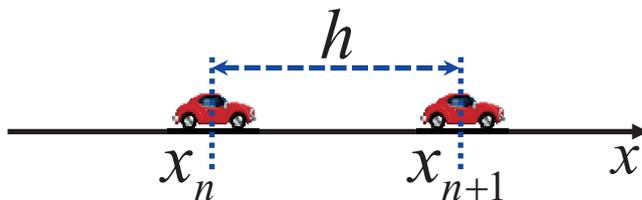
$V(h)$ 最適速度関数
 τ 反応遅れ時間

OVモデルの安定性解析

■ Optimal Velocity model

Bando, et al, J.Phys. I 5 (1995) p.1389

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{1}{\tau} \left(V(x_{n+1} - x_n) - \frac{dx_n}{dt} \right)$$



■ 一様流不安定性条件

$$\frac{dV(k)}{dk} > \frac{a}{2} \quad a = 1/\tau$$

$V(h)$ 最適速度関数
 h 車間距離
 τ 反応遅れ時間

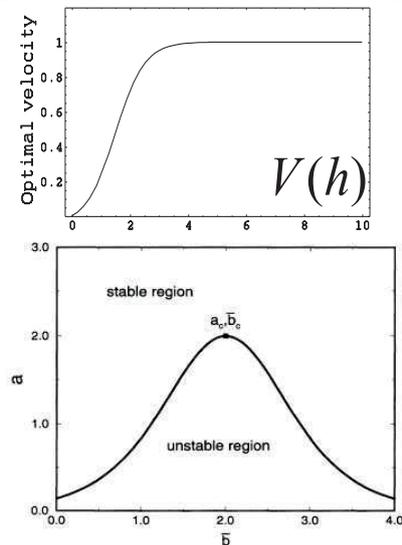


FIG. 1. Marginal stability line of uniform states in parameter space. The critical point (a_c, b_c) is marked by the filled box.

渋滞現象を記述するおもちゃモデル

■ 人や車の特徴

– 自己駆動粒子 (ニュートンの3法則が成り立たない)

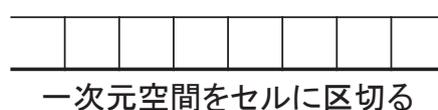
→ 微分方程式での記述が困難であり、

ルール(アルゴリズム)による記述の方が好ましい。



– 排除体積効果 (粒子運動において体積を無視できない)

→ 粒子の大きさを陽に組み込める記述の方が好ましい。



セルオートマトン (Cellular Automaton, CA)

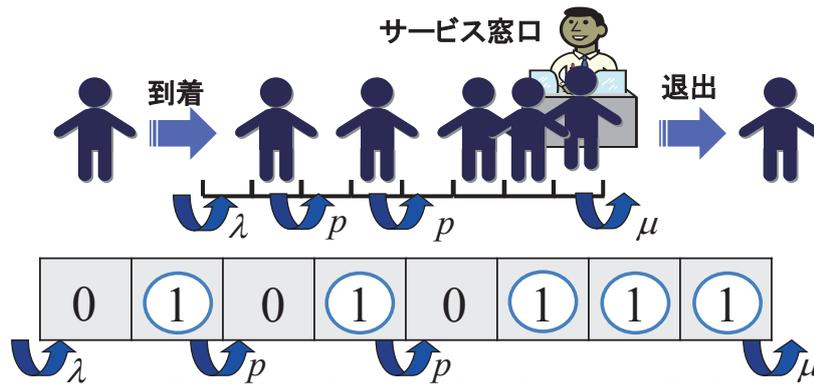
セルオートマトンとは？

■ 変数がすべて離散値

時間 : $t \in \mathbb{Z}$
 空間 : $x \in \mathbb{Z}^d$
 状態変数 : $u(x, t) \in \mathbb{Z}$

+ 更新ルール
 (update rule)

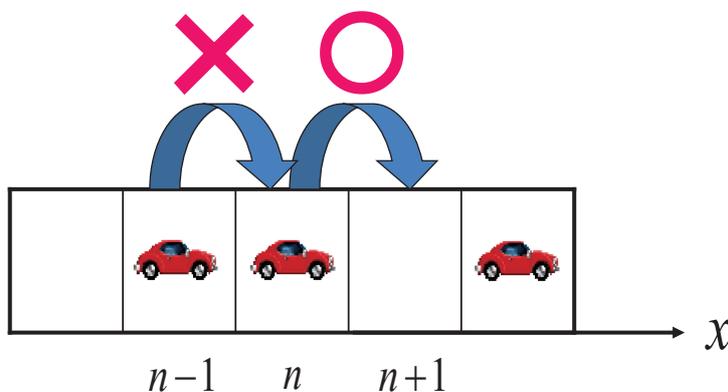
(例) 待ち行列のセルオートマトンモデル



ルール184CA[†]モデル

■ 個々の粒子に対して、ルールによる時間発展の記述

【ルール】 前方が空いていれば粒子は前へ進む



```
if (cell[n].car == true){
    cell[n-1].vel = 0;
}
else{
    cell[n-1].vel = 1;
}
...

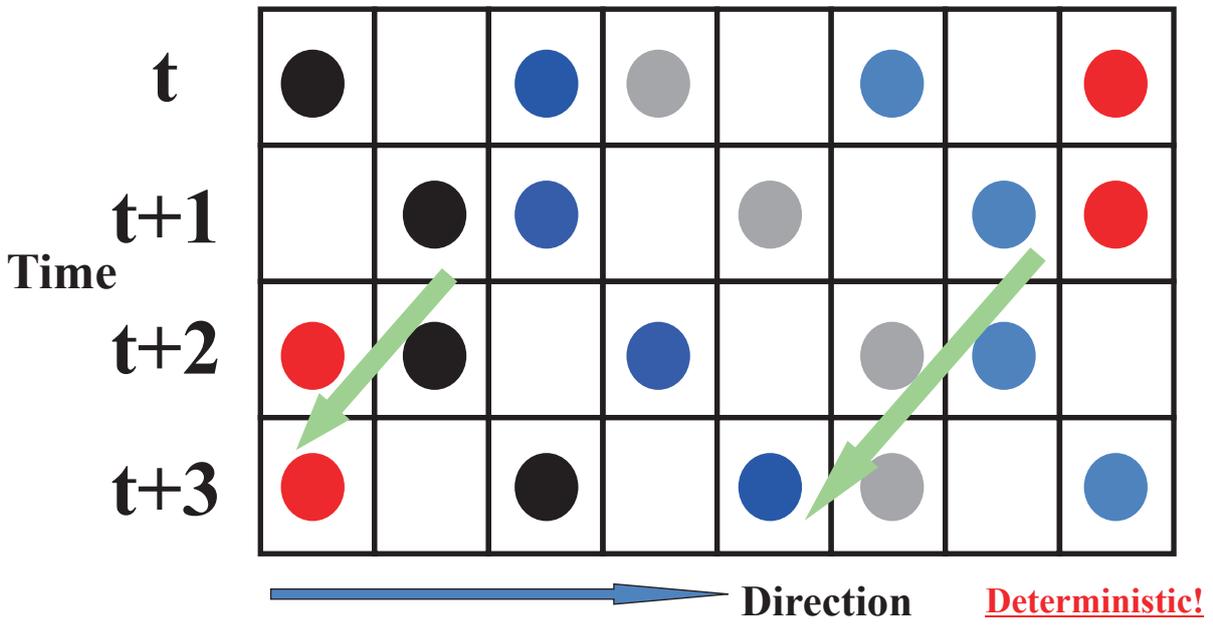
```

[example](#)

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 1 - U_j^t) - \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t)$$

ルール184CA⁺モデル

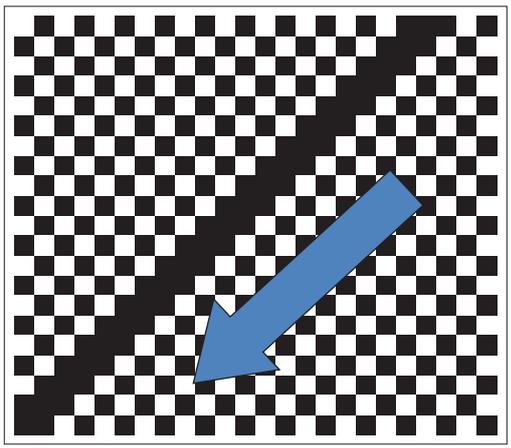
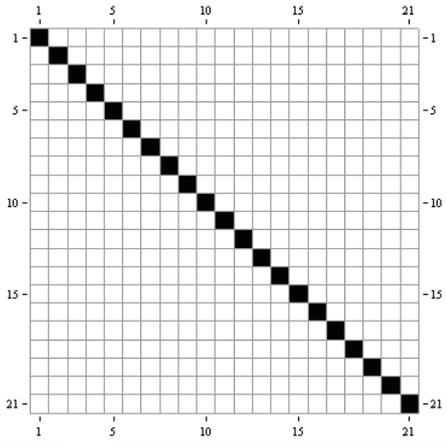
【ルール】 前方が空いていれば粒子は前へ進む



周期境界条件, パラレルアップデートの場合

ルール184CA⁺モデル

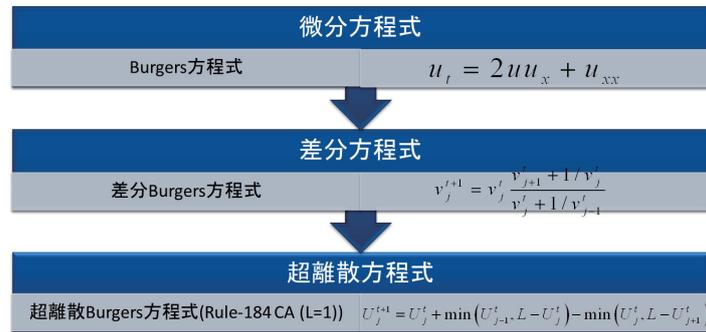
- ルール184セルオートマトンの特徴
 - “1”の数が保存されるセルオートマトンモデル (車の台数が保存!!)
 - 排除体積効果(前が詰まっていると進めない)ルール (クラスターが後方に伝播~渋滞伝播!!)



周期境界条件, パラレルアップデートの場合

超離散法(変数のデジタル化): 連続と離散をつなぐ

■ Burgers方程式からBurgersセルオートマトンへ



– 超離散公式

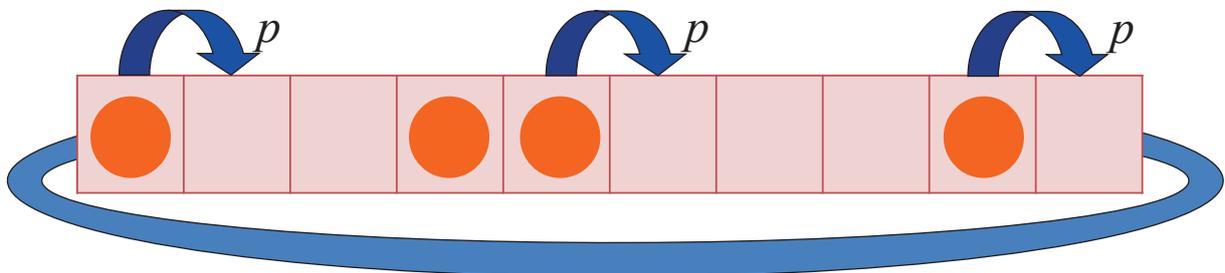
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left[\exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right) \right] = \max(A, B) (= -\min(-A, -B))$$

- BCAのL=1がRule-184CAに対応
- Burgers方程式で記述される交通流モデルも存在
- CAが, Max-plus代数を用いた離散力学系で記述できる。

確率セルオートマトン

■ ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process)

【ルール】 前方が空いていれば粒子は確率 p で前へ進む



$P=1$ でルール184CA!!

$$Q = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4P\rho(1-\rho)} \right)$$

Q : 流量
 P : 前進確率
 ρ : 密度

CAによる渋滞モデリングの参考文献

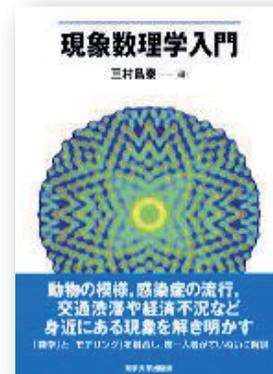
■「現象数理学入門」 東京大学出版会(2013年9月28日)

【内容紹介】

動物の模様, 感染症の流行, 交通渋滞や経済不況など, 私たちの身のまわりにあるさまざまな現象を数理的に解明する方法とは? それぞれの分野の第一人者が, 「シミュレーション」「数値解析」「モデリング」の3つの視点から初心者向けにわかりやすく解説.

第三章: 友枝明保・西成活裕「渋滞学入門」

値段: 3,360円



渋滞解消に向けて

Q. どうすれば“渋滞”を解消できるのか？



Answer (Concept in 1d case) : “*Slow-in Fast-out*”



- “*Slow-in*”
 - The action to avoid being captured by a jam and remove it by decelerating and taking a longer headway in advance.
- “*fast-out*”
 - The action to follow the car in front without unnecessary time gaps by accelerating quickly.

Answer (Concept in 1d case) : "Slow-in Fast-out"



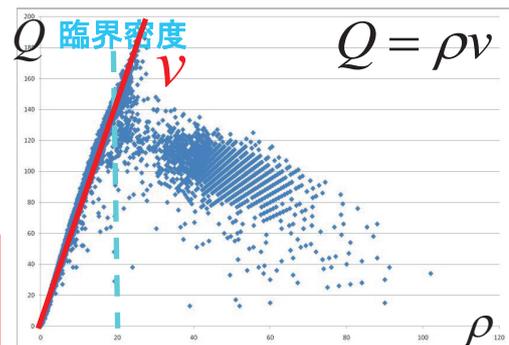
- "Slow-in"
 - The action to avoid being captured by a jam and remove it by decelerating and taking a longer headway in advance.
- "fast-out"
 - The action to follow the car in front without unnecessary time gaps by accelerating quickly.

渋滞吸収運転術

- 臨界密度は 20~25 台/km
 - この密度までは free flow

25台/km = 40m 車間

- 渋滞させないための極意
 - 車間距離を40mに保って走行



[Point] 車間距離を空けることではなく、一定の速度で走ること
(そのために車間を空ける.)

前から来たブレーキ連鎖を吸収し、
後続車にブレーキを踏ませない!!

まとめ

■ 「渋滞学(Jamology)」とは？

- 渋滞: 自己駆動粒子の集団運動に見られる流れの滞り現象
- 渋滞学: 渋滞現象を数理モデルを通じて解明し, 実践までを目指す学問.

■ 「渋滞」の数理科学としての定義

- 基本図による定義

■ 自然渋滞の発生メカニズム

- メタ安定領域と一様流不安定性

■ 交通流現象の数理モデリング

- 流体モデル, 追従モデル, CAモデル

■ 渋滞解消に向けて

- **渋滞解消運転術**: 「40m車間×70km/h」

Acknowledgements

- 明治大学先端数理科学インスティテュート
(所長: 三村昌泰)



- JST戦略的創造研究推進事業(CREST)
「計算錯覚学の構築」
(研究代表者: 杉原厚吉)



- 東京大学先端科学技術研究センター(RCAST)
西成研究室(西成活裕)



Thank you for your attention.

Motion of a Vortex Filament in an External Flow

相木雅次（慶應義塾大学/東京工業大学）

Abstract

本報告では、非圧縮非粘性流体中の渦糸の運動を表すモデル方程式である Localized Induction Equation (LIE) を扱う。特に、渦糸自身が励起する速度場とは別に外部流もある状況を考え、渦糸が閉じている場合、つまり渦輪の運動を表す問題に対して得られた結果について紹介する。

1 背景

流体の運動に関する研究において「渦」は、中心的なトピックの一つとして盛んに調べられてきた。その起源は、1858年の Helmholtz[1] の論文までさかのぼり、この論文で「渦度」や「渦線」などの渦に関する基本的な概念の定式化が行われた。ここで、渦度 ω は、流体の速度場 \boldsymbol{v} に対して $\omega = \nabla \times \boldsymbol{v}$ で定義されるベクトルで、流体がどの程度渦巻いているかを表すものである。これまでに渦にまつわる様々な現象が観測、研究されてきたが、その一つとして渦輪が挙げられる。

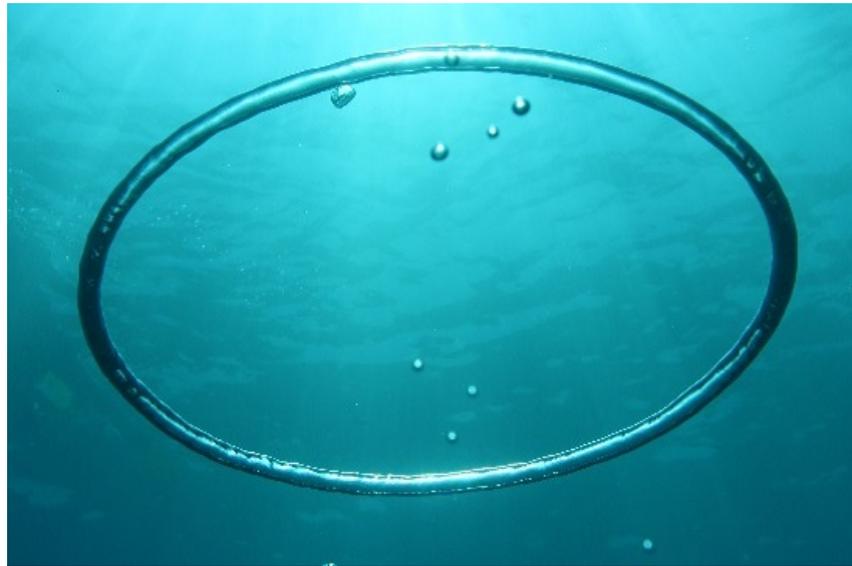


Figure 1: 水中の渦輪

一般的に、トーラスの内部に渦度が集中して分布し、トーラスの外では渦度がゼロであるようなものを渦輪と呼ぶ。上の図は、水中にできた渦輪でバブルリングと呼ばれるものである。この他にも渦輪の例は身の回りに数多く存在し、例えばたばこの煙で作った輪などが挙げられる。トーラスの内部の渦度分布は理論上任意の分布を考えることができるが、解析の難しさや現実の現象との対応を考慮して多くの場合、軸対称性などの性質を仮定して研究されている。このような仮定の下で、渦輪が十分に細いときは、渦輪の運動を閉じた渦糸の運動として近似することが考えられる。流体の渦度が空間曲線上に集中して分布したものを渦糸と呼ぶ。渦輪の閉じた渦糸による近似とは渦輪の太さをゼロにし、渦に関する情報を中心軸上に集約することに相当する。渦糸においては曲線上の各点でその点における渦度が曲線の接線方向を向いていて、曲線上以外の点では、渦度がゼロになっている。

2 渦糸の運動の数学解析

渦糸の運動も古くから研究されており，運動を表すモデル方程式として 1906 年に Da Rios[2] によって Localized Induction Equation (LIE) が提唱された．LIE は，

$$(1) \quad \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss}$$

で与えられる非線形偏微分方程式である．ここで $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^1(s, t), \mathbf{X}^2(s, t), \mathbf{X}^3(s, t))$ は，時刻 t において弧長パラメーター s でパラメーター付された渦糸の位置ベクトル， \times は，3次元ユークリッド空間における外積，下付き添え字は各変数に関する偏微分を表す．LIE に対しては，初期値問題や初期値-境界値問題の可解性に関する結果が得られている．西山-谷 [3] は，ソボレフ空間における初期値問題の時間大域的可解性を証明した．小磯 [4, 5] は，幾何学的に一般化された問題設定で，橋本変換と呼ばれる未知関数の変換を (1) に適用して得られる非線形 Schrödinger 方程式に対する初期値問題の可解性を証明した．最近では，Banica and Vega[6, 7] や Gutiérrez, Rivas, and Vega[8] らによって有限時間で角を形成する (1) の自己相似解の解析が行われた．また，講演者ら [9] によって (1) に対する初期値-境界値問題の可解性が示された．

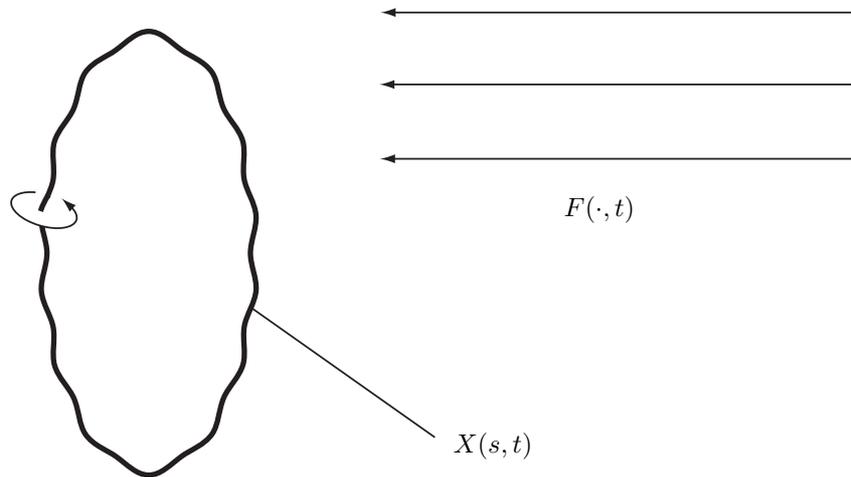
式 (1) は，外部流 \mathbf{F} がある場合に

$$(2) \quad \mathbf{X}_t = \frac{\mathbf{X}_\xi \times \mathbf{X}_{\xi\xi}}{|\mathbf{X}_\xi|^3} + \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$$

へと自然に拡張される．ここで，(1) と違い，(2) にしたがって運動する渦糸は，外部流の影響で一般には伸び縮みする．したがって曲線の弧長パラメーターは運動の過程で保存されないので渦糸のパラメーター付を ξ とした．渦糸の伸び縮みの影響が LIE に対して $|\mathbf{X}_\xi|^{-3}$ という形で表れている．方程式 (2) に対しては，西山 [10] によって閉じた渦糸の運動に対して弱解の存在が示されているが，滑らかな解の存在や解の一意性は知られていなかった．

3 問題設定・主結果

本報告では，以下の図で与えられる状況を表す初期値問題を扱う．



つまり，閉じた渦糸自身が励起する速度場の影響で変形・運動をし，さらに外部流に流されているような状況を考える．このような運動を方程式 (2) に対する初期値問題として以下の定式化をする．

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{X}_t = \frac{\mathbf{X}_\xi \times \mathbf{X}_{\xi\xi}}{|\mathbf{X}_\xi|^3} + \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), & \xi \in \mathbf{T} \quad (:= \mathbf{R}/\mathbf{Z}), \quad t > 0, \\ \mathbf{X}(\xi, 0) = \mathbf{X}_0(\xi), & \xi \in \mathbf{T}. \end{cases}$$

上記問題 (3) に対して得られた滑らかな解の一意存在について紹介する．具体的には，以下の定理を得た．

定理 3.1 自然数 $m \geq 4$ と $T > 0$ に対して, 初期値 \mathbf{X}_0 が $\mathbf{X}_0 \in H^m(\mathbf{T})$ と $|\mathbf{X}_{0\xi}| \equiv 1$ を満たし, 外部流 \mathbf{F} が $\mathbf{F} \in C([0, T]; W^{m, \infty}(\mathbf{R}^3))$ を満たすならば, ある $T_0 \in (0, T]$ が存在して

$$\mathbf{X} \in C([0, T_0]; H^m(\mathbf{T})) \cap C^1([0, T_0]; H^{m-2}(\mathbf{T}))$$

なる (3) の解が一意に存在する.

この定理を証明する上では, 解の高階評価をどのように導出するかが一番のキーポイントになるので, 解の高階のエネルギー評価の導出方法に焦点を絞って報告する.

4 解のエネルギー評価

LIE の解析における常套手段として, まず未知変数を接ベクトル $\mathbf{v} := \mathbf{X}_\xi$ に変える. 式 (2) を ξ に関して微分すると

$$(4) \quad \mathbf{v}_t = f\mathbf{v} \times \mathbf{v}_{\xi\xi} + f_\xi \mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi + (\mathbf{D}\mathbf{F})\mathbf{v}$$

を得る. ここで, 記号を省略するために $f = \frac{1}{|\mathbf{v}|^3}$ と置き, $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ の変数を省略した. 高階のエネルギー評価, 特に解の H^m における評価を導出するために $k \geq 3$ に対して式 (4) を ξ に関して k 回微分し, $\mathbf{v}^k := \partial_\xi^k \mathbf{v}$ と置くと

$$\mathbf{v}_t^k \sim f\mathbf{v} \times \mathbf{v}_{\xi\xi}^k + (k+1)f\mathbf{v}_\xi \times \mathbf{v}_\xi^k + kf_\xi \mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi^k$$

を得る. ここで, エネルギー法によって \mathbf{v}^k の L^2 評価を導出する上では \mathbf{v} の k 階以下の導関数のみを含む項は, 評価の邪魔にはならないため, 省略した. このような低階項を除いて等しいことを今後上のように \sim で表すことにする. 以後は, \mathbf{v}^k の微分を含む項から起こる regularity loss をどのように回避するかが焦点になる.

Loss を回避するために \mathbf{v}^k を \mathbf{v} 成分とその直交成分に分解する. 具体的には,

$$(5) \quad \mathbf{v}^k = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^k)}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}^k)$$

と分解する. 各成分の主要部を新たな変数

$$h^k := \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^k,$$

$$\mathbf{z}^k := \mathbf{v} \times \mathbf{v}^k$$

とする. h^k と \mathbf{z}^k それぞれが満たす方程式を導出し, L^2 におけるエネルギー評価を導出する. h^k と \mathbf{z}^k の評価が得られれば, (5) から \mathbf{v} , 転じて \mathbf{X} の評価が得られる.

4.1 h^k の評価

式 (4) と \mathbf{v} の内積を取ると

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_t = \mathbf{v} \cdot ((\mathbf{D}\mathbf{F})\mathbf{v})$$

を得る. 上の式を ξ に関して k 回微分し, 低階項を除くと

$$[h^k + k(\mathbf{v}_\xi \cdot \partial_\xi^{k-1} \mathbf{v})]_t \sim 0$$

であることがわかる. h^k に対して $\mathbf{v}_\xi \cdot \partial_\xi^{k-1} \mathbf{v}$ は低階なので, 上の式から h^k にこの低階の補正項を加えた量をエネルギーとすれば L^2 におけるエネルギー評価を得られる.

4.2 z^k の評価

$z^k = \mathbf{v} \times \mathbf{v}^k$ の t 微分を直接計算すると

$$(6) \quad z_t^k \sim f\mathbf{v} \times z_{\xi\xi\xi}^k + (k-2)f\mathbf{v} \times (\mathbf{v}_\xi \times \mathbf{v}_\xi^k) + (k+1)f_\xi\mathbf{v} \times z_\xi^k$$

を得る. 以下, z^k の評価を導出するために未知変数の変換を繰り返し, 評価を導出できるエネルギーの形を模索する. まず, 右辺第二項を h^k と z^k で閉じた形に変形する. 外積を展開することによって

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\mathbf{v}_\xi \times \mathbf{v}_\xi^k) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi^k)\mathbf{v}_\xi - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)\mathbf{v}_\xi^k \\ &\sim h_\xi^k\mathbf{v}_\xi - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)\mathbf{v}_\xi^k \end{aligned}$$

を得る. \mathbf{v}_ξ^k は, 低階として扱えないので \mathbf{v}_ξ^k に展開 (5) を行い,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\xi^k &= \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi^k)}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi^k) \\ &\sim \frac{h_\xi^k}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \times z_\xi^k \end{aligned}$$

と変形し, 最終的に

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\mathbf{v}_\xi \times \mathbf{v}_\xi^k) &\sim h_\xi^k \left(\mathbf{v}_\xi - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \right) + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \times z_\xi^k \\ &= -\frac{h_\xi^k}{|\mathbf{v}|^2}[\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi)] + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \times z_\xi^k \end{aligned}$$

を得る. これを (6) に代入し

$$(7) \quad \begin{aligned} z_t^k &\sim f\mathbf{v} \times z_{\xi\xi\xi}^k - (k-2)f\frac{h_\xi^k}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi) \\ &\quad + \left\{ (k-2)f\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2} + (k+1)f_\xi \right\} \mathbf{v} \times z_\xi^k \\ &= f\mathbf{v} \times \left\{ z_{\xi\xi\xi}^k - (k-2)\frac{h_\xi^k}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi \right\} \\ &\quad + \left\{ (k-2)f\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2} + (k+1)f_\xi \right\} \mathbf{v} \times z_\xi^k \end{aligned}$$

を得る. さらに, h^k の定義より

$$\begin{aligned} h_\xi^k\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi &= (\mathbf{v} \cdot \partial_\xi^k\mathbf{v})_\xi\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi \\ &\sim \{(\mathbf{v} \cdot \partial_\xi^k\mathbf{v})\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi\}_\xi \\ &\sim \{(\mathbf{v} \cdot \partial_\xi^{k-1}\mathbf{v})\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi\}_{\xi\xi} \end{aligned}$$

となり,

$$z_{\xi\xi\xi}^k - (k-2)\frac{h_\xi^k}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi \sim \left\{ z^k - \frac{(k-2)}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v} \cdot \partial_\xi^{k-1}\mathbf{v})\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi \right\}_{\xi\xi}$$

が得られるので, $\mathbf{u}^k := \mathbf{z}^k - \frac{(k-2)}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v} \cdot \partial_\xi^{k-1} \mathbf{v})\mathbf{v} \times \mathbf{v}_\xi$ と置き, $\mathbf{u}^k \sim \mathbf{z}^k$ に注意して (7) を \mathbf{u}^k について書き換えると

$$(8) \quad \mathbf{u}_t^k \sim f\mathbf{v} \times \mathbf{u}_{\xi\xi}^k + \left\{ (k-2)f \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2} + (k+1)f_\xi \right\} \mathbf{v} \times \mathbf{u}_\xi^k$$

となる. さらに関数 $a = a(\xi, t)$ を用いて $\mathbf{u}^k = a\mathbf{w}^k$ の形で変換をし, a を適切に選ぶことで $\mathbf{v} \times \mathbf{u}_\xi^k$ の項を消去することを考える. $\mathbf{u}^k = a\mathbf{w}^k$ を (8) に代入すると

$$\begin{aligned} a_t \mathbf{w}^k + a \mathbf{w}_t^k &\sim a f \mathbf{v} \times \mathbf{w}_{\xi\xi}^k + 2a_\xi f \mathbf{v} \times \mathbf{w}_\xi^k \\ &\quad + a \left\{ (k-2)f \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2} + (k+1)f_\xi \right\} \mathbf{v} \times \mathbf{w}_\xi^k \end{aligned}$$

となるので $\mathbf{v} \times \mathbf{w}_\xi^k$ の係数を取り出し,

$$2a_\xi f + a \left\{ (k-2)f \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi)}{|\mathbf{v}|^2} + (k+1)f_\xi \right\} = 0$$

が成り立つように a を選びたい. 両辺を $2af$ で割ると a が満たすべき関係は

$$(\log a)_\xi = - \left\{ \frac{(k-2)}{4} (\log |\mathbf{v}|^2)_\xi + \frac{(k+1)}{2} (\log f)_\xi \right\}$$

と変形され, ξ に関して積分したのちに対数関数の単調性から

$$a = |\mathbf{v}|^{-\frac{(k-2)}{2}} f^{-\frac{(k+1)}{2}} = |\mathbf{v}|^{-\frac{2k+7}{6}}$$

と定義すればよいことがわかる. この a は低階であるので $\mathbf{w}^k \sim \mathbf{u}^k$ となり,

$$\mathbf{w}_t^k \sim f\mathbf{v} \times \mathbf{w}_{\xi\xi}^k$$

が得られる. 最後に $\mathbf{q}^k := \mathbf{w}_\xi^k$ と定めると

$$\mathbf{q}_t^k \sim (f\mathbf{v} \times \mathbf{q}_\xi^k)_\xi$$

となるので部分積分より

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{q}^k\|^2 = (\mathbf{q}^k, (f\mathbf{v} \times \mathbf{q}_\xi^k)_\xi) + (\mathbf{q}^k, \mathbf{G}^k) = (\mathbf{q}^k, \mathbf{G}^k) \leq C \|\mathbf{q}\|^{n(k)}$$

を得る. ただし, 低階項を総称して \mathbf{G}^k と置き, $L^2(\mathbf{T})$ における内積を (\cdot, \cdot) と表し, $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$ とした. 最右辺の $n(k)$ は k に依存する自然数で, 一般には $n(k) > 2$ である. なぜなら今までは, 微分の階数のみに着目していたため, \mathbf{G}^k の中には, h^k や \mathbf{q}^k の 2 次以上の非線形項が含まれるからである. したがって上の不等式から得られる Gronwall 型の解のエネルギー評価は時間局所的な評価となる. また, 現時点では, 時間大域的な評価の導出には至っていない.

これまでに \mathbf{z}^k に行った変数変換は全て低階項の四則演算によって与えたので \mathbf{q}^k の評価から \mathbf{z}^k の評価が導出でき, h^k の評価と合わせると元の変数である \mathbf{X} の評価へと還元することができる. こうして望みの \mathbf{X} に対する高階のエネルギー評価が得られた. \square

References

- [1] H. von Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche der Wirbelbewegung entsprechen*, J. für die reine und angewandte Mathematik, **52** (1858), pp. 297–392.
- [2] L. S. Da Rios, *Sul Moto D'un Liquido Indefinito Con Un Filetto Vorticoso Di Forma Qualunque*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **22** (1906), No.1, pp. 117-135 (written in Italian).

- [3] T. Nishiyama and A. Tani, *Initial and Initial-Boundary Value Problems for a Vortex Filament with or without Axial Flow*, SIAM J. Math. Anal., **27** (1996), no. 4, pp. 1015–1023.
- [4] N. Koiso, *The Vortex Filament Equation and a Semilinear Schrödinger Equation in a Hermitian Symmetric Space*, Osaka J. Math., **34** (1997), No.1, pp. 199–214.
- [5] N. Koiso, *Long Time Existence for Vortex Filament Equation in a Riemannian Manifold*, Osaka J. Math., **45** (2008), No. 2, pp. 265–271.
- [6] V. Banica and L. Vega, *On the Stability of a Singular Vortex Dynamics*, Commun. Math. Phys., **286**(2009), pp. 593–627.
- [7] V. Banica and L. Vega, *Scattering for 1D cubic NLS and singular vortex dynamics*, J. Eur. Math. Soc., **14**(2012), pp. 209–253.
- [8] S. Gutiérrez, J. Rivas, and L. Vega, *Formation of Singularities and Self-Similar Vortex Motion Under the Localized Induction Approximation*, Comm. Partial Differential Equations, **28**(2003), no. 5 and 6, pp. 927–968.
- [9] M. Aiki and T. Iguchi, *Motion of a Vortex Filament in the Half-Space*, Nonlinear Anal., **75** (2012), pp. 5180–5185.
- [10] Nishiyama, *On the motion of a vortex filament in an external flow according to the localized induction approximation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **129** (1999), no. 3, pp. 617–626.

タイトル： 動脈硬化の成り立ちと合併症

著者名： 畠山金太

欧文著者名： Kinta Hatakeyama

所属： 宮崎大学医学部 病理学講座 構造機能病態学分野

Key Word : Atherosclerosis, Histopathology, Inflammation, Macrophage, Thrombus

889-1692 宮崎県宮崎市清武町木原 5200

TEL:0985-85-2810 FAX:0985-85-7614 E-mail : kpathol@fc.miyazaki-u.ac.jp

はじめに

わが国ではライフスタイルの欧米化や人口の高齢化に伴い、虚血性心血管病の発症率が年々増加してきている。虚血性心疾患と脳血管障害は死因の第2位と第3位に位置し、両者を合わせると死因の約3割を占め、第1位の悪性新生物に匹敵することからも極めて重要な疾患と位置付けられている（図1）。

動脈硬化は三つの病型に大別される。①慢性炎症を伴う粥状硬化症、②筋型動脈の中膜に石灰化をきたす中膜石灰化硬化症、③細小動脈壁の肥厚をきたす細小動脈硬化症、である（図2、3）。

心筋梗塞、脳梗塞、下肢の閉塞性動脈硬化症（ASO）などの虚血性心血管病の多くは、粥状動脈硬化巣（プラーク）を基盤に血栓が形成されて発症することが明らかとなり、アテローム血栓症と総称されている（1，2）（図4）。

今回、プラークの進展とその合併症であるアテローム血栓症の発症メカニズムについて概説する。

1 動脈硬化巣の特徴

一般的にプラークと呼ばれる病変は、斑状の盛り上がりを示し、中心に壊死組織（脂質コア）を含み、表面はコラーゲンを主成分とする線維性被膜で覆われた病変である。プラークの組織像は極めて多様で、脂質成分や線維成分の多寡により不安定プラーク（図5）や線維性プラークなどと呼ばれる。

2 プラークの進展と慢性炎症

プラーク内にはマクロファージやTリンパ球の浸潤を認め（図6）、また少

数ではあるが樹状細胞や肥満細胞も観察される。これらの細胞成分はプラークの進展との関連が示唆されており、特にマクロファージは後述するプラーク破綻に深く関与するとされている。このような炎症反応は高血圧、脂質異常症、糖尿病などの危険因子（環境因子）（図7）と遺伝因子の相互作用によって生じる個体差の大きな慢性炎症である。

3 プラークの発生・進展と危険因子：特に加齢と性差の関与について

動脈硬化の発生には、さらに重要な危険因子である年齢と性差の関与も大きく、プラークは加齢とともに進行し、したがって程度の差はあれ誰にでも起っている。

ヒトの冠動脈硬化は幼小児期よりみられるが、最初にみられる変化は細胞線維性内膜肥厚（図8A）とよばれるものである。この病変はゼロ歳代から認められるが、20-30歳代になると急激に進行する。さらに肥厚内膜に泡沫細胞が種々の程度に集簇し（図8B）、線維脂肪性プラークとよばれる病変を呈する。そして、30歳代後半では完成されたプラークが観察されるようになる（図9）。

性差も大きな因子であり、冠動脈疾患の頻度やその重症度、治療に対する反応性が異なる。冠動脈疾患の発生率は閉経前女性では同年代の男性より数倍低い（図9）、加齢とともにその差は減少し閉経後ではその差はほぼ消失する。性差の原因は性染色体の差であるがその詳細なメカニズムは不明である。狭心症患者の冠動脈プラークを病理学的に検討してみると、平滑筋細胞数、マクロファージ数、Tリンパ球数に性差はなく、コラーゲン量およびその質に性差を認め狭心症の病型とも関連していた。エストロゲンは、脂質代謝、糖代謝の改善作用、凝固・線溶系への作用を介して、あるいは血管壁細胞に存在するエストロゲン受容体へ直接的に作用して、様々な生理的機能の調節や病的状態の原因となっていると考えられる。また血管以外にも全身諸臓器に性差が存在すると考えられ、その差を理解することは診療や治療上も重要と思われる。

臓器による動脈硬化に対する感受性の差も認められ、例えば腹部大動脈と冠動脈と頸動脈を比較すると、腹部大動脈が最も硬化度が強く頸動脈が最も弱い。プラークの質にも差を認め、頭蓋内の脳動脈では線維性プラークが多いのに対して、冠動脈ではマクロファージの関与が大きい。このような臓器による動脈硬化の差を理解することは、心筋梗塞や脳梗塞の病態やその予防を考える上で重要と思われる。

4 冠動脈プラークの多様性：プラークの質を決める因子は何か？

完成された冠動脈プラークにおいては、その組織像は多様で、同じ年齢でもその程度はさまざまに大きな個体差があり、同一冠動脈枝においても部位によ

って異なる。一般的に、近位部の方が遠位部より硬化度は強く、糖尿病を合併するとよりび慢性になり石灰化を伴うことも多い。さらに高血圧・高脂血症を合併すると動脈硬化は促進される。このような特徴より、数ある危険因子の中で、どの因子が、どの程度に、どれくらいの期間にわたって、また複数の危険因子が重なり作用したか、によって結果としての硬化巣の質、程度は決定されると考えられる（図10）。

5 炎症反応とプラーク破綻

プラーク内の慢性炎症が持続するとマクロファージから種々の炎症性サイトカインやマトリックスメタロプロテアーゼなどの蛋白分解酵素が分泌され線維性被膜が菲薄化し、プラークが破綻しやすくなる。プラーク破綻の原因としてはプラーク側の要因（脂質コアの大きさ、線維性被膜の厚さ、被膜における泡沫細胞とTリンパ球の浸潤程度、プラーク内出血、新生血管の数）と外的因子（心拍動、動脈壁への張力、スパズム）の関与が重要である（1, 2）（図11）。

6 アテローム血栓症：炎症と血栓形成の関与

心筋梗塞の発症メカニズムとして冠動脈プラークの破綻とそれに引き続いて起こる血栓形成が重要である（図12）。脳梗塞に関してはアテローム血栓性脳梗塞の頻度が脳卒中の約30%を占めるまで増加している。その原因は心筋梗塞と共通の病態と考えられており発症機序には血栓性、塞栓性、血行力学性の3つが関与している。下肢の閉塞性動脈硬化症についても同様の病態が考えられているが、より末梢の微小循環系の異常も重要な因子となる。このように心筋梗塞、脳梗塞、閉塞性動脈硬化症などのアテローム血栓症においては、共通したメカニズムの一つとして炎症反応と血栓形成は重要な因子となっている。

7 プラークと血栓形成

プラーク内には凝固カスケード反応のトリガーである組織因子が過剰発現しており（3）、また血小板活性化作用の強いコラーゲンやポドプラニン発現（4）も増加し、さらに線溶活性も低下している。このようにプラーク破綻によるイベント発症においては、炎症反応の亢進とプラークの過凝固性（プラークの質の変化）は重要な因子と考えられる。一方、プラークが破綻しても心筋梗塞の発症には至らない無症候性の冠動脈血栓は剖検例の約10%に認めるが、このような血栓はプラーク進展に関与している。

8 血栓の成長とイベント発症

血栓の形成には 1) 血管壁の性状変化、2) 血流の変化、3) 血液成分の変化、

が関与している。プラーク破綻にともなう血栓形成においては、血管壁の性状変化、特に破綻したプラーク内の組織成分（組織因子など）と血液との接触が最も重要と考えられる（3）。

さらに心血管イベント発症には血栓の増大も重要なプロセスとなる。血栓の増大は、血小板の活性化、マイクロパーティクル、プロスタサイクリン、PAI-1（Plasminogen Activator Inhibitor-1）、一酸化窒素、CD39などの凝固線溶系のバランスや血流（末梢塞栓やシェアストレスによる血流異常）などにより制御されている。このような血栓の成長プロセスに関与する多くの因子は炎症性サイトカインによる調節を受けている（図13）。

おわりに

動脈硬化の発生から心血管イベント発症にいたるプロセスにおいては、分子間、細胞間あるいは臓器間の連関が病態の進行に重要である。そして基盤病態としての慢性炎症と凝固線溶・血小板の関連性とその制御機構の解明は新規治療法の開発に寄与すると考えられる。

（引用文献）

- (1) Hansson GK: Inflammation, atherosclerosis, and coronary artery disease. *N Engl J Med* 2005;352:1685-95.
- (2) Falk E, et al : Update on acute coronary syndromes: the pathologists' view. *Eur Heart J*. 2013; 34: 719-28.
- (3) Hatakeyama K, et al : Localization and activity of tissue factor in human aortic atherosclerotic lesions. *Atherosclerosis* 1997;133:213-9.
- (4) Hatakeyama K, et al : Podoplanin expression in advanced atherosclerotic lesions of human aortas. *Thromb Res* 2012;129:e70-6.

図1

日本において、多くの人が 「動脈硬化性疾患」で亡くなっている

- ・悪性新生物 : 28.5%
- ・心血管系疾患(心疾患+脳血管疾患) : 25.4%
- ・肺炎 : 9.9%
- ・不慮の事故 : 4.8%
- ・老衰 : 4.2%
- ・自殺 : 2.3%
- ・腎不全 : 1.9%
- ・肝疾患 : 1.5%
- ・慢性閉塞性肺疾患 : 1.3%

厚生労働省
「人口動態統計」平成23年

図2

動脈硬化とは

- ・動脈の壁が厚くなり、硬くなって、弾力性を失う病気。
- ・進行すると血管内腔が狭くなり、血液の流れが悪くなる。

動脈硬化の種類

- 1) 粥状硬化症・アテローム硬化症
大動脈や脳動脈、冠動脈などの比較的太い動脈。
動脈にコレステロールなどの粥状物質がたまる。
→加齢、高血圧、脂質異常、糖尿病、喫煙などが関連
- 2) 細動脈硬化症
脳や腎臓の中の細い動脈に起き易い。
- 3) メンケベルグ型硬化症
四肢の動脈の壁にカルシウムがたまって硬くなる。

動脈硬化が起こりやすい血管と疾患

- 脳動脈： 脳梗塞、脳出血
- 頸動脈： 頸動脈狭窄症
- 冠動脈： 心筋梗塞、狭心症
- 大動脈： 動脈瘤
- 腎動脈： 腎硬化症
- 下肢動脈： 閉塞性動脈硬化症

動脈硬化は全身の疾患です

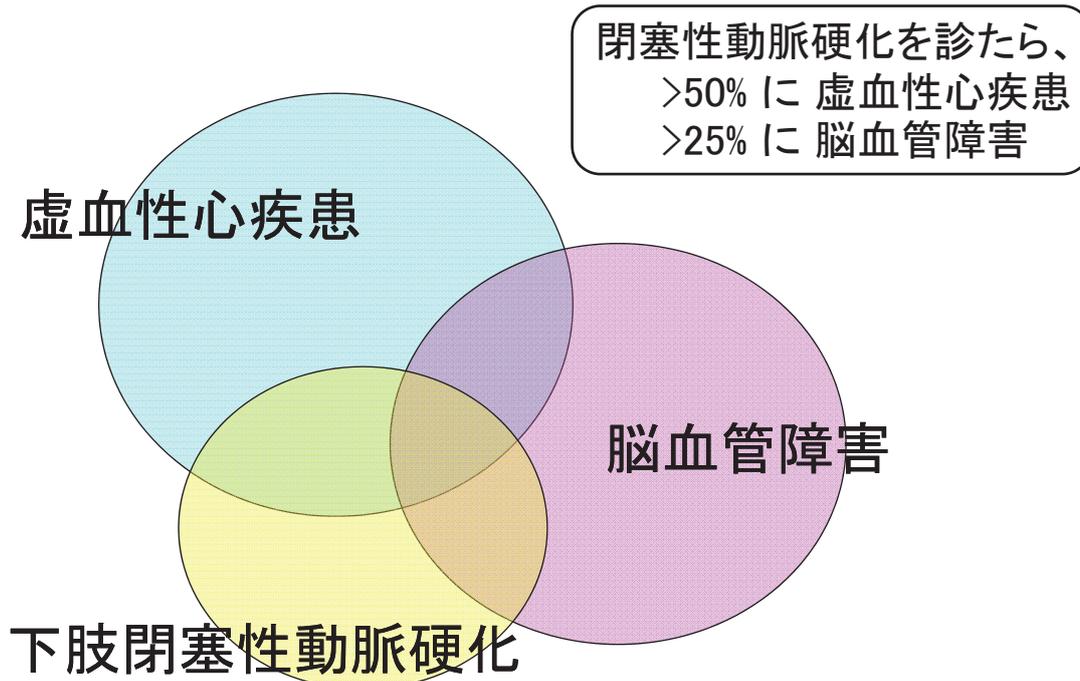
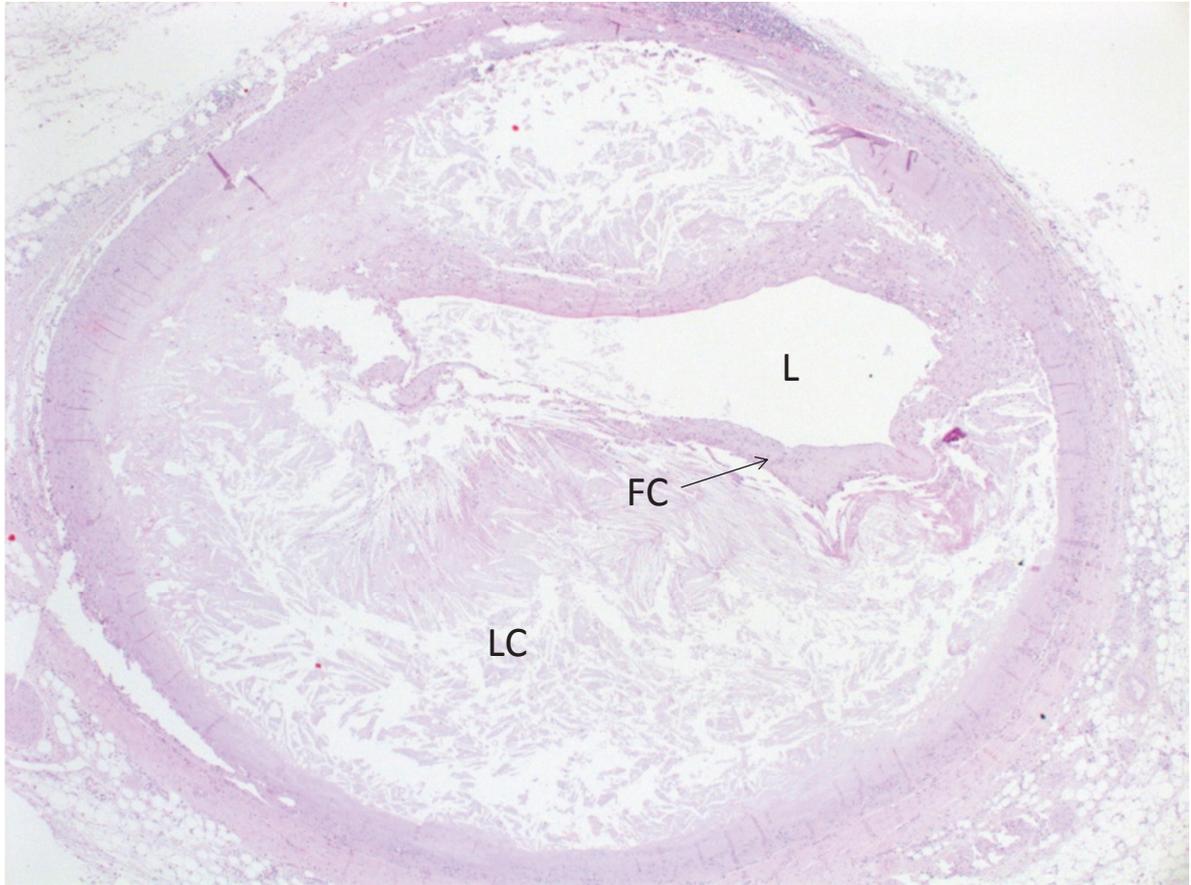
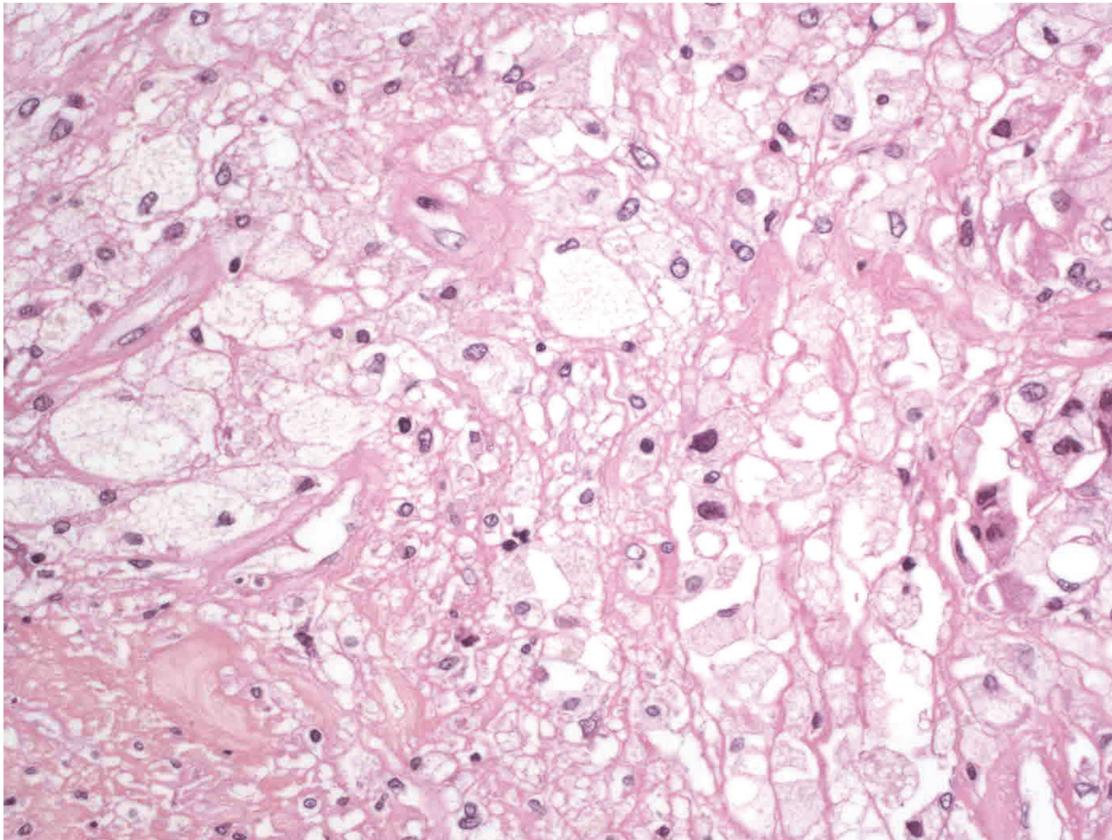


図5



(LC; 脂質コア、FC; 線維性被膜、L; 冠動脈内腔)

図6

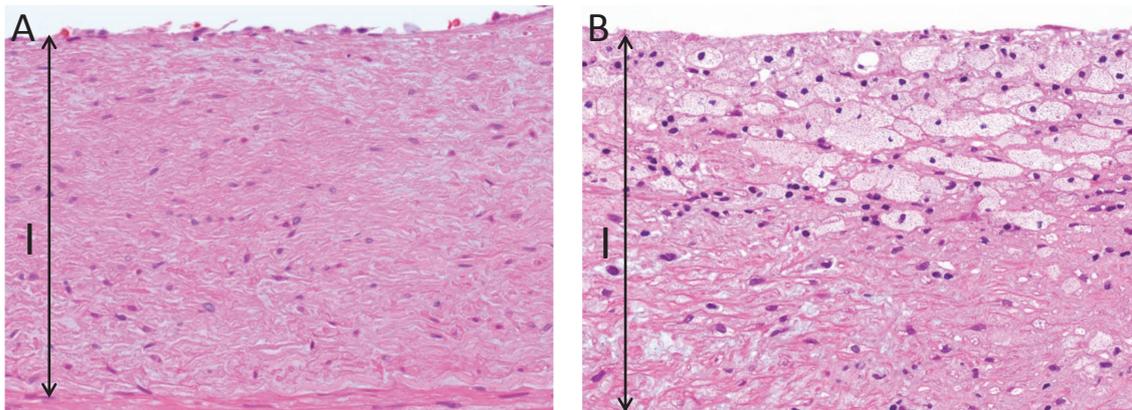


(プラークの被膜直下の拡大像)

動脈硬化の危険因子

- ・脂質異常症
- ・高血圧
- ・喫煙
- ・肥満
- ・糖尿病
- ・ストレス
- ・年齢
- ・性別(男性)
- ・家族歴

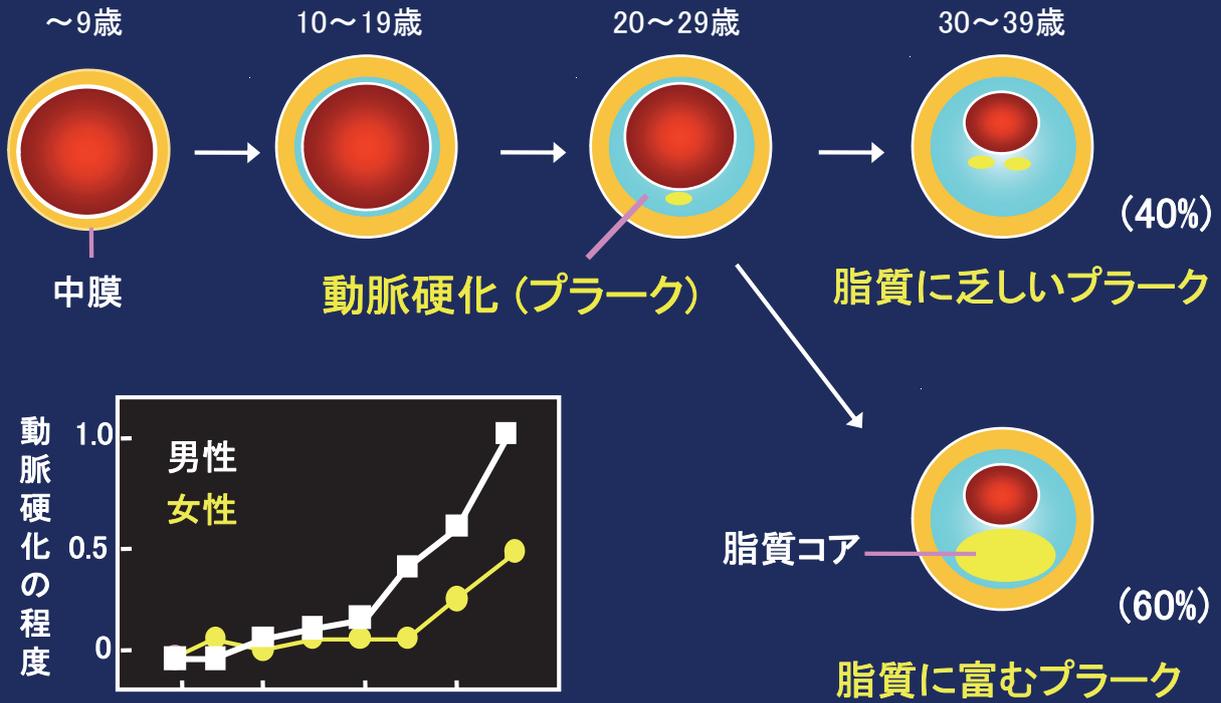
図8



(I; 肥厚内膜)

図9

若年者の冠動脈硬化の進みかた



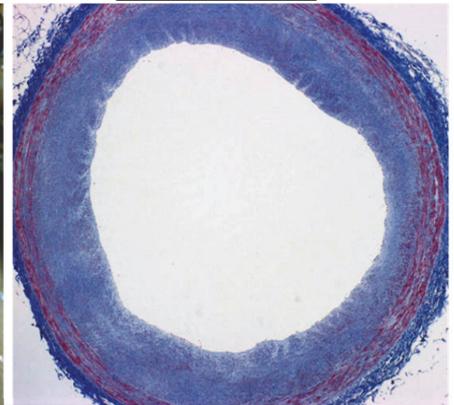
18

図10

大動脈

冠動脈

60歳代女性 危険因子: 加齢のみ



60歳代男性 危険因子: 加齢、高血圧、糖尿病、高脂血症、喫煙

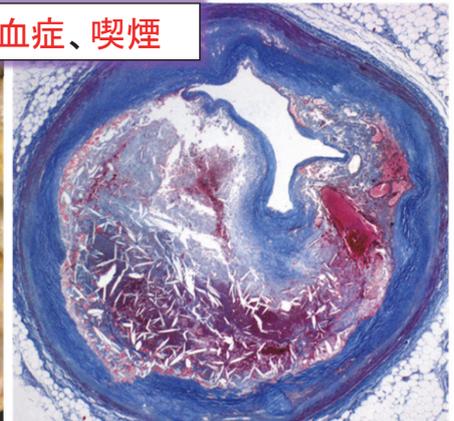
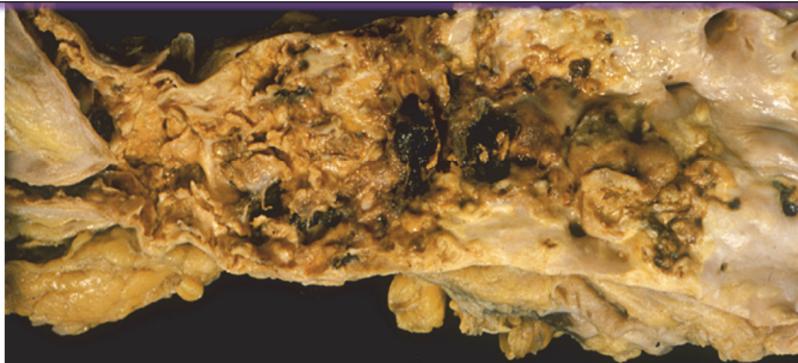
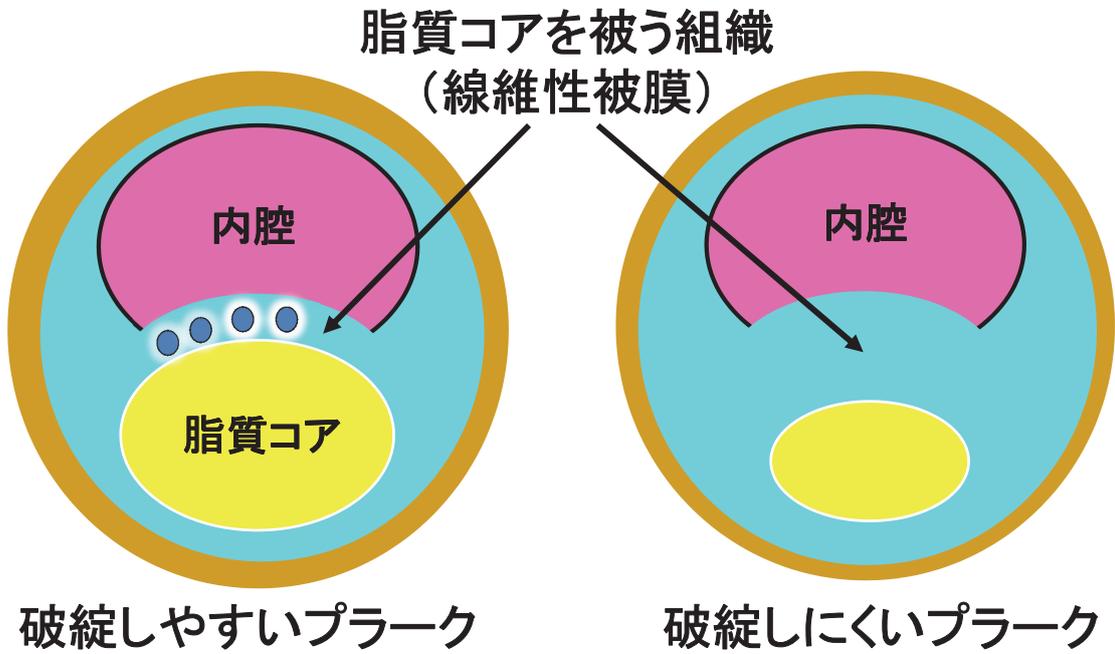


図11

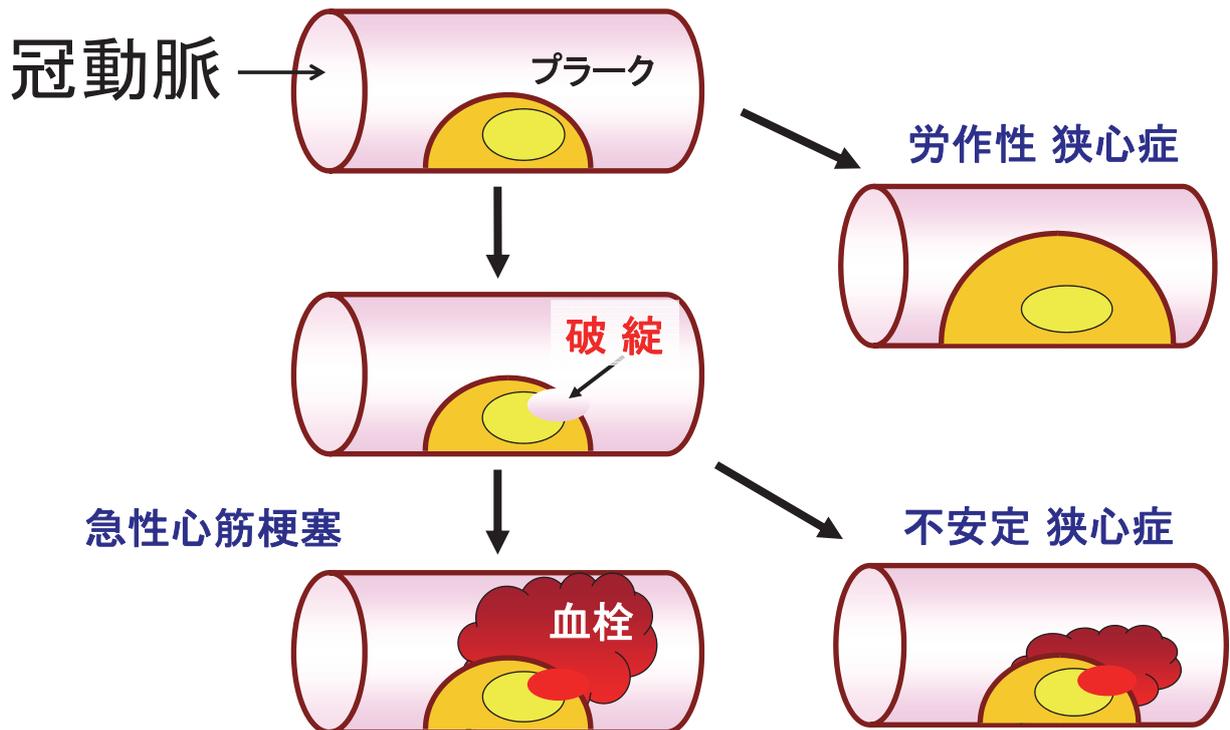


プラーク破綻に関する因子

線維性被膜の厚さ	プラーク内出血
脂質コアの大きさ	心拍動
被膜の炎症細胞浸潤	動脈壁への張力
新生血管の数	スパズム

図12

虚血性心疾患の発症機序



血栓ができやすくなる病態

- 脂質異常
- 糖尿病
- 肥満症
- 高血圧
- 喫煙
- 加齢
- ストレス
- 悪性腫瘍
- 腎臓疾患
- 血流うっ滞(長期臥床など)
- 薬剤(経口避妊薬など)

二成分砂山の縞構造

福岡工業大学 工学部
知能機械工学科
下川倫子

粉体とは？

- ・有限な大きさからなる高数密度の集団
- ・粒子サイズ \ll 粒子集団サイズ
- ・粒子間で摩擦や非弾性衝突などのエネルギー散逸を伴う

人の流れ、車の渋滞、アリの行列など
対象は多岐にわたる

固体的性質と流体的性質を両方もつ

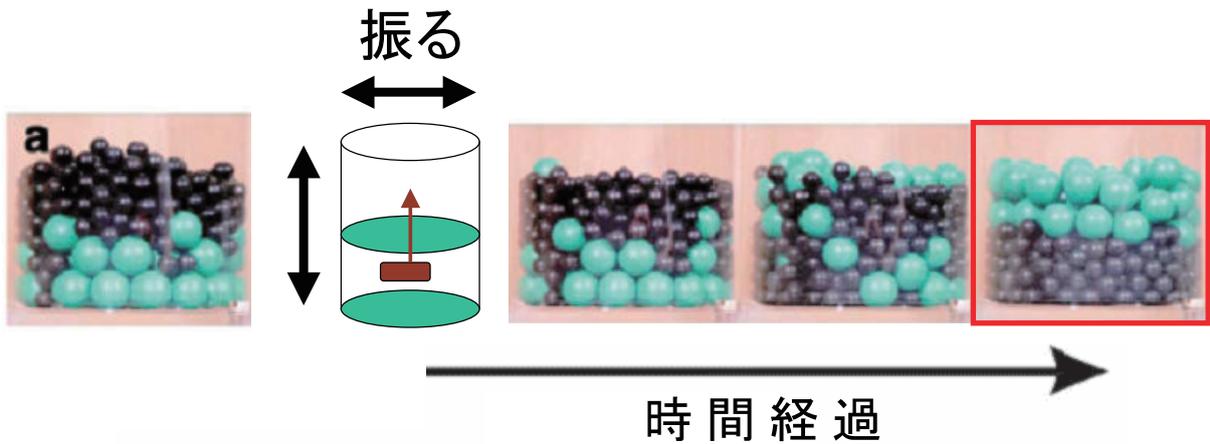


多くのおもしろい現象が見られる



テレビニュースより

粉体の偏析現象(ブラジルナッツ効果)

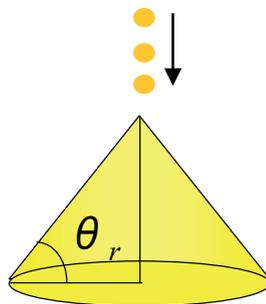


粉は振動の中で、種類ごとに分離する性質を持つ

A. P. J. Breu *et. al.* Phys. Rev. Lett. **90**, 14302 (2003).

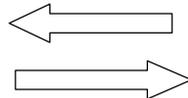
砂山形成 = 安息角 =

なだれが止まる

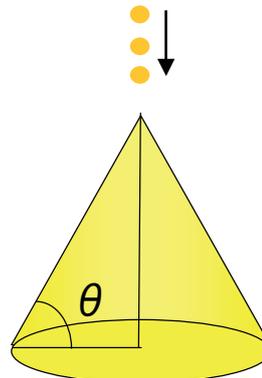


θ_r : 安息角

なだれ



粉が流動化
→なだれが起こる

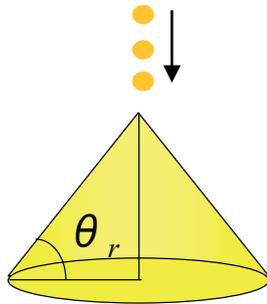


θ : 傾斜角

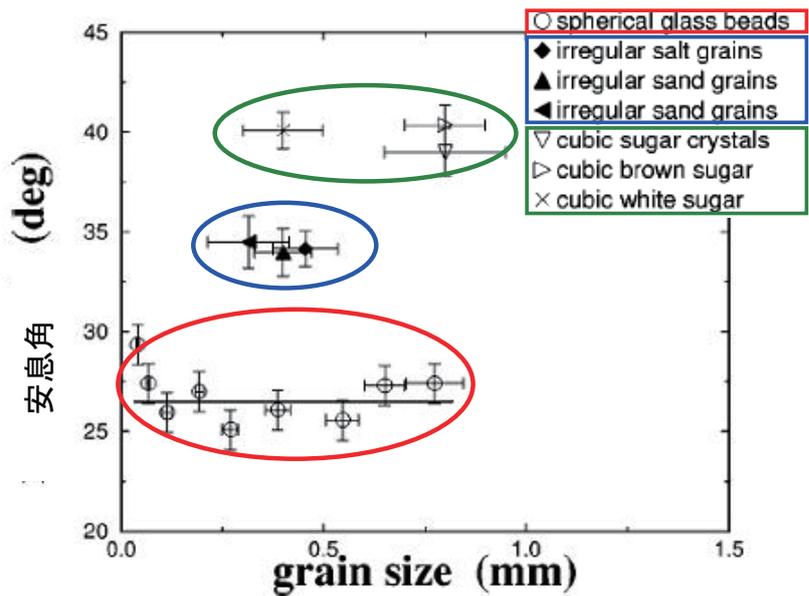
安息角は砂山を特徴づけるパラメータ

砂山形成 = 安息角 =

なだれが止まる



θ_r : 安息角



H. A. Makse *et. al.* Phys. Rev. E **58**, 3357 (1998).

安息角は粒の形に依存する

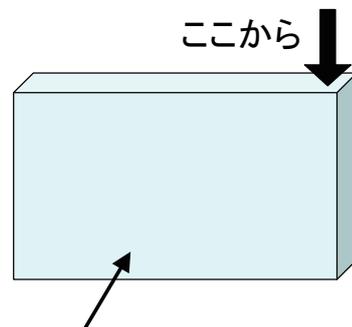
二成分擬二次元の砂山実験

実験方法

- ① 二種類の粉体を一様に混ぜる ② ①を隙間に流し込む



※二種類の粉体は
粒の形(安息角)、粒の大きさは異なる

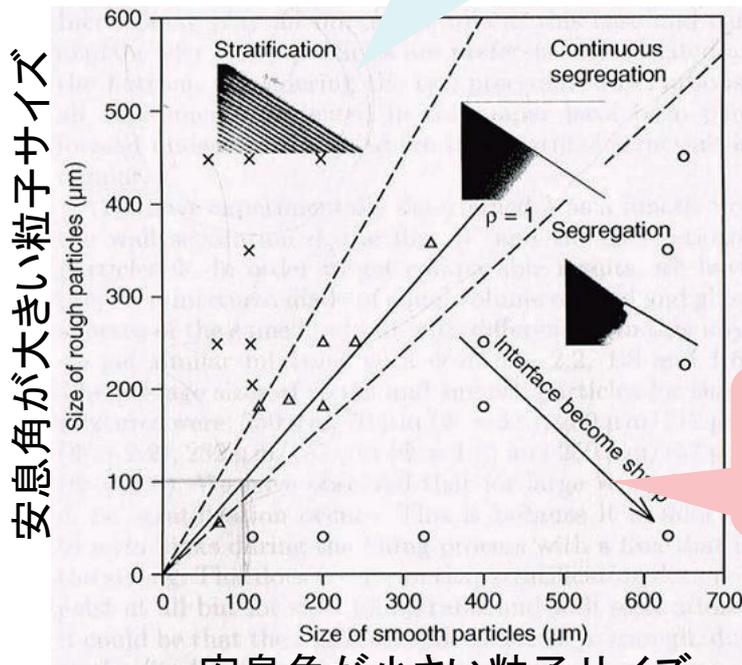


Hele-Shaw cell
二枚の板の間が狭い容器
(本実験の場合 5.0mm)

様々な粉体の組み合わせで形成される粉体のパターンを実験で観察する

実験結果

縞パターン
 粒径小, 安息角小
 粒径大, 安息角大



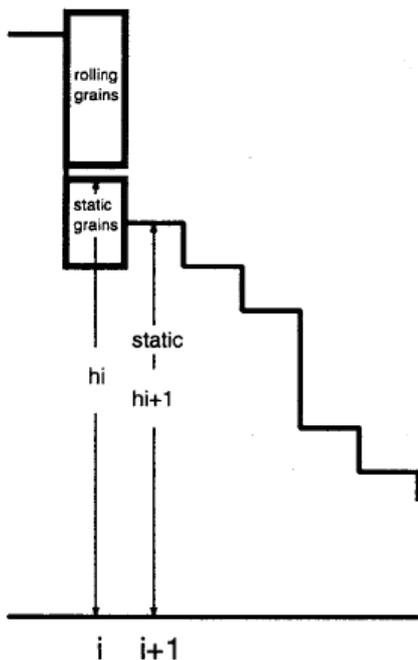
安息角が大きい粒子サイズ

相分離パターン
 粒径大, 安息角小
 粒径小, 安息角大

安息角が小さい粒子サイズ

Y. Grasselli et al., Granular matter 1, 43 (1998).

シミュレーション: ルール



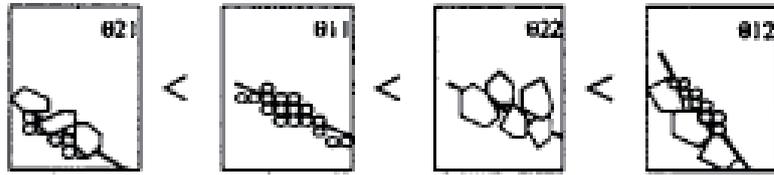
$$h_i - h_{i+1} > \theta_{rs} : \text{roll}$$

$$h_i - h_{i+1} < \theta_{rs} : \text{stay}$$

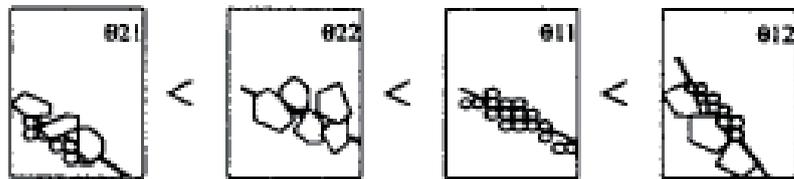
- ① $\theta_{21} < \theta_{11} < \theta_{22} < \theta_{12}$
- ② $\theta_{21} < \theta_{22} < \theta_{11} < \theta_{12}$

安息角の大小関係：二種類の組み合わせ

$$\theta_{21} < \theta_{11} < \theta_{22} < \theta_{12}$$

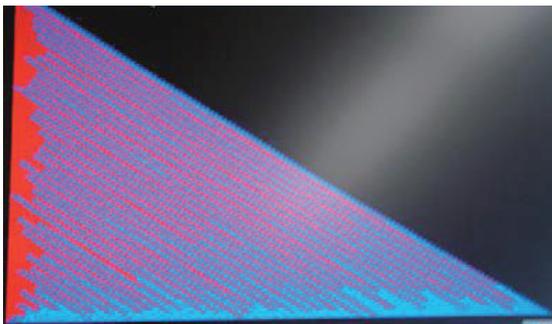
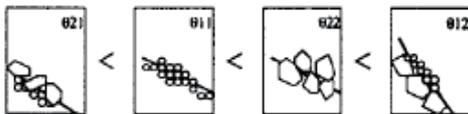


$$\theta_{21} < \theta_{22} < \theta_{11} < \theta_{12}$$

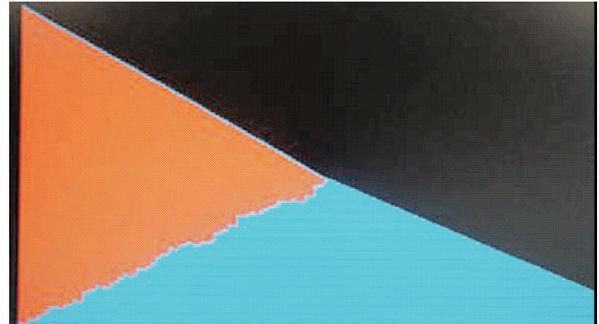
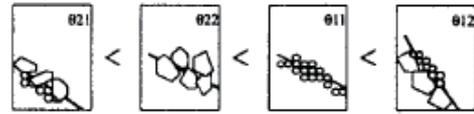


シミュレーション結果

$$\theta_{21} < \theta_{11} < \theta_{22} < \theta_{12}$$



$$\theta_{21} < \theta_{22} < \theta_{11} < \theta_{12}$$



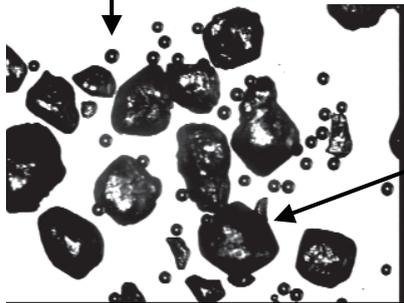
実験結果と一致している

縞構造パターンに注目：砂山実験 湿度45%

ガラスビーズ
粒径 0.1mm
安息角 26°



Small Smooth



1.0mm

顕微鏡撮影

ラカント(砂糖)
粒径 0.2~0.8mm
安息角 38°



Large Rough

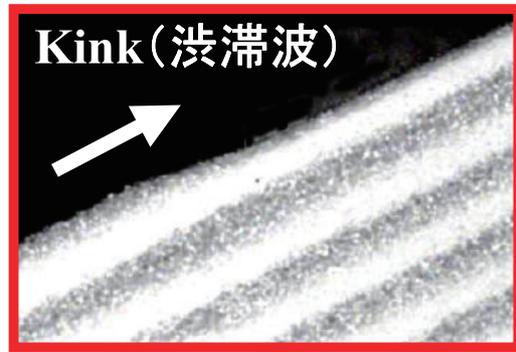
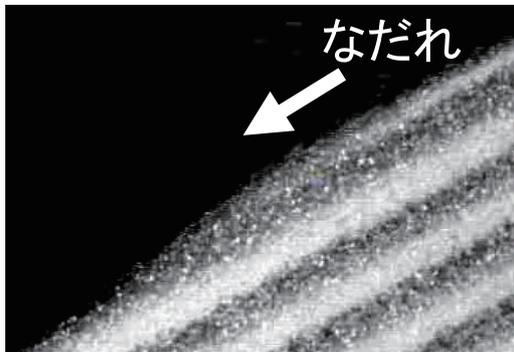
実験方法

① 一様に混ぜる



② ①を隙間に流し込む

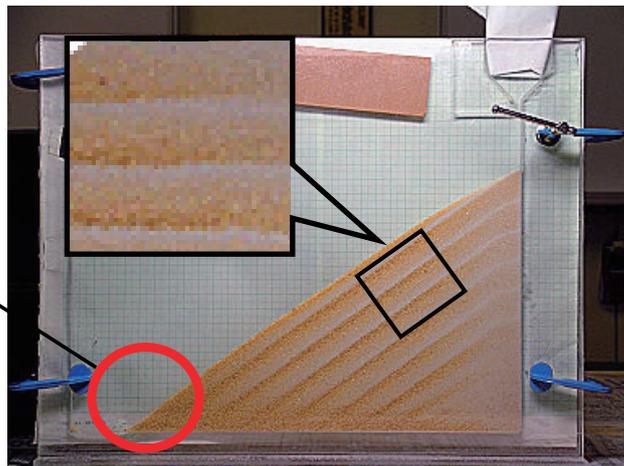
ここから



1往復運動につき、一組の縞(茶色と白)が形成される

Kinkは必ず麓で発生

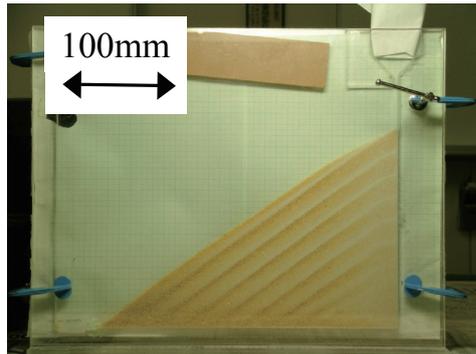
本当？



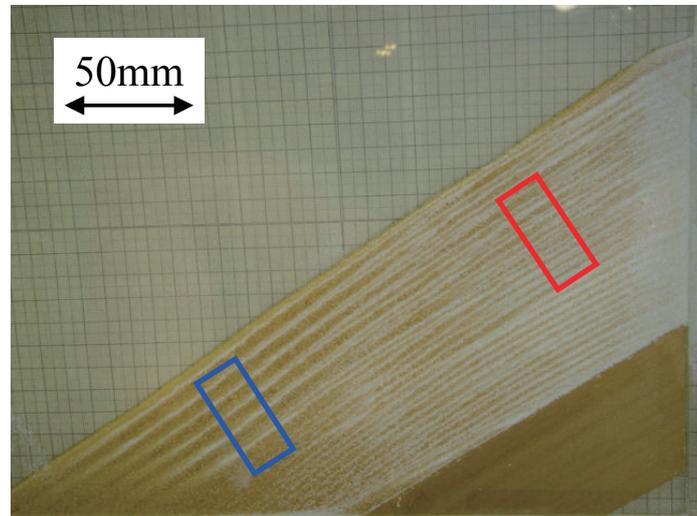
二つの周期を持つ新しい縞構造の発見

従来の約二倍の砂山を形成し実験したところ、二つの周期（縞間隔）を持つ縞構造が形成された。

二倍のサイズの砂山

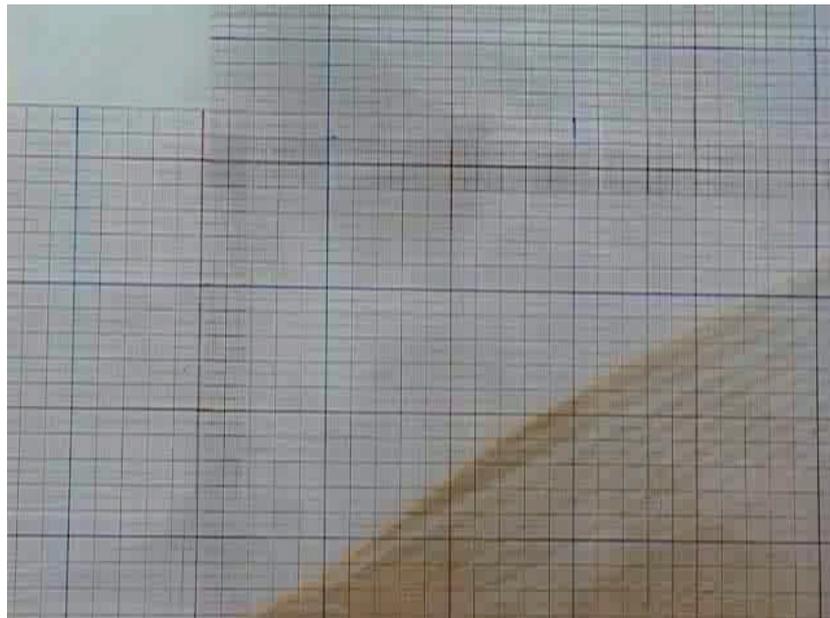


小さな砂山の縞構造
(250mm × 300mm)



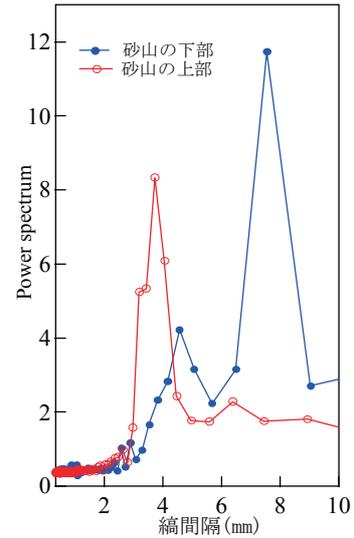
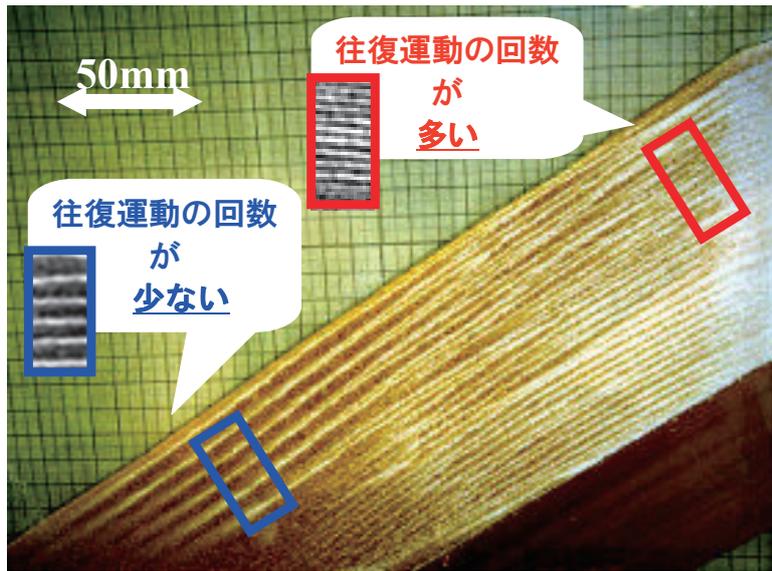
大きな砂山の縞構造
(500mm × 600mm)

二つの周期を持つ縞構造の形成



斜面途中で雪崩が自発的に止まり、Kinkが発生する。
※斜面途中で発生するKinkをTrapped kinkと呼ぶ

二つの縞間隔

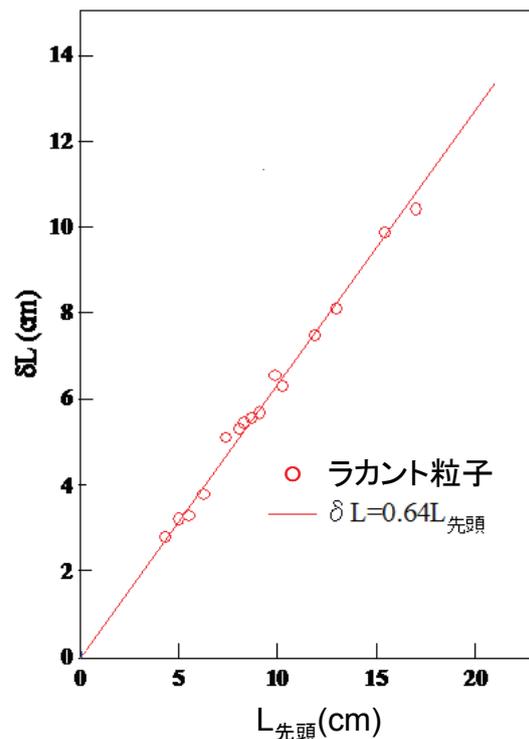
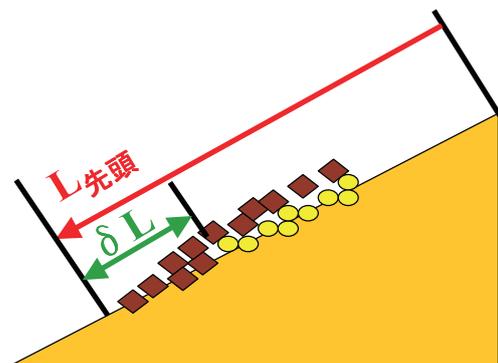
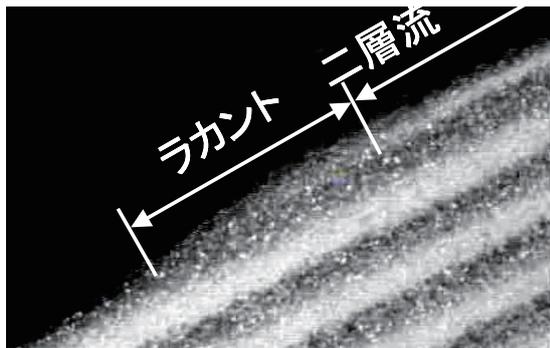


山の下部の縞間隔: 7.7mm

山の上部の縞間隔: 3.8mm

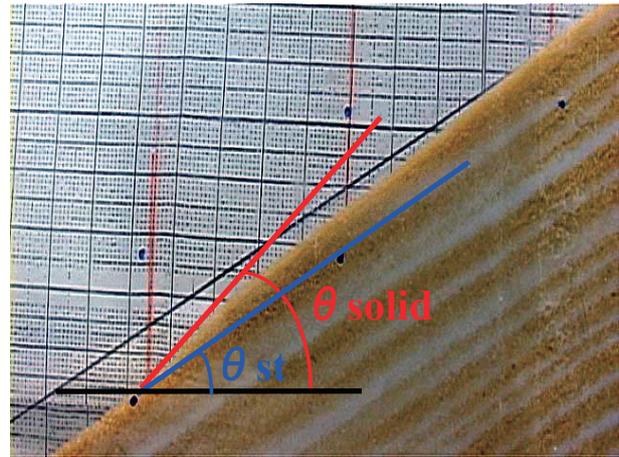
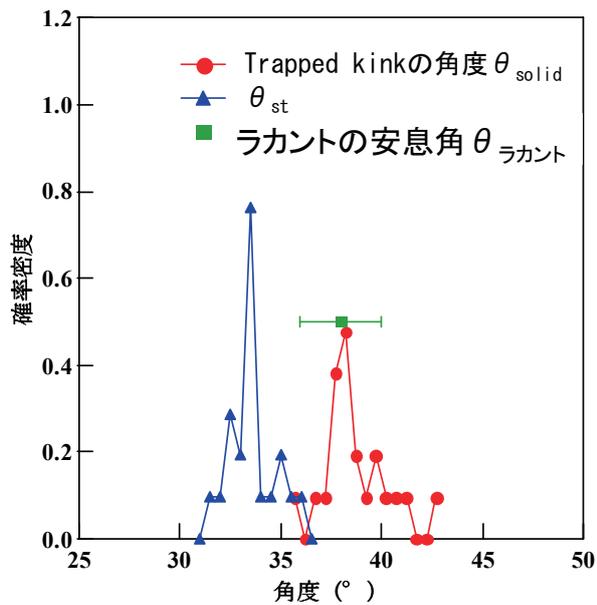
大きな砂山での実験ではTrapped Kink(斜面途中で発生するKink)の効果により
 (山の上部の縞間隔) < (山の下部の縞間隔)
 の二つの縞間隔を持ったパターンが形成される。

先頭ラカント粒子の増加



先頭のラカント粒子はなだれが流れるとともに増加する

Trapped Kinkの角度

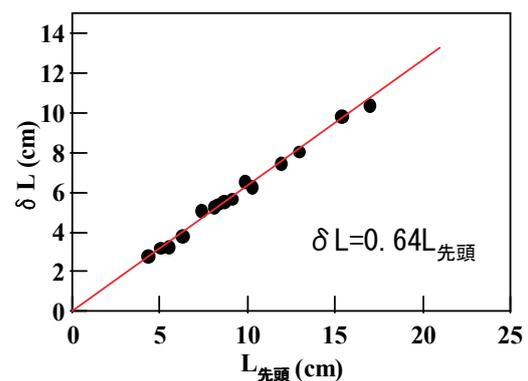
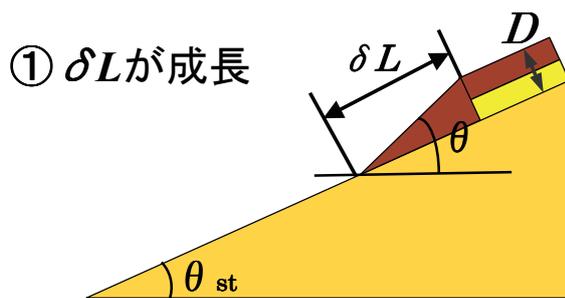


$$\theta_{\text{solid}} (= 38.6) > \theta_{\text{st}} (= 33.3)$$

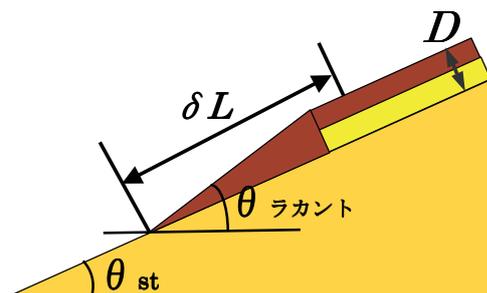
$$\theta_{\text{solid}} (38.6^\circ) \cong \theta_{\text{ラカント}} (38 \pm 2^\circ)$$

Trapped Kinkの角度はラカント粒子の安息角とほぼ一致

考察



② θ が小さくなる



$$\theta = \theta_{\text{ラカント}} \text{で}$$

先頭ラカント粒子は固まる

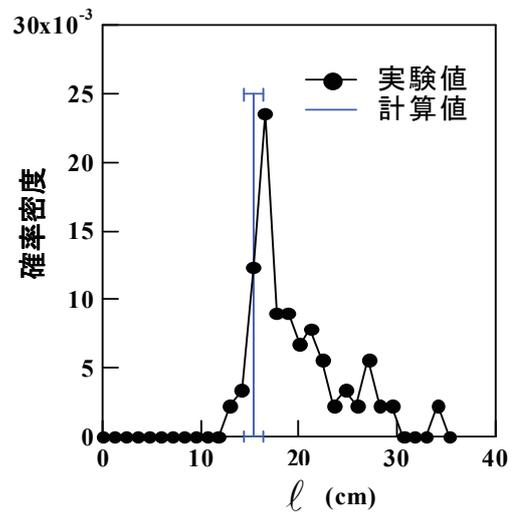
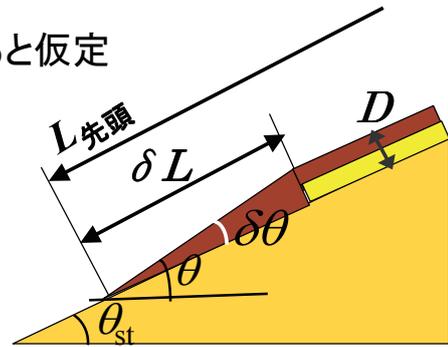
$\theta(t) = \theta_{\text{ラカント}}$ で先頭のラカント粒子が固化すると仮定

$$\theta = \theta_{st} + \delta\theta \rightarrow \theta_{\text{ラカント}} = \theta_{st} + \delta\theta$$

$$\tan \delta\theta = \tan(\theta_{\text{ラカント}} - \theta_{st})$$

$$\frac{D}{\delta L} = \frac{D}{0.64L_{\text{先頭}}} \sim \tan 5^\circ$$

$$L_{\text{先頭}} = \frac{D}{0.64L_{\text{先頭}} \cdot \tan 5^\circ} \sim 15.4\text{cm}$$



実験分布のピークの位置(16.3cm)とTKモデルの計算値(15.4cm)は実験の誤差範囲内($\pm 1\text{cm}$)でほぼ一致する

まとめ

- ・大きな砂山実験で2つの縞間隔を持つパターンを発見した
- ・二重縞構造形成過程で山の斜面途中で発生する新しいTrapped Kinkを観察した
- ・山の先頭角度に注目した現象論的モデルから得られたTrapped Kink発生位置は実験値ほぼ一致する

- ・さらに大きな砂山で実験を行うと、どうなるか？
- ・密度依存性はどうか？



【1. 序】

一般に、実験流体力学者は風洞や水槽と呼ばれる装置を使って、理想的な流れを作り、いたるところの速度、圧力、温度、スカラー量などの物理諸量を計測して、流れの構造がどのようなものであるかを調べている。我々はマルチファン型風洞[1]という新しいタイプの風洞を使い、いろいろな風を生成して実験を行っている。本報告では、(1) マルチファン型風洞がどのような風洞で、乱流をどのように作りどのように計測するかを説明し、(2) 現在進行している当研究室のプロジェクトの二三の結果を紹介する。

乱流は、おおざっぱにいうと、流れと直角方向に平均流速勾配を持たない一様乱流と勾配を持つ剪断乱流とがある。我々は一様乱流として一様等方性乱流の生成を、剪断乱流として大気境界層シミュレーションを主な研究対象としてきた。本報告のほとんどは一様等方性乱流について述べる。

【2. マルチファン型風洞】

マルチファン型風洞は開放型押し出し式の風洞であり、その最大の特徴は、気流を複数のファンで駆動することである。扇形にひろがった気流駆動部入り口の面内に、図1のような99個(縦11, 横9)のファンを配した。これらのファンは固定ピッチの軸流送風機であり、外径270mmの4枚の動翼、直後には7枚の静止翼を持つ。ファンはAC200Vサーボモーター(出力750W)に直づけされ、それぞれが独立にパソコンで回転数制御される。その運転方法の概念を図2に示す。ファンで駆動された気流は、隔壁で四面を



図1 マルチファン型風洞

囲われたダクトを通り独立して縮流され、最終的にハニカム(212mm長)で整流され測定部に吐き出される。整流金網は使用していない。曲率が大きいダクトにはコーナベーンを取り付けた。これらモーター→ファン→ダクトの一連の機構が“送風ユニット”となり、それらが束ねられて送風部を形成している。縮流比は平均して1:1.8である。それぞれのダクトの出口(すなわち、測定部入り口)

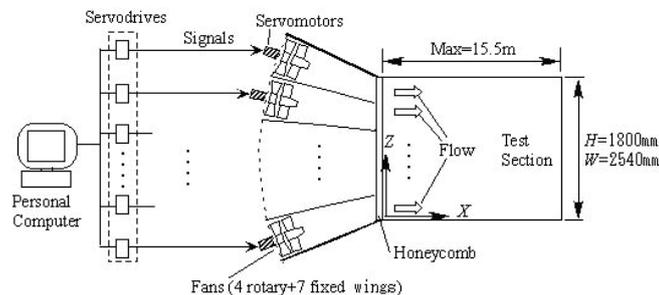


図2 マルチファン型風洞概念図

における寸法は、水平長さ $M_y=282\text{ mm}$ 、鉛直長さ $M_z=164\text{ mm}$ である。以下の記述では、座標軸は計測部入り口の風洞床面中心を原点とし、下流方向を X 、水平方向を Y 、鉛直方向を Z とした。これに対応し、速度成分は $(U+u, v, w)$ で表わし、 U は主流平均流速、 (u, v, w) は変動成分である。

測定部は7個の可搬胴を組み合わせて構成し、いろいろな長さの測定部長 D が実現できる（最長17.0m）。断面の大きさは横2.54m、縦1.80mである。風洞内には2次元トラバース装置が設置されており、Y-Z面内は遠隔操作でセンサーを所定の位置へ移動できる。変動流速の測定は熱線流速計SYSTEM7000（Kanomax CTA-1011）で測定し、プローブは線径5 μm 、受感部長1mmのX型（同model1241）とI型（同model1210）を用いた。検出された信号はロガーでA-D変換した後、パソコンに収録した。高速フーリエ変換（FFT）を用いてパワースペクトルを求めた。エイリアシングを防ぐためにカットオフ周波数以上の成分はローパスフィルターで除去した。特に断りがない場合は、風路中央における計測値をその断面での流れ特性の代表とした。

【3. 一様アクティブ法】

マルチファン型風洞の運転では、設定するパラメータが多く、どのパラメータがどのような効果を持つかを調べる必要があった。最初にした運転法は、研究室で既に行われていた“一様アクティブ法”と呼ばれるものである。この方法では、強風時の変動風の1次元カルマン型スペクトルといわれる半理論的な波数領域の式に従い目標スペクトルをつくり、それを時間領域に変換して一本の時刻歴を作り、マルチファン型風洞の全送風機にその同一の信号を入力し乱れを作ろうとする[1]。これとは別に比較の基準となる乱流を生成した。それは“擬似格子法”といわれる方法による。駆動ファンを格子状に配置して定常信号を入力し乱流を生成した。予備的な計測で、格子乱流に似た特性を示すことを確かめた。

図3はこの一様アクティブ法と擬似格子法による乱流スペクトルを比較したものである。擬似格子法では乱流の小規模運動に普遍的に現われる連続的なスペクトル分布形状をしているのに対し、一様アクティブ法では低周波数の強制運動による寄与と高周波数の自然生成された乱れによる寄与の間に落ち込みがあり、いわゆる“スケールの分離”が見られる。 u 成分と v 成分を比較すると、擬似格子法ではスペクトルの両成分間のレベル差は小さく従来の格子乱流のような特性を示している。いっぽう、一様アクティブ法では、低周波数領域において v 成分のスペクトルレベルは u 成分のそれに比べて著しく小さいことが注目される。このことは、一様アクティブ法で生じた流れは異方性が顕著であることを示している。図4は下流方向への空間相関の変化を示して

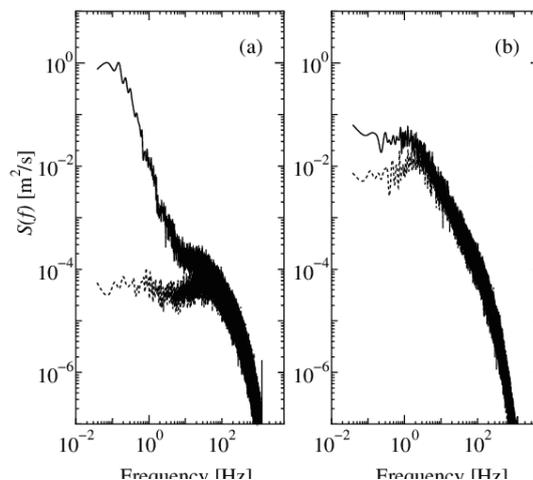


図3 運転方法によるパワースペクトルの比較。
 $X=5.0\text{ m}$, $D=6.6\text{ m}$, $I_{tar}=10.0\%$, $L_{tar}=3.0\text{ m}$, $U_{tar}=8.0\text{ m/s}$. (a) 一様アクティブ法. (b) 擬似格子法.
実線, u 成分; 一点鎖線, v 成分

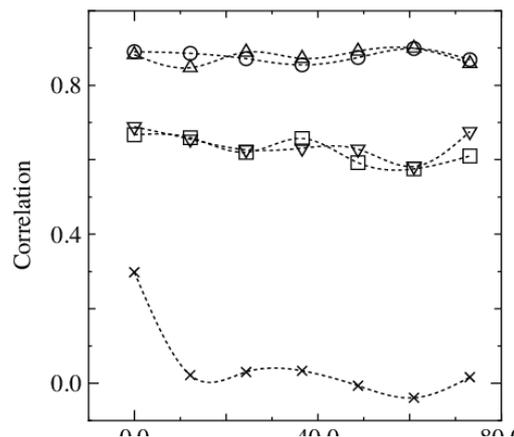


図4 下流方向への空間相関の変化。一様アクティブ法:
○, $I_{tar}=10.0\%$, $L_{tar}=3.0\text{ m}$, $U_{tar}=8.0\text{ m/s}$; Δ, $I_{tar}=10.0\%$, $L_{tar}=5.0\text{ m}$, $U_{tar}=8.0\text{ m/s}$; □, $I_{tar}=5.0\%$, $L_{tar}=3.0\text{ m}$, $U_{tar}=8.0\text{ m/s}$; ▽, $I_{tar}=5.0\%$, $L_{tar}=5.0\text{ m}$, $U_{tar}=8.0\text{ m/s}$. 擬似格子法: ×, $U=3.0\text{ m/s}$

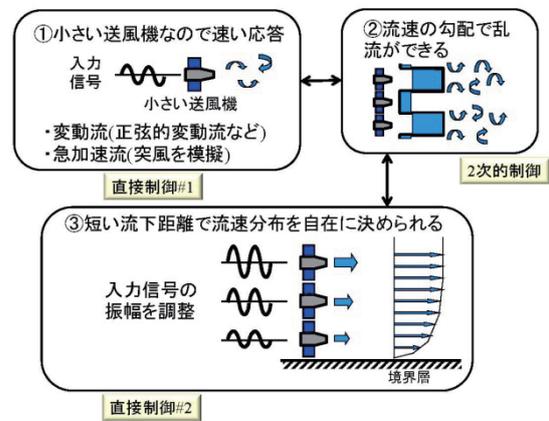
示している。図4は下流方向への空間相関の変化を示して

いる。主流成分 u の空間相関係数 R をダクト出口直後 ($X=1.0\text{m}$) の固定点といろいろな下流地点間で計測したものである。擬似格子乱流では“格子乱流”のようにわずかな二点間距離で急速にゼロに近づいている。いっぽう、一様アクティブ法ではかなり高い値を広範囲にわたって保ち続ける。高い空間相関は測定部内の気流が一体として運動することを示している。図4に示されるように、一様アクティブ法により生成される流れは測定部内の流体が一体として動くような流れ、すなわち、脈動成分が卓越した流れであると考えられる。上流の送風による押し込みが下流で同じ運動をする流れ、すなわち脈動流に近いものと推定される。このような広範囲のconsistentな流れは乱流とは言い難いものである。

【4. ランダム位相法】

4. 1 カルマン型スペクトルに基づく時刻歴入力

図5はマルチファン型風洞の制御の原理を図式的に整理したものである。ここでは流速は一様な乱流を考えているので①と②の制御が対象である。1次的に信号そのものに強制的に変動を与える方法と、2次的に入力信号の振幅と位相を各送風機で変化させて、隣り合う送風機から押し出される気流間の剪断不安定を利用する方法とがある。これらを組み合わせて、いかにしたら強乱かつ大スケールの乱流（即ち、乱流レイノルズ数



Re_λ が大きい乱流) が風洞内で実現できるかということが最近の研究の対象であり、以下、その経過を述べる。

吉田他[2]では、“一様アクティブ法”と同じカルマン型スペクトルに従う時刻歴を使いながらも、マルチファン型風洞ではそれぞれの送風機は独立に制御できるので、送風機ごとに時刻歴の位相をランダムにずらして

入力した (“ランダム位相法”と略称する)。図6と図7に、各送風機に与えられた位相差の倍率 N の分布を示す。モード2では駆動ファンをフラクタル状に配置し、各送風機に位相差を与えた(図6)。モード3では全てのファンを駆動した。 N の値は擬似乱数で与え $(N-1) \times 0.4\text{s}$ だけ位相をずらした。なお、ここではモード1~3の運転法を試みたが、モード1の説明は省略している。

擬似ランダム信号を使用する方法では、吹き出し直後の気流は入力信号のパワー構成に近いはずである。それが流下するにつれてどのように乱流化するかという点に注目した。図8に風洞中心のパワースペクトルの主流方向変化を示す。図のような吹き出し直後のパワースペクトルには低周波数と高周波数にギャップが見られる。低周波数の山はマルチファンから与えられる強制的

図5 マルチファン型風洞の制御の原理

	1		2	3	4		5	
	6		7	8	9		10	
11		12	13	14	15	16		17
	18		19	20	21		22	
23	24	25		26		27	28	29
30	31	32	33		34	35	36	37
38	39	40		41		42	43	44
	45		46	47	48		49	
50		51	52	53	54	55		56
	57		58	59	60		61	
	62		63	64	65		66	

■ U_{in}^+ □ U_{in}^-

図6 位相差の倍率 N (モード2)

55	35	59	20	52	64	21	61	62
50	30	82	74	44	88	4	65	6
63	37	97	94	92	14	79	46	56
32	81	91	72	98	19	78	42	31
22	28	49	8	45	84	53	99	89
26	38	87	10	76	41	23	90	18
85	71	47	3	54	60	27	17	73
7	40	75	1	80	13	2	86	36
48	33	95	96	51	93	34	67	25
66	24	83	69	12	29	77	70	11
57	5	39	43	68	15	16	9	58

■ U_{in}^+

図7 位相差の倍率 N (モード3)

な変動成分であり、高周波数の山は自然に生成された乱流成分からなっていると思われる。流下するにつれて、この二つのピークのギャップがもりあがりつつあり、 $X/Mz=9$ ではスペクトルがかなり連続的な形に変化している。

図9は最下流での乱流のスペクトルを示す。モード2でもモード3でも、位相を揃えていた時のスケール分離は消えて連続的なスペクトルが見られ、コルモゴロフのいわゆる $-5/3$ 乗則に従う領域も見られる。我々はこのランダム位相法に着目した。

4.2 40個の一定振幅正弦波の合成波からなる時刻歴入力

吉田他[2]のスペクトルの低周波数域の特性が強制擾乱によるものかどうかの疑問が残ったので、池田他[3]では40個の一定振幅の正弦波擾乱を合成した時刻歴を入力擾乱とした。これは以下のように作られた。変動成分は階段状のスペクトルが基本的であると考え、パワースペクトル $S_{in}(f)[m^2/s]$ を次のように定めた。

$$S_{in}(f)=C=const. \quad (1)$$

図10に信号生成法を図式的に示す。本風洞ではファンに与える周波数が高くなるにつれ気流の応答性が劣化すること[1]や、運転の負荷が大きくなるという理由から、 $f_{min}=0.024\text{Hz}$ 、 $f_{max}=0.96\text{Hz}$ とした。 f_{max} 付近ではゲインがわずかに低下したが、特に修正は施さなかった。

入力周波数成分の間隔は $\Delta f_{in}=0.024\text{Hz}$ とし、周波数成分は40個とった。 C は $\hat{C}=C \times U_{in}/2\pi\varepsilon_{in}^{1/4}n^{5/4} \times 10^{-6}$ 、入力周波数 f_{in} は $f=f_{in} \times 2\pi\nu^{3/4}/U_{in}\varepsilon_{in}^{1/4}$ のように無次元化した。本研究ではいろいろな C の運転信号を用いて生成される乱れの特徴を調べた。 $C=1, 2, 3, 6, 20\text{m}^2/\text{s}$ の信号を作成した。 \hat{C} が大きいほど大きなエネルギーが低周波数域に注入され、高レイノルズ数の乱流を生成できる可能性がある。ファンの運転法はランダム位

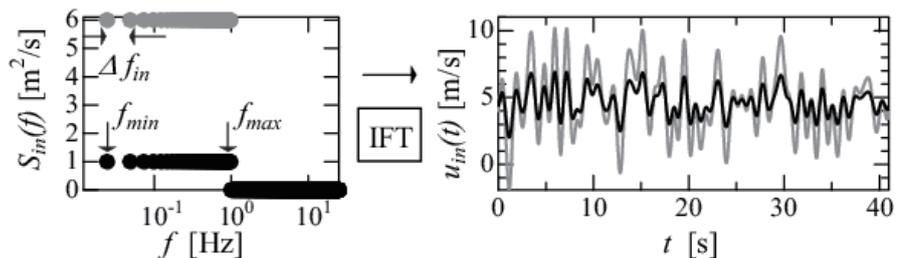


図10 入力信号のスペクトルと時刻歴

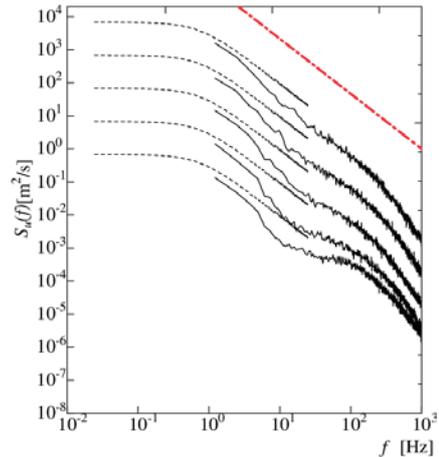


図8 パワースペクトルの流下方向への変化。モード3。上から $X/Mz=9, 7, 5, 3, 1$ 。各曲線は1桁ずつずらしてある。

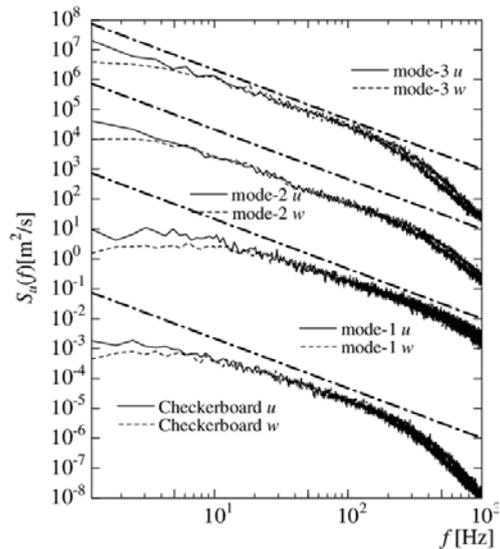


図9 十分下流におけるu,wスペクトル。各モードは2桁ずつずらしてある(吉田他2010[2])。

の運転法はランダム位

相法を使用した。

図11 に乱れ強度の主流方向変化を示す。擬似格子乱流では乱れ強度が流下方向に急激に減衰する。ランダム位相法の場合、十分下流でも擬似格子法より強い乱れを維持している。図より、 \hat{C} が大きいほど乱れ強度が大きくなる傾向がある。

図12は測定部入り口近くのスペクトルの空間発展を示している。一様アクティブ法の場合は流下方向にスペクトルの形は変化しないこ

とがわかっている。しかし、ランダム位相法においてさらに下流のスペクトルを見ると、流下するにつれてパワーが外乱の周波数範囲において減衰し外乱の最大周波数を越えるときに盛り上がっており、 $-5/3$ に近い傾きを有する周波数域が現れている。これは隣接する吹き出された流れの間のせん断によって生成された渦群が、流下しながら相互作用しカスケードダウンしたと考えられる。このような傾向は予備的な文献[2]でも見出されていたが、カルマンのスペクトルに基づく入力信号を使用していたために、慣性小領域

に相当する部分が自然な乱れかどうか判断できなかった。図12の結果からランダム位相法において、ファンによる変動は入力信号のスペクトル形状によらず流下とともに自然な乱れの生成に寄与すると考えられる。十分下流において運転モードによるスペクトル形状の比較を行った。図13に無次元化した一次元エネルギースペクトルを示す。図13(a), (b)は同じ流下地点($X=MD=46.5$)におけるランダム位相法($\hat{C}=70.5$)と擬似格子法のスペクトルである。擬似格子法よりもランダム位相法のほうが低波数域でのエネルギーレベルが u, v の両方向で大きく、慣性小領域に相当する領域が広いのが分かる。

過去に試みられた動的格子による u'/v' などの統計量を本研究の結果と併せて表1に示す。

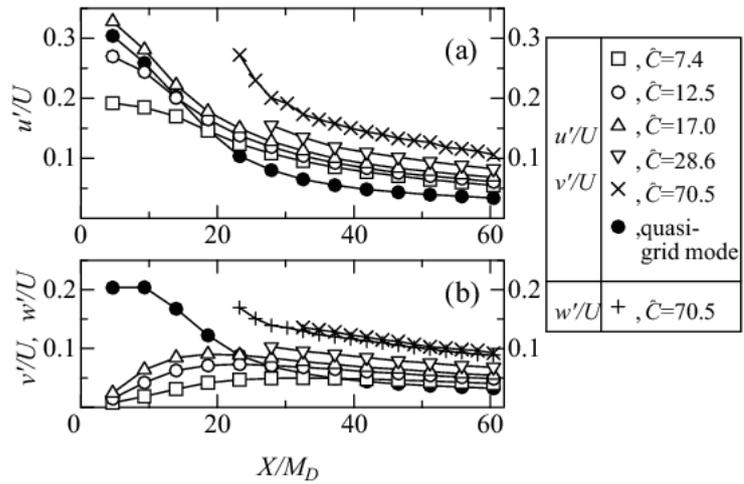


図11 乱れ強度の主流方向変化

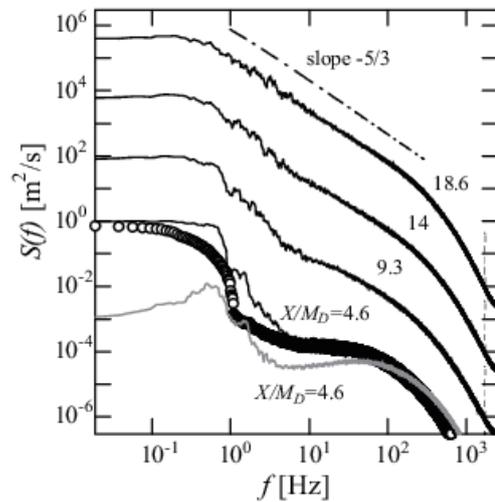


図12 40個の正弦波合成波を外部擾乱に使用した乱流スペクトルの空間発展

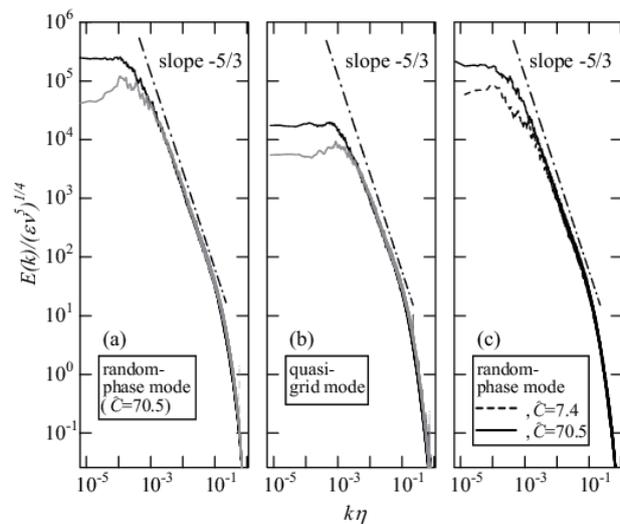


図13 十分下流における無次元スペクトル。(a) $X/MD=46.5$ における u (黒), v (白)。(c) $X/MD=60.5$ における u 。

Kang他は格子乱流と同等の等方性であるのに対し、Makitaでは $u'/v'=1.22\sim 1.3$ 、Mydlarski他では、 $u'/v'=1.21$ であり格子乱流よりも少し大きな値をとっている。本研究のランダム位相法は表1に示したように、 $\hat{C}=70.5$ の場合、 $X/M_D=46.5$ で $u'/v'=1.20$ 、 $u'/w'=1.26$ であった。これらの値はMakita等のアクティブ格子による値に近い。

表 1 アクティブ格子法との乱流特性の比較

Studies	U [m/s]	X/M	u'/U [%]	Re_λ ($Re_{\lambda q}$)	u'/v' (u'/w')	η [mm]
[Present]						
random-phase mode($\hat{C}=70.5$)	5.36	46.5	13.34	753 (580)	1.20 (1.26)	0.29
quasi-grid mode	5.86	37.2	5.54	281 (234)	1.12	0.33
[Active grid methods]						
Makita[5]	5.0	50	16.4	(387)	1.22	0.21
Larssen and Devenport[7]	20.2	21.3	12.0	1362	-	0.12
Kang et. al.[4]	12.0	20	15.4	716 (614)	1.13	0.11
Mydlarski and Warhaft[6]	7.0	62	10.9	582	-	0.26

4. 3 2個の一定振幅正弦波の合成波からなる時刻歴入力

池田他[3]では40個の正弦波擾乱を用いて入力擾乱を合成し、その結果、乱流らしい渦構成を持ち $Re_\lambda=753$ の高レイノルズ数一様乱流を生成できたが、正弦波の個数が多すぎて、最低限どのような条件が必要かぼやけてしまった。すなわち、乱流発達に本質的に寄与する周波数成分の条件を明らかにしてはいなかった。

そこで、高傘禮他[8]では正弦波を2個だけ使用し、乱流がどこまで生成できるかを調べた。次の正弦波合成波を仮定した。

$$u = \sin(2\pi f_A t) + \sin(2\pi f_B t) + U \quad (2)$$

ここに、 $f_A=0.912\text{Hz}$ 、 $f_B=0.168\text{Hz}$ 、 $U=4.67\text{m/s}$ とした。図3はランダム位相法に従い各送風機に $0.4N$ ($1 \leq N \leq 99$)の位相差を割り当てて作った乱流のスペクトルの下流方向への空間発展である。もともとの二つの正弦波に対応するピークが残留しているものの、 f_A より高い周波数に新たな乱れの寄与が見られる。この研究は緒に就いたばかりであり、今後、 $|f_A \pm f_B|$ の値がどのような時に効果的な乱流生成となるか、無次元パラメータとしてどのように表現できるかななどの問題に取り組む予定である。

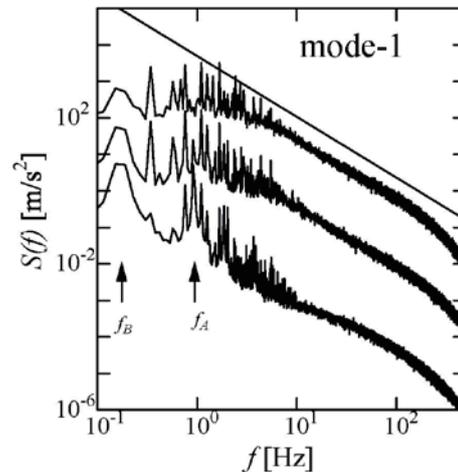


図 14 2個の正弦波合成波を外部擾乱に使用した乱流スペクトルの空間発展 ($f_A=0.912\text{Hz}$ 、 $f_B=0.168\text{Hz}$) (高傘禮他 2013[8])

【参考文献】

- 1) S. Ozono, A. Nishi, H. Miyagi, J. of Wind Eng. Ind. Aero., Vol. 94, 225-240 (2006).

- 2) 吉田, 坂口, 小園, 宮崎大学工学部紀要, 第 39 号, 9-14 (2010) .
- 3) 池田, 小園, 日本機械学会論文集, B編, 79 卷, 300 号, 555-566 (2013) .
- 4) Kang, H.S., Chester, S. and Meneveau, C., “Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 480 (2003), pp. 129-160.
- 5) Makita, H., “Realization of a large-scale turbulence field in a small wind tunnel”, *Fluid Dynamics Research*, Vol. 8 (1991), pp. 53-64.
- 6) Mydlarski, L. and Warhaft, Z., “Passive scalar statistics in high-Reynolds-number grid turbulence”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 358 (1998), pp. 135-175.
- 7) Larssen, J.V. and Devenport, W.J., “On the generation of large-scale homogeneous turbulence”, *Experiments in Fluids*, Vol.50, No. 5 (2010), pp. 1207-1223.
- 8) 高牟禮, 池田, 小園, 日本流体力学会年会 2013, 東京 (2013).

Weighted $L^p - L^q$ estimates of Stokes semigroup in some unbounded domain

久保 隆徹 (筑波大学 数理物質系 数学域)*

1. はじめに

本研究は小林孝行教授 (佐賀大学) との共同研究に基づく。

1.1. Navier-Stokes 方程式

次元 n は $n \geq 2$ とし, Ω を外部領域, すなわち次を満たす正定数 R_0 が存在する領域とする:

$$\Omega \setminus B_{R_0} = \mathbb{R}^n \setminus B_{R_0}. \quad (\text{D})$$

ただし, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ とした. この外部領域 Ω に対して, 次の Navier-Stokes 方程式を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad u(t, x) = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = a(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (\text{NS})$$

ここで $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$ と $\pi(t, x)$ は, 非圧縮性流体の流速と圧力を表し, とともに未知量である. また, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ は初期流速, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ は外力でありともに既知量である.

1.2. 研究の軌跡と本研究の動機

Navier-Stokes 方程式の研究の大きなテーマに

- 小さい初期値に対する時間大域解の一意存在と時間無限大での漸近挙動
- 定常問題の解 (定常解) の (漸近) 安定性

がある¹. 本研究の目的は, Navier-Stokes 方程式を重み付き L^p 空間で考察し, これらのテーマに対して 1 つの解答を与えることである. まずは, なぜ重み付き L^p 空間で Navier-Stokes 方程式を考えるべきかという考えに至ったか (あくまでも個人的な意見だが) 研究の軌跡を踏まえながら説明しよう.

Navier-Stokes 方程式は今まで多くの研究者によって研究がなされてきた. しかし, 未だに条件付きでしか時間大域解の一意存在性が示されていない. 困難さの

* e-mail: tkubo@math.tsukuba.ac.jp

¹ 他にも, 弱解に関する研究, 回転する物体の周りを流れる流体の研究, 自由境界問題など多くの研究テーマがある. 最大正則性などを用いての研究も最近盛んに行われており, 柴田-久保 [32] に詳しい解説がある.

理由の1つが圧力項である。それは、(NS)は圧力 π に関する時間発展方程式でないため速度場 u と同様に圧力項 π を扱うことが出来ないだけでない。 $\nabla \cdot u = 0$ を用いて Navier-Stokes 方程式の第1式から π を消去すると微分積分方程式になり解析の困難さがはるかに増すからである。実際、Navier-Stokes 方程式の第1式に $\nabla \cdot$ を施せば、 $\nabla \cdot u = 0$ より、

$$\Delta \pi = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j (u_i u_j)$$

を得、簡単のため、考える領域を \mathbb{R}^n とすると、ラプラス方程式の基本解 $E(x, y)$ を用いて、

$$\pi(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j \int_{\mathbb{R}^n} E(x, y) (u_i u_j)(y) dy$$

と変形できる。これをもとの(NS)に代入すれば微分積分方程式となってしまうからである。この解析の難しさは大雑把に言えば、宮崎での流体の動きを知るために \mathbb{R}^n 上での積分があるために地球の裏側での流体の動きも知らなければいけないということと同じことである。

この困難さを打破するために実解析的には次の Helmholtz 分解

$$L^p(\Omega) = L^p_\sigma(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$$

がよく使われる。ただし、

$$L^p_\sigma(\Omega) = \overline{\{u \mid u_j \in C_0^\infty(\Omega), \nabla \cdot u = 0\}}^{\|\cdot\|_{L^p}},$$

$$G^p(\Omega) = \{\nabla \pi \in L^p(\Omega) \mid \pi \in L^p_{loc}(\overline{\Omega})\}$$

である ($n \geq 2, 1 < p < \infty$)。これにより速度場と圧力を分離して考えることができる。ただし、Helmholtz 分解は任意の領域に対して成り立つわけではなく、有界領域、全空間、半空間、外部領域、perturbed half-space²、aperture domain³など限られた領域でのみ示されている ([11],[12], [28])。限られた領域ではあるが、Navier-Stokes 方程式の困難さの1つである圧力項を消去できるため実解析的にはよく使われている。この Helmholtz 分解が成り立つ領域においては、Navier-Stokes 方程式(NS)の線形化方程式である Stokes 方程式に対する解作用素 (Stokes 半群) の $L^p - L^q$ 評価が示されている：

$$\|e^{-tA} f\|_{L^q} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_{L^p}, \quad (1.1)$$

$$\|\nabla e^{-tA} f\|_{L^q} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{1}{2}} \|f\|_{L^p}. \quad (1.2)$$

² Ω が perturbed half-space であるとは、 Ω に対して次を満たす正定数 $R > 0$ が存在するときである： $\Omega \setminus B_R = \mathbb{R}_+^n \setminus B_R$.

³ Ω が aperture domain であるとは、 Ω に対して次を満たす正定数 $R > 0$ が存在するときである： $\Omega \setminus B_R = (\mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{R}_-^n) \setminus B_R$. ただし $\mathbb{R}_\pm^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 0\}$.

全空間 \mathbb{R}^n においては Young の不等式と解の表現公式を用いて $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ($p \neq \infty, q \neq 1$) で (1.1), (1.2) が示されている. 半空間 \mathbb{R}_+^n の場合も, Ukai [34], Borchers-Miyakawa [4] により全空間と同じ指数の条件で, (1.1), (1.2) が示されている. Ω が平行平板間の領域の場合は Abe-Shibata[1] により $1 < p \leq q < \infty$ で (1.1), (1.2) が示されている. Ω が有界領域の場合は, Giga[16] により Stokes 作用素の分数べきを用いて $1 < p \leq q < \infty$ に対して (1.1), (1.2) が示されている⁴. さらに, Ω が外部領域の場合は, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ($p \neq \infty, q \neq 1$) に対して (1.1) が成立し, $1 \leq p \leq q \leq n$ ($q \neq 1$) に対して (1.2) が成り立つことが示されている (Iwashita [19], Chen [6], Shibata[31], Borchers-Varnhorn [5], Dan-Shibata [7], [8], Dan-Kobayashi-Shibata [9], Maremonti-Solonnikov [27] を参照のこと). 他にも perturbed half-space や aperture domain でも, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ($p \neq \infty, q \neq 1$) に対して (1.1) が, $1 \leq p \leq q < \infty$ ($q \neq 1$) に対して (1.2) が示されている (Kubo-Shibata[26], Abels [2], Hishida[18], Kubo[23] を参照のこと).

また, $L^p - L^q$ 評価を基に縮小写像の原理を用いて小さい初期値に対する時間大域解の一意存在や次のような時間無限大での漸近挙動なども示されている:
5

$$\|u(t)\|_{L^r} \leq Ct^{-\frac{1}{2} + \frac{n}{2r}} \quad (n \leq r \leq \infty), \quad \|\nabla u(t)\|_{L^n} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} \quad (t > 0). \quad (1.3)$$

これを 0 定常解の漸近安定性の立場から見れば, (1.3) は摂動の時間無限大での漸近レートを表していることに注意する.

一方, 定常解の漸近安定性に関する研究も盛んに行われてきている. 定常解の存在は $n \geq 3$ において外部領域や半空間などの限られた領域のみでしか示されていないのが現状である: Novotny-Padula [30], Borchers-Miyakawa [4] (外部領域), Galdi [15], Shibata-Kubo[32] (半空間). ここでは外部領域の場合に限定して結果を紹介しよう. (NS) に対する定常問題に対して外力 f がある条件を満たせば, 以下を満たす定常解の存在が示されている:

$$|u_s(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n-2}}, \quad |\nabla u_s(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n-1}}. \quad (1.4)$$

次に, 定常解の安定性について考察を行う. 定常解 (u_s, π_s) に摂動 $(w(t), \theta(t))$ を加えたものが (NS) の解であるとして, 摂動 $(w(t), \theta(t))$ が満たすべき方程式を考える:

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + (u_s \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)u_s + (w \cdot \nabla)w + \nabla \theta = 0, & \nabla \cdot w = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w(0, x) = w_0. \end{cases}$$

⁴ 領域 Ω が有界領域または平行平板間の領域である場合は, 指数関数的減衰を得ることもできる.

⁵ 詳しくは, 以下の文献を参照せよ: Giga-Miyakawa [17] (有界領域), Kato [20] (全空間), Ukai [34], Kozono[21] (半空間), Iwashita [19] (外部領域), Abe-Shibata [1] (平行平板). ただし, 外部領域以外では $\nabla u(t)$ の L^p ノルムでの減衰評価も得られている.

この摂動方程式に対して, Kozono-Ogawa[25]は初期摂動 w_0 の L^n ノルム $\|w_0\|_{L^n}$ と $\|u_s\|_{L^n} + \|\nabla u_s\|_{L^{n/2}}$ が十分小さい時に, 定常解 u_s が漸近安定であることを示す次の評価を得ている.

$$\|w(t)\|_{L^r} \leq Ct^{-\frac{1}{2} + \frac{n}{2r}} \quad (n \leq r < \infty). \quad (1.5)$$

同様に, Borchers-Miyakawa[4]は $\|w_0\|_{L^n}$ と $\|x|u_s\|_{L^\infty}$ が十分小さい時に, Kozono-Yamazaki[22]は $\|w_0\|_{L^n}$ と $\|u_s\|_{L^{n,\infty}}$ が十分小さい時に (1.5) を示している⁶.

ここで, 0定常解の漸近レート (1.3) と比較をすると $\|\nabla w(t)\|_{L^n}$ や $\|w(t)\|_{L^\infty}$ の評価は得られていないことがわかる. これは, 摂動方程式が変数係数の方程式であるにも関わらず, 定数係数の方程式で使われていた手法を用いていたためである (と個人的には考えている). そのため, 変数係数に対する理論作りをすべきではないかと考えて本研究をスタートさせたのが出発点である. つまり, 重み付き評価を用いて変数係数となっている定常解を重み関数として処理して議論できないかと考えて, 重み付き空間で (NS) を考察したいというのがこの研究の動機である.

1.3. 既存の結果 (Muckenhoupt class, 重み付き L^p 空間)

定義 1.1 (Muckenhoupt class \mathcal{A}_p). $1 < p < \infty$ とする. 重み関数 $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が Muckenhoupt クラス \mathcal{A}_p であるとは,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty$$

を満たすときを言う. ここで, \sup は立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 上を動き, $|Q|$ は Q の Lebesgue 測度である.

Muckenhoupt クラス \mathcal{A}_p の要素の例としては, $w(x) = |x|^\alpha$, $\langle x \rangle^\alpha := (1+|x|^2)^{\alpha/2}$ ($-n < \alpha < n(p-1)$), $w(x) = (1+|x_n|)^\alpha$ ($-1 < \alpha < p-1$) などが知られている.

重み関数 $w \in \mathcal{A}_p$ を用いて, 次のように重み付き L^p 空間を定義する:

$$L^p_w(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\bar{\Omega}) \mid \|u\|_{p,w} = \|uw^{1/p}\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p w dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

同様にして, Sobolev 空間等についても次のように定義する:

$$W^{2,p}_w(\Omega) = \{u \in L^p_w(\Omega) \mid \nabla^\alpha u \in L^p_w(\Omega), |\alpha| \leq 2\}.$$

重み付き L^p 空間 $L^p_w(\Omega)$ において (NS) を考察するのが本研究の目的である. (NS) の研究の第1段階は, 1.2節で紹介した通り Helmholtz 分解を示すことである:

定理 1.1 (Helmholtz 分解). $n \geq 2$, $1 < p < \infty$, $w \in \mathcal{A}_p$ とする.

$$\begin{aligned} L^p_{w,\sigma}(\Omega) &= \overline{\{u \mid u_j \in C^\infty_0(\Omega), \nabla \cdot u = 0\}}^{\|\cdot\|_{L^p_w}}, \\ G^p_w(\Omega) &= \{\nabla \pi \in L^p_w(\Omega) \mid \pi \in L^1_{loc}(\bar{\Omega})\} \end{aligned}$$

とするとき, $L^p_w(\Omega) = L^p_{w,\sigma}(\Omega) \oplus G^p_w(\Omega)$ が成り立つ.

⁶ $L^{n,\infty}(\Omega)$ はローレンツ空間

定理 1.1 は次により示されている：Farwig-Sohr[10]（全空間 \mathbb{R}^n ，外部領域），Fröhlich[13]（半空間），Kobayashi-Kubo[24]（perturbed half-space）。

P を $L_w^p(\Omega)$ から $L_{w,\sigma}^p(\Omega)$ への Helmholtz 射影とすると、Stokes 作用素 $A = -P\Delta$ は $L_{w,\sigma}^p(\Omega)$ 上の解析的半群 e^{-tA} (Stokes 半群) を生成することも示されている ([10], [13], [24])。

2. 主結果 (Stokes 半群の重み付き $L^p - L^q$ 評価)

重み関数 $w(x)$ を $w(x) = \langle x \rangle^s$ の形のものに限定して考える。

定理 2.1 (外部領域での重み付き $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2$, $1 < p \leq q < \infty$ とする. また $-n/q < s' \leq s < n(1 - 1/p)$ とする. このとき, $a \in L_w^p(\Omega)$ に対して, 次が成立する: $t > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{s'} e^{-tA} P a\|_{L^q(\Omega)} &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\Omega)}, \\ \|\langle x \rangle^{s'} \nabla e^{-tA} P a\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \left(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} + t^{-\frac{n}{2p}} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \right) \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

注 2.1. 重みがない場合の結果 (Iwashita [19], Dan-Kobayashi-Shibata[9]):

$$\begin{aligned} \|e^{-tA} P a\|_{L^q(\Omega)} &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|a\|_{L^p(\Omega)}, \\ \|\nabla e^{-tA} P a\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \left(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{n}{2p}} \right) \|a\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

と比較してみると重み $\langle x \rangle^s$ がつくことで、時間無限大での減衰のレートがよくなっていることがわかる。

注 2.2. 定理 2.1 の主張で特筆すべきことをあげておく。

- 重み関数の指数に対する条件 $-n/q < s' \leq s < n(1 - 1/p)$ は $\langle x \rangle^s$ が *Muckenhoupt class* に属するための条件である。
- 負の重みや左右で異なる重みをつけられる。
- 証明を見ると分かるが、全空間のときは、

$$\|\langle x \rangle^{s'} \nabla e^{-tA} P a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

なる評価が得られる。外部領域との領域の違いはここに現れる。

3. 証明の概略

3.1. 鍵となる 2 つの評価

定理 2.1 の証明の基盤にあるのは cut-off テクニックである。このテクニックは『外部領域の解を全空間の解と有界領域の解の足し合わせで表そう』というのが基本的な考え方である。そのため有用な 2 つの評価を紹介する：

補題 3.1 (局所減衰定理). $n \geq 2$, $1 < p < \infty$ とし, R_0 を (D) を満たす正定数とする. このとき, $R > R_0$ に対して次を満たす正定数 $C_{p,R}$ が存在する:

$$\begin{aligned} \|\partial_t^m e^{-tA} a\|_{W_p^2(\Omega_R)} &\leq C_{p,R} t^{-n/2-m} \|a\|_{L^p(\Omega)}, & n \geq 3, \\ \|\partial_t^m e^{-tA} a\|_{W_p^2(\Omega_R)} &\leq C_{p,R} t^{-1-m} (\log t)^{-2} \|a\|_{L^p(\Omega)}, & n = 2. \end{aligned}$$

ただし, $t \geq 1, a \in L_{\sigma,R}^p(\Omega) = \{f \in L_\sigma^p(\Omega) \mid \text{supp} f \subset B_R\}, \Omega_R = \Omega \cap B_R$.

補題 3.2 (\mathbb{R}^n における重み付き $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2, 1 < p \leq q < \infty$ とする. このとき, $a \in L_w^p(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}_0^n, k \in \mathbb{N}_0, t > 0$ に対して, 次が成り立つ:

- $-n/q < s' \leq s < n(1 - 1/p)$ に対して,

$$\|\langle x \rangle^{s'} \partial_t^k \nabla^\alpha e^{-tA} P a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}-k} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

- $s' \leq s \leq 0$ に対して,

$$\|\langle x \rangle^{s'} \partial_t^k \nabla^\alpha e^{-tA} P a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2p}-\frac{|\alpha|}{2}-k} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s a\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

補題 3.1 は有界領域 Ω_R での評価であり, $n \geq 3$ のときに Dan-Kobayashi-Shibata [9] により, $n = 2$ のときに, Dan-Shibata [7] により示されている.

補題 3.2 は全空間 \mathbb{R}^n での評価であり, Young の不等式と次の評価 (Murata [29]) により導かれる:

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} \langle y \rangle^{-2r} dy \leq M(1+t)^{-r}, \quad 0 \leq r < n/2.$$

3.2. 主定理の証明の概略

$0 < t < 2$ の場合については, 次のレゾルベント評価

$$|\lambda| \|u\|_{L_w^p(\Omega)} + |\lambda|^{1/2} \|\nabla u\|_{L_w^p(\Omega)} + \|\nabla^2 u\|_{L_w^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_w^p(\Omega)}$$

を用いて,

$$\|u\|_{L_w^p} \leq C \|f\|_{L_w^p}, \quad \|\nabla u\|_{L_w^p} \leq C t^{-1/2} \|f\|_{L_w^p}, \quad \|\nabla^2 u\|_{L_w^p} \leq C t^{-1} \|f\|_{L_w^p}$$

を示すことができ, 実補間と組み合わせることで示される. そのため, ここでは, $t \geq 2$ について焦点を当てて証明の概略を紹介する.

補題 3.1, 3.2 を基に外部領域の Stokes 半群の Ω_R での評価から示そう.

補題 3.3. $1 < q < \infty, -\frac{n}{q} < s' \leq s < n(1 - \frac{1}{q})$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\|\langle x \rangle^{s'} u\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq C t^{-\frac{n}{2q}-\frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}, \quad t \geq 2. \quad (3.1)$$

Proof. cut-off関数 $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; [0, 1])$ を以下で定義する:

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \leq R+1, \\ 0 & \text{for } |x| \geq R+2. \end{cases}$$

$v_0 = (1 - \varphi_R)u_0 + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R) \cdot u_0]$ ⁷ とおくと,

$$\|\langle x \rangle^s v_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}, \quad \left(1 < q < \infty, -\frac{n}{q} < s < n(1 - \frac{1}{q})\right)$$

が成り立つ. また, $\tilde{v}(t, x) = e^{-tA_{\mathbb{R}^n}} v_0$ とおくと

$$\tilde{v} \in C^\infty((0, \infty), D(A_{\mathbb{R}^n})) \cap C^0([0, \infty); L_{w, \sigma}^q(\mathbb{R}^n))$$

であり, $\partial_t \tilde{v} - \Delta \tilde{v} = 0$ in \mathbb{R}^n , $\tilde{v}|_{t=0} = v_0$ を満たす. また, $\tilde{v} = e^{-tA_{\mathbb{R}^n}} v_0$ であるから, 補題3.2より

$$\|\langle x \rangle^{s'} \partial_t^k \nabla^\alpha \tilde{v}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2p} - \frac{|\alpha|}{2} - k} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する. 次に, $v = (1 - \varphi_R)\tilde{v} + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R) \cdot \tilde{v}]$ とおくと v は

$$\partial_t v - \Delta v = F \quad \text{in } \Omega, \quad v|_{t=0} = v_0$$

を満たす. ただし,

$$F = 2(\Delta\varphi_R) \cdot \nabla \tilde{v} + (\Delta\varphi_R)\tilde{v} + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R) \cdot \Delta \tilde{v}] - \Delta \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R) \cdot \tilde{v}].$$

ここで, cut-off関数の性質から $\text{supp } F \subset D_{R+1} = \{x \mid R+1 < |x| < R+2\}$ となることに注意すると, $k = 0, 1, 1 < p \leq q < \infty, -\frac{n}{q} < s' \leq s < n(1 - \frac{1}{p})$ に対して,

$$\|\langle x \rangle^{s'} \partial_t^k F(x, t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C t^{-\frac{n}{2p} - k} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \quad (t \geq 1) \quad (3.2)$$

などが示せる. 実際, $\tilde{v}(x, t)$ の評価を用いて以下のように示せる:

$$\|\langle x \rangle^{s'} F(x, t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\tilde{v}\|_{W_q^1(\Omega_R)} \leq C \|\tilde{v}\|_{W_\infty^1(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2p} - \frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

同様にして, $v = (1 - \varphi_R)\tilde{v} + \mathbb{B}[(\nabla\varphi_R) \cdot \tilde{v}]$ に対しても次の評価を示せる:

$$\|\langle x \rangle^{s'} v(x, t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}, \quad (3.3)$$

$$\|\langle x \rangle^{s'} v(x, t)\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq C t^{-\frac{n}{2q} - \frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}. \quad (3.4)$$

ただし, $1 < p \leq q < \infty, -\frac{n}{q} < s' \leq s < n(1 - \frac{1}{p})$ である.

⁷ $\mathbb{B}[\cdot]$ は Bogvskii作用素であり, $\nabla \cdot v_0 = 0$ を成り立たせるようにするためのものである. 詳しくは, [3] 参照のこと.

補題3.3を証明するためには、 v が(3.4)を満たすので $w = u - v$ の評価をすれば十分である。そこで (w, π) について考える。 (w, π) は次を満たす：

$$\partial_t w - \Delta w + \nabla \pi = -F, \quad \nabla \cdot w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad w(0) = w_0.$$

ただし、 $w_0 = \varphi_R u_0 - \mathbb{B}[(\nabla \varphi_R) \cdot u_0]$ である。Duhamelの原理から、 $w(t)$ は次のように表せる：

$$w(t) = e^{-tA_\Omega} w_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)A_\Omega} P_\Omega F(\tau) d\tau.$$

そこで、 $1 < q < \infty$, $-\frac{n}{q} < s' \leq s < n(1 - \frac{1}{q})$ に対して $w(t)$ に対して次を示そう：

$$\|\langle x \rangle^{s'} w\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq C t^{-\frac{n}{2q} - \frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)} \quad (3.5)$$

$w_1 = e^{-tA_\Omega} w_0$ とおくと、局所減衰定理（補題3.1）から

$$\|\langle x \rangle^{s'} w_1\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq C t^{-\frac{n}{2}} \|w_0\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq C t^{-\frac{n}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}.$$

次に、 $w_2 = w - w_1$ を評価するために積分区間を3つに分ける：⁸

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_0^1 e^{-(t-\tau)A} P F(\tau) d\tau + \int_1^{t-1} e^{-(t-\tau)A} P F(\tau) d\tau + \int_{t-1}^t e^{-(t-\tau)A} P F(\tau) d\tau \\ &= w_2^1 + w_2^2 + w_2^3. \end{aligned}$$

w_2^1 については、局所減衰定理（補題3.1）と $\|\langle x \rangle^s F(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}$ から

$$w_2^1 \leq C \int_0^1 (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq C t^{-\frac{n}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}$$

が導ける。ここで、 $-\frac{n}{2} < -\frac{n}{2q} - \frac{s}{2}$ に注意すれば、 $w_2^1 \leq C t^{-\frac{n}{2q} - \frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^q(\Omega)}$ を得る。同様に w_2^2 , w_2^3 についても評価できる。よって(3.5)が示された。よって、補題3.3が示された。□

次に、 $\Omega^R = \Omega \setminus B_R$ での評価を行う。

補題 3.4. $1 < p \leq q < \infty$, $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$ とする。 $-\frac{n}{q} < s' \leq s < n(1 - \frac{1}{p})$ に対して、次が成り立つ：

$$\|\langle x \rangle^{s'} u\|_{L^q(\Omega^{R+1})} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \quad (t \geq 2).$$

⁸記号を簡単にするために、混乱がない場合は A_Ω や P_Ω の添え字を省略する。

Proof. 補題3.3で定義された v に対する評価は (3.3), (3.4) によりすでにできているので, ここでも $w = u - v$ について評価をすれば十分. そこで, $z(x, t) = \varphi^R w(x, t) - \mathbb{B}[(\nabla \varphi^R) \cdot w]$ ($\varphi^R = 1 - \varphi_{R-1}$) とおくと

$$\partial_t z - \Delta z + \nabla(\varphi^R \pi) = G, \quad \operatorname{div} z = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad z|_{t=0} = 0 \quad (3.6)$$

が成立する. ただし,

$$\begin{aligned} G = & -2(\nabla \varphi^R) \cdot \nabla w - (\Delta \varphi^R) w \\ & + \Delta \mathbb{B}[(\nabla \varphi^R) \cdot w] - \mathbb{B}[(\nabla \varphi^R) \Delta w] + (\nabla \varphi^R) \pi + \mathbb{B}[(\nabla \varphi^R) \cdot \nabla \pi] \end{aligned} \quad (3.7)$$

である. このとき, G に対する次の評価を示すことができる.

$$\|\langle x \rangle^{s'} G(t)\|_{L^\delta(\mathbb{R}^n)} + \|\langle x \rangle^{s'} G(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2p} - \frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.8)$$

ただし, $1 < \delta < p$. 方程式 (3.6) に Helmholtz 射影 $P_{\mathbb{R}^n}$ を施すと

$$\partial_t z + A_{\mathbb{R}^n} z = P_{\mathbb{R}^n} G, \quad z(0) = 0.$$

が得られ, Duhamel の原理を用いると $z(t)$ は

$$z(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P G(\tau) d\tau$$

とかける. ここで, G の評価を用いることで次が示せる:

$$\|\langle x \rangle^{s'} z(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.9)$$

実際,

$$z(t) = \left[\int_0^1 + \int_1^{t-1} + \int_{t-1}^t \right] e^{-(t-\tau)A} P G(\tau) d\tau = z_1 + z_2 + z_3$$

とおくと, z_1, z_2 は G の評価を用いて示せる. そこで, z_3 を評価しよう. $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$ より

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{s'} z_3\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} & \leq \int_{t-1}^t \|\langle x \rangle^{s'} e^{-(t-\tau)A} P G(\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} d\tau \\ & \leq C \int_{t-1}^t \|\langle x \rangle^{s'} e^{-(t-\tau)A} P G(\tau)\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} d\tau \\ & \leq C \int_{t-1}^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{n}{2p} - \frac{s}{2}} d\tau \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq C t^{-\frac{n}{2p} - \frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

よって,

$$\|\langle x \rangle^{s'} z(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が示される. Ω^{R+1} 上では $z(t) = w(t)$ となることから, 補題3.4が示された. \square

定理 2.1 の証明の概略. 最後に 2 つの補題を用いて重み付き $L^p - L^q$ 評価を示そう. 補題 3.4 から, $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$, $t \geq 2$ に対して

$$\|\langle x \rangle^{s'} e^{-tA} u_0\|_{L^q(\Omega_{R+1})} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

が成立する. 一方, $e^{-tA} u_0$ の Ω_R での評価と Sobolev の埋蔵定理から

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{s'} e^{-tA} u_0\|_{L^q(\Omega_{R+2})} &\leq C \|e^{-tA} u_0\|_{L^q(\Omega_{R+2})} \leq C \|e^{-tA} u_0\|_{W_p^1(\Omega_{R+2})} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2p}} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

よって, $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$, $t \geq 2$ に対して

$$\|\langle x \rangle^{s'} e^{-tA} u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ. 指数の制限: $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < 1$ は半群の性質を用いて除くことができるので, Stokes 半群の重み付き $L^p - L^q$ 評価が示される.

次に, $\nabla e^{-tA} u_0$ に対する $L^p - L^q$ 評価を示そう. すなわち次を示す:

$$\|\langle x \rangle^{s'} \nabla e^{-tA} u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{s-s'}{2}} \max(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{n}{2q} - \frac{s'}{2}}) \|\langle x \rangle^s u_0\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.10)$$

上を示すために, 以下の評価から示そう: $1 < p < \infty$ に対して

$$\|\langle x \rangle^{s'} \nabla z(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \max(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{n}{2p} - \frac{s'}{2}}) \|\langle x \rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.11)$$

ここで, $\nabla z(t)$ を 3 つに分ける:

$$\nabla z(t) \leq \left[\int_0^1 + \int_1^{t-1} + \int_{t-1}^t \right] \nabla e^{-(t-\tau)A} P G(\tau) d\tau = \nabla z^1 + \nabla z^2 + \nabla z^3.$$

ただし, $G(t)$ は (3.7) で与えられる. 例えば, ∇z^2 を \mathbb{R}^n における $L^p - L^q$ 評価により次のように示せる:

$$\begin{aligned} &\|\langle x \rangle^{s'} \nabla z^2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_1^{t-1} \|\langle x \rangle^{s'} \nabla e^{-(t-\tau)A} P G(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} d\tau \\ &\leq C \int_1^{t-1} (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{p})} (1+t-\tau)^{-\frac{s-s'}{2}} \|\langle x \rangle^s G(\tau)\|_{L^\delta(\mathbb{R}^n)} d\tau \\ &\leq C \int_1^{t-1} (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{p}) - \frac{s-s'}{2}} \tau^{-\frac{n}{2p} - \frac{s'}{2}} d\tau \|\langle x \rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)} \quad (\delta < p) \\ &\leq C t^{-\frac{1}{2}} \|\langle x \rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

よって, (3.11) が示された.

(3.11)を用いて(3.10)を示す. $|x| \geq R+1$ では $z(x, t) = w(x, t)$ となるので,

$$\|\langle x \rangle^{s'} \nabla w(t)\|_{L^p(\Omega_{R+1})} \leq C \max(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{n}{2p} - \frac{s'}{2}}) \|\langle x \rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立ち, ∇v の評価(3.4)と合わせて

$$\|\langle x \rangle^{s'} \nabla e^{-tA} u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq C \max(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{n}{2p} - \frac{s'}{2}}) \|\langle x \rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つことが分かる. よって, 半群の性質から

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{s'} \nabla e^{-tA} u_0\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \max(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{n}{2p} - \frac{s'}{2}}) \|\langle x \rangle^{s'} e^{-tA/2} u_0\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} \max(t^{-\frac{1}{2}}, t^{-\frac{n}{2q} - \frac{s'}{2}}) \|\langle x \rangle^{s'} u_0\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

となり, (3.10)が示される. \square

4. Navier-Stokes 方程式への応用

最後に Stokes 半群の $L^p - L^q$ 評価の Navier-Stokes 方程式への応用について紹介しよう. 簡単のため $f = 0$ とする. Navier-Stokes 方程式 (NS) に Helmholtz 射影 P を施すと

$$\partial_t u + Au + P[(u \cdot \nabla)u] = 0, \quad u(0) = a.$$

Duhamel の原理から $u(t)$ は次のように表せる:

$$u(t) = e^{-tA} a - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P[(u \cdot \nabla)u](\tau) d\tau. \quad (\text{IE})$$

不動点定理と重み付き $L^p - L^q$ 評価を用いることで以下が示せる:

定理 4.1 (小さい初期値に対する時間大域解の存在定理). $n \geq 2$, $0 \leq s < n-1$ とする. このとき, 次を満たす定数 $\delta = \delta(\Omega, n, s) > 0$ が存在する: もし, $a \in L_{w,\sigma}^n(\Omega)$ が $\|\langle x \rangle^s a\|_{L^n(\Omega)} \leq \delta$ であれば積分方程式 (IE) は一意な強解 $u(t)$ をもつ. さらに, 次を満たす:

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{s'} u(t)\|_{L^q(\Omega)} &\leq C t^{-\frac{1}{2} + \frac{n}{2q}} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}}, \\ \|\langle x \rangle^{s'} \nabla u(t)\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \left(t^{-1 + \frac{n}{2q}} (1+t)^{-\frac{s-s'}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{s}{2}} \right). \end{aligned}$$

ただし, $n \leq q < \infty$, $-\frac{n}{q} < s' \leq s$, $t > 0$.

5. Appendix

おまけとして, 関連する事柄で最近わかったことを紹介する.

5.1. 斉次重み $|x|^s$ の場合

斉次重み関数 $|x|^s$ の場合について考える. Stokes 半群の $L^p - L^q$ 評価は以下のようになる.

定理 5.1 (\mathbb{R}^n における重み付き $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2, 1 < p \leq q < \infty, -n/q < s' \leq s < n(1 - 1/p)$ とする. このとき, $a \in L_w^q(\mathbb{R}^n)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\| |x|^{s'} \nabla^\alpha e^{-tA} P a \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}} t^{-\frac{s-s'}{2}} \| |x|^s a \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

ただし, $t > 0, |\alpha| = 0, 1$ である.

非斉次重み関数の場合と違うところは, 両辺の重みの違いにより現れる減衰項 $t^{-(s-s')/2}$ である. また, この $L^p - L^q$ 評価を Navier-Stokes 方程式へ応用すると以下が得られる:

定理 5.2 (小さい初期値に対する時間大域解の存在定理). $n \geq 2, 0 \leq s < 1$. もし, $a \in L_{w,\sigma}^{n/(1-s)}(\mathbb{R}^n)$ に対し $\| |x|^s a \|_{L^{n/(1-s)}(\mathbb{R}^n)}$ が十分小さければ, (IE) は一意な強解 $u(t)$ をもつ.

注 5.1. 初期値が属する空間が通常空間 $L_\sigma^n(\mathbb{R}^n)$ と異なる. この理由はスケール不変性の観点から初期値が属する空間が $L_{w,\sigma}^{n/(1-s)}(\mathbb{R}^n)$ となるからである.

5.2. 非等方的重みの場合

非等方的な重みについても考えることができる. 例えば, $x = (x', x_n)$ に対して, x' 方向と x_n 方向で別々の重みをつけた場合には次のような $L^p - L^q$ 評価を示すことができる:

定理 5.3 (\mathbb{R}_+^n における重み付き $L^p - L^q$ 評価). $n \geq 2, 1 < p \leq q < \infty$ とし,

$$-(n-1)/q < s'_1 \leq s_1 < (n-1)(1-1/p), \quad -1/q < s'_n \leq s_n < 1-1/p$$

とする. このとき, $a \in L_w^q(\mathbb{R}_+^n)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\| \langle x' \rangle^{s'_1} \langle x_n \rangle^{s'_n} e^{-tA} P a \|_{L^q} \leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}-k} (1+t)^{-\frac{s_1-s'_1}{2}-\frac{s_n-s'_n}{2}} \| \langle x' \rangle^{s_1} \langle x_n \rangle^{s_n} a \|_{L^p}.$$

これは, \mathbb{R}^n での評価をやり直し, Ukai の表現公式を用いることで示せる.

参考文献

- [1] T. Abe and Y. Shibata, *On a resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, Part 2 $\lambda = 0$ case*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **5**(2003), 245–274.
- [2] H. Abels, *L^q - L^r estimates for the non-stationary Stokes equations in an aperture domain*, Z. Anal. Anwendungen **21**(2002), 159–178.
- [3] M. E. Bogovskiĭ, *Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **248**(1979), 1037–1040, English Transl.: Soviet Math. Dokl. **20**(1979), 1094–1098.

- [4] W. Borchers and T. Miyakawa, *L^2 decay for the Navier-Stokes flow in halfspaces.* Math. Ann. **282**(1988), 139-155.
- [5] W. Borchers and W. Varnhorn, *On the boundedness of the Stokes semigroup in two dimensional exterior domains,* Math.Z., **213**(1993), 275-299.
- [6] Z. M. Chen, *Solutions of the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in exterior domains,* Pacific J.Math., **159**(1993),227-240.
- [7] W. Dan and Y. Shibata, *On the $L_q - L_r$ estimates of the Stokes semigroup in a two dimensional exterior domain,* J. Math. Soc. Japan **51**(1999), 181–207.
- [8] W. Dan and Y. Shibata, *Remark on the L_q-L_∞ estimate of the Stokes semigroup in a 2-dimensional exterior domain,* Pacific J. Math. **189**(1999), 223–240.
- [9] W. Dan, T. Kobayashi and Y. Shibata, *On the local energy decay approach to some fluid flow in exterior domain,* Recent Topics on Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid, 1–51, Lecture Notes Numer. Appl. Math. **16**, Kinokuniya, Tokyo, 1998.
- [10] R. Farwig and H. Sohr, *Weighted L^q -theory for the Stokes resolvent in exterior domains,* J. Math. Soc. Japan, **49**(1997), No.2, 251-288.
- [11] R. Farwig and H. Sohr, *Generalized resolvent estimates for the Stokes system in bounded and unbounded domains ,* J. Math. Soc. Japan **46** No.4(1994), 607-643.
- [12] R. Farwig and H. Sohr, *Helmholtz decomposition and Stokes resolvent system for aperture domains in L^q -space,* Analysis, **16**(1996), 1-26.
- [13] A. Fröhlich, *Helmholtz decomposition of Weighted L^q spaces for Muckenhoupt Weights,* Ann. Univ. Ferrara-Sez. VII -Sc. Mat. Vol. XLVI (2000), 11-19.
- [14] A. Fröhlich, *The Stokes operator in weighted L^q -spaces I: weighted estimates for the Stokes Resolvent Problem in a half-space,* J. Math. Fluid Mech. **5**(2003), 166-199.
- [15] G. P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations,* Vol. I: Linear Steady Problems, Vol.II: Nonlinear Steady Problems, Springer Tracts in Natural Philosophy, **38, 39**, Springer-Verlag, New York (1994), 2nd edition(1998).
- [16] Y. Giga, *Domains of fractional powers of the Stokes operator in L^r spaces,* Arch. Rational Mech. Anal. **89**(1985), 251–265.
- [17] Y. Giga and T. Miyakawa, *Solutions in L^r of the Navier-Stokes initial value problem,* Arch. Rational Mech. Anal. **89**(1985), 267–281.
- [18] T. Hishida, *The nonstationary Stokes and Navier-Stokes flows through an aperture.* Advances in Mathematical Fluid Mechanics(2004), 79-123.
- [19] H. Iwashita, *L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L^q spaces,* Math. Ann. **285**(1989), 265-288.
- [20] T. Kato, *Strong L^p -Solutions of the Navier-Stokes Equation in \mathbb{R}^m , with Applications to Weak Solutions.* Math. Z., **187**(1984), 471-480.
- [21] H. Kozono, *Global L^n -solution and its decay property for the Navier-Stokes equations in half-space \mathbb{R}_+^n ,* J. Differential Equations, **79**(1989), 79–88.
- [22] H. Kozono and M. Yamazaki: *On a larger class of stable solutions to the Navier-Stokes equations in exterior domains,* Math. Z. **228**, (1998), 751-785.
- [23] T. Kubo, *The Stokes and Navier-Stokes equations in an aperture domain,* J. Math. Soc. Japan, **59**, No.3(2007), 837-859.

- [24] T. Kobayashi and T. Kubo, *Weighted $L^p - L^q$ estimates of the Stokes semigroup in some unbounded domains*, Tsukuba Journal of Mathematics, **37**(2013) (to appear).
- [25] H. Kozono and T. Ogawa: *On Stability of Navier-Stokes Flows in Exterior Domains*, Arch. Rational. Mech. Anal. **128**(1994) 1-31.
- [26] T. Kubo and Y. Shibata, *On the Stokes and Navier-Stokes equations in a perturbed half-space*, Advances in Differential Equations, Vol.10, No.6(2005), 695-720.
- [27] P. Maremonti and V. A. Solonnikov, *On nonstationary Stokes problem in exterior domains*, Ann. Sc. Norm. Super Pisa, **24**(1997) ,395-449.
- [28] T. Miyakawa, *The Helmholtz decomposition of vector fields in some unbounded domains*, Math. J. Toyama Univ. **17**(1994), 115-149.
- [29] M. Murata: *Large time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations*, Tohoku Math. J. **37**, (1985), 151-195.
- [30] A. Novotny and M. Padula, *Note on decay of solutions of steady Navier-Stokes equations in 3-D exterior domains*, Differential and Integral Equations, **8** (1995), 1833-1842.
- [31] Y. Shibata, *On an exterior initial boundary value problem for Navier-Stokes equations*, Quart. Appl. Math., **LVII**(1999),117-155.
- [32] 柴田良弘・久保隆徹著, 「非線形偏微分方程式」, 朝倉書店
- [33] Y. Shibata and R. Shimada, *On a generalized resolvent estimate for the Stokes system with Robin boundary condition*, J. Math. Soc. Japan, **59**, No.2(2007), 469-519.
- [34] S. Ukai, *A solution formula for the Stokes equation in \mathbb{R}_+^n* . Comm. Pure Appl. Math. **40**(1987), 611-621.

非圧縮流体の局所適切性と非適切性の境目について

澤田 宙広 (岐阜大学工学部)

数学と現象 :

Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2013

2013年11月16日, 宮崎大学

討論・助言:

岩渕 司, 前川 泰則, 三浦 英之, 米田 剛

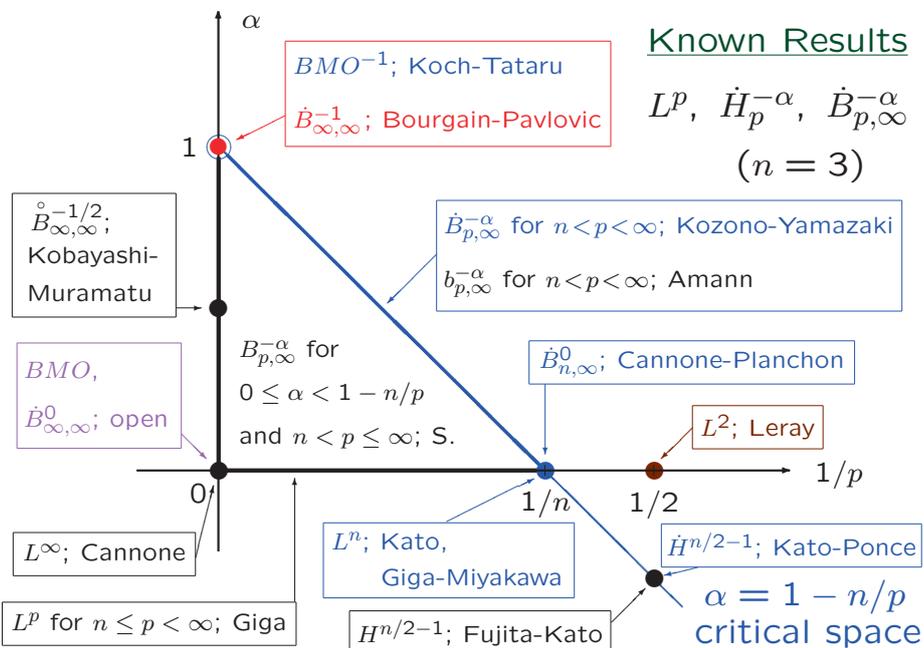
§1. 導入 全空間 \mathbb{R}^3 でナビエ・ストークス方程式を考える:

$$(NS) \begin{cases} u_t - \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

$u = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t))$ 速度場 (未知関数),
 $p = p(x, t)$ 圧力 (未知関数),
 $u_0 = (u_0^1(x), u_0^2(x), u_0^3(x))$ 初期値 (既知関数).

目的: (NS) は $\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}$ で非適切, 具体的には $C([0, T]; \dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ で解の初期値鋭敏性がない.

一方, 熱方程式は $\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}$ で適切 (一意な時間大域解).



関数空間はどんどん広がっている : $n < p < \infty, q > 2$

$$L^n \subset \dot{B}_{p,\infty}^{-1+n/p} \subset \dot{B}_{\infty,2}^{-1} \subset BMO^{-1} \subset \dot{B}_{\infty,q}^{-1} \subset \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$$

これらの空間は自己相似解のスケール変換において不変.

$$u = u_\lambda, \quad \text{但し } u_\lambda(x, t) := \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0;$$

$$\|\lambda u_0(\lambda \cdot)\|_{L^n} = \|u_0\|_{L^n}, \quad \|\lambda u_0(\lambda \cdot)\|_{BMO^{-1}} = \|u_0\|_{BMO^{-1}}.$$

定義 $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$, 齊次ベゾフ空間 $\dot{B}_{p,q}^s$ の定義は

$$\dot{B}_{p,q}^s := \left\{ f \in \mathcal{S}' ; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} := \begin{cases} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{sqk} \|\varphi_k * f\|_{L^p}^q \right]^{1/q} & \text{if } q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{sk} \|\varphi_k * f\|_{L^p} & \text{if } q = \infty. \end{cases}$$

$$\sum_k \hat{\varphi}_k \equiv 1, \quad \hat{\varphi}_k(\xi) = \hat{\varphi}_0(2^{-k}\xi), \quad \text{supp } \hat{\varphi}_0 \subset \left\{ \frac{3}{5} < |\xi| < \frac{5}{3} \right\}.$$

Mild Solution [Fujita-Kato] の方針を紹介する.

$$u_1(t) := e^{t\Delta} u_0 \quad \& \quad u_{j+1}(t) := u_1(t) - \mathcal{B}(u_j) \quad \text{と置く.}$$

$$\text{但し, } e^{t\Delta} := G_t *, \quad G_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\{-|x|^2/4t\},$$

$$\mathbf{P} := (\delta_{ij} + R_i R_j)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad R_i := \partial_i (-\Delta)^{-1/2},$$

$$\mathcal{B}(v, w) := \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbf{P}(v(\tau), \nabla) w(\tau) d\tau, \quad \mathcal{B}(v) := \mathcal{B}(v, v).$$

$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ならば, \exists^1 **mild solution** $u = u_1 - \mathcal{B}(u)$

が $C((0, \tilde{T}]; L^\infty)$ で $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ の極限として捕まえられる :

$$\sup_{j \geq 1} \sup_{t \in (0, \tilde{T}]} \|u_j(t)\|_{L^\infty} \leq 2 \|u_0\|_{L^\infty} \quad \& \quad \boxed{\tilde{T} \geq C \|u_0\|_{L^\infty}^{-2}}.$$

尚, 解 u は (NS) の古典解である. 但し, $\boxed{p = \sum R_i R_j u^i u^j}$.

Q. 何故 mild solution を扱うのか?

ナビエ・ストークス方程式 (及びオイラー方程式) の数学研究において, 解の一意性を議論するには何らかの制限が要る.

実際, [Gibbs] の例: 任意の $g \in C^1([0, T])^n$ に対して,

$$u = g(t), \quad p = -g'(t) \cdot x + C$$

とおくと, これは (NS) を $u_0 = g(0)$ として満たす.

しかし, u を **mild solutions** だと制限すると,

$$u \equiv u_0 = g(0), \quad p \equiv C$$

に一意に定まる. 更に, [J.Kato] の結果: $u_0 \in L^\infty$,

$u, p \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ が弱解 $\Rightarrow u$ は mild solution.

§2. 主結果 簡略化のため, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}$ で表す.

定理1 [Bourgain-Pavlovic] $\forall \delta, \forall T \in (0, 1), \exists u_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ s.t. $\|u_0\| < \delta, \nabla \cdot u_0 = 0, \exists u$: a mild solution in $C([0, T]; \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1})$ and $\|u(T)\| > 1/\delta$.

注意(1) 解は初期値鋭敏性を持たない (パラメーター連続依存性が成り立たない) \Rightarrow 非適切 (ill-posed).

(2) 初期値が小さくても, 大域可解性の獲得は難しい.

(3) 上のクラスにおける解の一意性も絶望的.

定理2 [S.] $\forall T > 0, \exists u_0$ s.t. $\{\|u_j(T)\|\}_{j=1}^{\infty}$ diverges.

§3. 証明 ノルム・インフレーション議論 を用いる.

解の展開: $v_1 := u_1$ 及び $v_{k+1} := u_{k+1} - u_k, k \geq 1$.

これより, $u_j = \sum_{k=1}^j v_k$ & $u = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

任意の $0 < \delta, T \ll 1$ に対して, 次を満たす u_0 を探す:

$$\|u_0\| < \delta, \|v_1(T)\| \ll 1, \|v_2(T)\| > \frac{2}{\delta}, \|v_3(T)\| \ll 1,$$

$$v_4(T) \sim -Kv_2(T), v_5(T) \sim -Kv_3(T), v_6 \sim K^2v_2, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{従って, } \|u(T)\| &\geq \|v_2(T)\| - \|v_1(T)\| - \sum_{k=3}^{\infty} \|v_k(T)\| \\ &\geq \|v_2(T)\| - \|v_2(T)\| \sum_{k=1}^{\infty} K^k > \frac{1}{\delta}, \quad \text{もし } K < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

初期値 $u_0 \in \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ ($\nabla \cdot u_0 = 0$) を次で与える:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= (0, u_0^2(x_1), u_0^3(x_1, x_2)) \\ &= \left(0, \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^r h_s \cos(h_s x_1), \frac{Q}{\sqrt{r}} \sum_{s=1}^r h_s \cos(h_s x_1 - x_2)\right) \end{aligned}$$

但し, $Q > 0$ と $r, \gamma, \eta \in \mathbb{N}$ をパラメーターとし,

$$h_s := 2^{s(s-1)/2} \gamma^{s-1} \eta \quad \text{for } s \in \mathbb{N}.$$

$$\|f\| = \sup_{j \in \mathbb{Z}} j^{-1} \|\varphi_j * f\|_{L^\infty}, \quad \dot{B}_{\infty,\infty}^{-1} \approx \nabla L^\infty, \quad \|f\| \approx \|\nabla^{-1} f\|_{L^\infty}.$$

$$\|u_0\| = C \frac{Q}{\sqrt{r}} \rightarrow 0 \quad (< \delta) \quad \text{as } r \rightarrow \infty.$$

$$\|v_1(t)\| \leq \|G_t\|_{L^1} \|u_0\| < \delta \ll 1 \quad \text{for } \forall t > 0.$$

v_2 の評価 $u_1 = e^{t\Delta}u_0 = (0, u_1^2(x_1, t), u_1^3(x_1, x_2, t))$ なので,

$$(u_1, \nabla)u_1 = (u_1^1 \partial_1 + u_1^2 \partial_2 + u_1^3 \partial_3)(u_1^1, u_1^2, u_1^3).$$

$$\therefore v_2 := -\mathcal{B}(u_1) = (0, 0, v_2^3(x_1, x_2, t)) \quad \& \quad \nabla \cdot v_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} v_2^3 &= -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \frac{Q^2}{r} \sum_{s,q=1}^r h_s h_q e^{-(h_s^2+h_q^2+1)\tau} \cos(h_s x_1) \sin(h_q x_1 - x_2) d\tau \\ &= \frac{Q^2}{r} \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \left\{ \sum_{s=1}^r h_s^2 e^{-(2h_s^2+1)\tau} \frac{1}{2} \sin x_2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^r h_s^2 e^{-(2h_s^2+1)\tau} \frac{1}{2} \sin(2h_s x_1 - x_2) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s \neq q} h_s h_q e^{-(h_s^2+h_q^2+1)\tau} \cos(h_s x_1) \sin(h_q x_1 - x_2) \right\} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sim \frac{Q^2}{2r} \sum_{s=1}^r h_s^2 \int_0^t e^{-(2h_s^2+1)\tau} e^{(t-\tau)\Delta} \sin x_2 d\tau \\ &= \frac{Q^2}{2r} \sum_{s=1}^r h_s^2 \int_0^t e^{-(2h_s^2+1)\tau} e^{-t+\tau} \sin x_2 d\tau \\ &= \frac{Q^2}{2r} (\sin x_2) \sum_{s=1}^r h_s^2 e^{-t} \frac{1 - e^{-2h_s^2 t}}{2h_s^2} \\ &= \frac{Q^2}{4r} (\sin x_2) e^{-t} \sum_{s=1}^r (1 - e^{-2h_s^2 t}) \\ &= \frac{Q^2}{4} (\sin x_2) e^{-t} - \frac{Q^2}{4r} (\sin x_2) e^{-t} \sum_{s=1}^r e^{-2h_s^2 t} \quad (t \sim T). \end{aligned}$$

ここで, $\gamma = 3$, $\eta \sim T^{-1/2}$ とし, $Q > 0$ を十分大きく取ると,

$$\|v_2(T)\| \sim \frac{Q^2}{4} e^{-T} \|\nabla^{-1} \sin x_2\|_{L^\infty} = \frac{Q^2}{4} e^{-T} > \frac{2}{\delta}.$$

v_3, v_4, \dots の評価 $v_2 = (0, 0, v_2^3(x_1, x_2, t))$ なので,

$$u_2 = v_1 + v_2 = (0, v_1^2(x_1, t), v_1^3(x_1, x_2, t) + v_2^3(x_1, x_2, t)).$$

$$\begin{aligned} v_3 := u_3 - u_2 &= u_1 - \mathcal{B}(u_2) - u_1 + \mathcal{B}(u_1) = -\mathcal{B}(u_2) + \mathcal{B}(u_1) \\ &= -\mathcal{B}(v_2) - \mathcal{B}(v_2, v_1) - \mathcal{B}(v_1, v_2) = -\mathcal{B}(v_1, v_2) = (0, 0, v_3^3). \end{aligned}$$

$$\text{同様に, } v_{k+1} = -\mathcal{B}(v_1, v_k) = (0, 0, v_{k+1}^3), \quad \forall k \geq 1.$$

$$\text{更に, } u_j = (0, v_1^2, \sum_{k=1}^j v_k^3), \quad \forall j \geq 1.$$

$$v_3^3 \sim \frac{-Q^3 T e^{-T}}{8\sqrt{r}} \sum_{s=1}^r h_s e^{-h_s^2 T} \{ \cos(h_s x_1 + x_2) + \cos(h_s x_1 - x_2) \}$$

$$v_4^3 \sim -K \frac{Q^2}{4} (\sin x_2) e^{-T} \quad \text{with } K := \frac{(1 - 3e^{-2})Q^2}{8r\eta^2}. \quad \square$$

§4. 注意 この u_0 では, 有限時間爆発は起こらない.

定理3 [S.] $n \geq 2, u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ of

$$u_0 = (a, u_0^2(x_1), u_0^3(x_1, x_2), \dots, u_0^n(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Then $\exists^1 u$: mild sol in $C((0, \infty); L^\infty)$ with $p \equiv 0$,

(UB) $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}$ for $t > 0$.

証明 $u = (a, u^2(x_1, t), \dots, u^n(x_1, \dots, x_{n-1}, t))$ を見る.

$$i \leq j \Rightarrow R_i R_j u^i u^j = (-\Delta)^{-1} \partial_i \partial_j (u^i u^j) \equiv 0.$$

$\therefore p = \sum R_i R_j u^i u^j \equiv 0$. 故に, u はバーガース方程式

(Bur) $u_t - \Delta u + (u, \nabla)u = 0, u|_{t=0} = u_0$

を満たす. 最大値原理から一様有界評価 (UB) が従う. \square

§5. オイラー $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} < \alpha < 1, 2 < p < \infty, s > \frac{n}{2} + 1, q > 1$

$$C^2 \subset \begin{matrix} C^{1+\alpha} \subset C^{1+\varepsilon} \\ H^s \subset B_{p,1}^{1+n/p} \subset B_{\infty,1}^1 \subset B_{\infty,q}^1 \subset B_{\infty,\infty}^1 \subset C^{1-\varepsilon} \end{matrix}$$

[Pak-Park] [Bardos-Titi]

Shear flow [DiPerna-Lions] $u_0 = (0, u_0^2(x_1), u_0^3(x_2))$

に対して, $u = (0, u_0^2(x_1), u_0^3(x_2 - tu_0^2(x_1)))$ は3次元オイラー方程式の解 (滑らかさがあれば) となる. 更に, u は唯一つの強解である. 一方, 滑らかさが足りない場合, 例えば,

$$u_0^2(x_1) = \sin x_1 \quad \& \quad u_0^3(x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} 2^{-k} \sin(2^k x_2)$$

のとき, 輸送項 $(u, \nabla)u$ は任意の $t > 0$ で x の関数でない.

ご清聴ありがとうございました.

研究集会「PDEs and Phenomena in Miyazaki 2003」

日時： 2003年10月31日（金）～11月2日（日）

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室 (D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-1/shige/ppm/ppm2003.html>

プログラム

10月31日（金）

午後の部

14:30-15:20 黒木場正城（福岡大理）

「Maximal attractor and inertial sets for Eguchi-Oki-Matsumura equation」

15:40-16:30 三沢正史（熊大理）

「定平均曲率曲面の時間発展に対する初期値境界値問題」

16:40-17:30 村川秀樹・中木達幸（九大数理）

「ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法」

11月1日（土）

午前の部

10:00-10:50 竹内慎吾（工学院大）

「空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状」

11:00-11:50 石毛和弘（名大多元数理）

「Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題について」

午後の部

13:30-14:20 石渡通徳（早大理工）

「Asymptotic behavior of some global solutions for
nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity」

14:30-15:20 水町徹（横浜市大理）

「Instability of nonradial bound states for 2D nonlinear Schrödinger equation」

15:40-16:30 飯島健太郎（茨城大理工）

「Laplace 方程式の Cauchy 問題
および逆向き熱伝導問題の任意多点差分法を用いた数値解法」

16:40-17:30 櫻井建成（宇部高専）

「反応拡散モデルの情報処理への応用」

11月2日（日）

午前の部

10:00-10:50 坂上貴之（北大理）

「極渦のある球面での渦層の運動」

11:00-11:50 長山雅晴（京大数研）

「反応拡散場での粒子運動の数理解析モデルについて」

12:00-12:50 大崎浩一（宇部高専）

「反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉、壁谷／若手 B：矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、矢崎成俊（宮崎大学工学部）

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288（事務室） & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004 (略称 : PPM2004)」

日時 : 2004年11月19日(金) ~ 11月21日(日)

会場 : 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内 : <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2004.html>

プログラム

11月19日(金)

午後の部

14:30-15:20 満島 正浩 (東京大学大学院・数理科学研究科)

「反応拡散方程式系に現れる時間周期解」

15:40-16:30 丸野 健一 (九州大学大学院・数理学研究院)

「いろいろな物理系における非線形局在モードについて」

16:40-17:30 和田 健志 (熊本大学・工学部)

「Limit problem for the Maxwell-Schrödinger system」

11月20日(土)

午前の部

10:00-10:50 笠井 博則 (福島大学・教育学部)

「実演!! 金平糖の実験とその生成過程のモデリングに向けて」

11:00-11:50 大江 貴司 (岡山理科大学・総合情報学部)・大中 幸三郎 (大阪大学・工学部)

「Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用と数値積分への応用」

午後の部

13:30-14:20 平岡 裕章 (大阪大学大学院・基礎工学研究科)

「無限次元力学系における位相計算理論」

14:30-15:20 谷内 靖 (信州大学・理学部)

「On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data」

15:40-16:30 菱田 俊明 (新潟大学・工学部)

「 L^q estimates for the Stokes equations around a rotating body」

16:40-17:30 小池 茂昭 (埼玉大学・理学部)

「ペロンの方法 –revisited–」

11月21日(日)

午前の部

10:00-10:50 高坂 良史 (室蘭工業大学・工学部)

「表面拡散流方程式による3相境界運動の定常解の線形安定性について」

11:00-11:50 井古田 亮 (九州大学大学院・数理学研究院)

「不変領域を持つ反応拡散系における擾乱の伝播速度の有界性について」

12:00-12:50 梶木屋 龍治 (長崎総合科学大学・工学部)

「Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金(基盤 C(2): 辻川、仙葉、壁谷/若手 B: 北、矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人: 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先: 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail: tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL: 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX: 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005 (略称 : PPM2005)」

日時 : 2005年11月18日(金) ~ 11月19日(土)

会場 : 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内 : <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-1/shige/ppm/ppm2005.html>

プログラム

11月18日(金)

午後の部

14:30-15:20 中原 明生 (日本大学)

「ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御」

15:40-16:30 中根 和昭 (大阪電気通信大学)

「剥離現象に対するモデリングとその数理解析」

16:40-17:30 野々村 真規子 (広島大学)

「ソフトマテリアルにみられる秩序構造について」

11月19日(土)

午前の部

10:00-10:50 友枝 謙二 (大阪工業大学)

「吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について」

11:00-11:50 中島 主恵 (東京海洋大学)

「競争係数無限大の競争系の界面の形成について」

午後部

13:30-14:20 宮本 安人 (北海道大学)

「2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が
不安定になるための一般的な判定法について」

14:30-15:20 小林 孝行 (佐賀大学)

「Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について」

15:40-16:30 宮崎 倫子 (静岡大学)

「Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について」

16:40-17:30 愛木 豊彦 (岐阜大学)

「バネの方程式と自由境界問題」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉／若手 B：北、矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関する漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2006 (略称 : PPM2006)」

日時 : 2006年11月17日(金) ~ 11月18日(土)

会場 : 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内 : <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~yazaki/research/ppm/ppm2006.html>

プログラム

11月17日(金)

午後の部

14:30-15:20 内藤 雄基 (神戸大学)

「Sobolev 臨界指数放物型方程式の解の爆発」

15:40-16:30 野原 勉 (武蔵工業大学)・有本 彰雄 (武蔵工業大学)

「高次摂動項を持った非線形 Schrödinger 方程式の定性的・定量的解析」

16:40-17:30 宮崎 倫子 (静岡大学)

「常微分方程式の解の漸近挙動における時間遅れの影響について」

11月18日(土)

午前の部

10:00-10:50 高橋 太 (大阪市立大学)

「 p -調和関数の特異集合の p -容量は消失する」

11:00-11:50 関口 昌由 (木更津工業高等専門学校)

「三体問題の近況報告」

午後部

13:30-14:20 上山 大信 (明治大学)

「ある化学反応沈澱系におけるパターン形成：
モデリングおよびシミュレーション」

14:30-15:20 佐藤 友彦 (大阪大学)

「2次元有界領域における平均場方程式の解の漸近的非退化性」

15:40-16:30 斎藤 宣一 (富山大学)

「走化性放物型系に対する有限要素近似」

16:40-17:30 福本 康秀 (九州大学)

「Kelvin-Benjamin の変分原理と渦輪の運動速度」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉／若手 B：大塚、北、矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関わる漸近解析
18540189	仙葉 隆	高次元領域における走化性方程式系の爆発解の挙動に関する研究
16740103	大塚浩史	非線形偏微分方程式の双対構造と補償されたコンパクト性
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、大塚浩史、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

研究集会「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007 (略称：PPM2007)」

日時：2007年11月16日(金)～11月17日(土)

会場：宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内：<http://www.miyazaki-u.ac.jp/ohtsuka/research/ppm/ppm2007.html>

プログラム

11月16日(金)

14:30-15:20 渡辺 雅二(岡山大学大学院環境学研究科)

河合 富佐子(岡山大学資源生物科学研究所)

「ポリマー生分解に関するモデルと逆問題および数値シミュレーションについて」

15:40-16:30 柴山 充瑠(京都大学数理解析研究所)

「直線3体問題の記号化とSchubart軌道について」

16:40-17:30 柴田 徹太郎(広島大学大学院工学研究科)

「非線形固有値問題の解の漸近挙動」

19:00 懇親会

「海鮮市場 木綿屋」(宮崎市橘通西2丁目5番6号 0985-29-1692)にて

11月17日(土)

9:40-10:30 **渡辺 道之** (東京理科大学理工学部)

「平面上の複素ポテンシャルの再構成について」

10:40-11:30 **滝本 和広** (広島大学大学院理学研究科)

「完全非線形偏微分方程式の解の等高面の除去可能性について」

11:40-12:30 **櫻井 建成** (千葉大学理学部)

「大腸菌のパターン形成」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C(2) : 辻川、大塚)

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関わる漸近解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究

の援助を受けています。

世話人：辻川 亨、北 直泰、矢崎成俊、大塚浩史、(宮崎大学)

連絡先：辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2008 (略称：PPM2008)」

日時： 2008年11月14日(金)～11月15日(土)

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内： <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/research/ppm/ppm2008.html>

プログラム

11月14日(金)

午後の部

14:00-15:10 平岡 裕章 (広島大学)

「衝突多様体の渦点問題への応用」

15:25-16:35 鈴木 香奈子 (東北大学)

「ある反応拡散方程式系の解のダイナミクス」

16:50-18:00 若狭 徹 (早稲田大学・明治大学)

「ある双安定型方程式に対する線形化固有値問題の表現公式と漸近公式」

11月15日(土)

午前の部 << PPM2008 特別実験講座 >>

10:15-12:15 中原 明生 (日本大学)

「ペーストの記憶と乾燥亀裂パターン」

午後の部

14:00-15:10 鈴木 政尋 (東京工業大学)

「半導体モデルの階層構造について」

15:25-16:35 飯間 信 (北海道大)

「昆虫飛翔の数値モデルと理論モデル」

16:50-18:00 柳田 英二 (東北大学)

「主固有値最小化問題と個体群ダイナミクス」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C)

課題番号	研究代表者	課題名
20540122	辻川 亨	反応拡散方程式の大域的解構造と縮約系についての研究
20540200	飯田雅人	界面を追跡しやすい反応拡散系の構築
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、飯田雅人、矢崎成俊、北 直泰、大塚浩史 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2009 (略称 : PPM2009)」

日時 : 2009年11月20日(金) ~ 11月21日(土)

会場 : 宮崎大学工学部B棟2階B209教室(20日)

宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)(21日)

案内 : <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/research/ppm/ppm2009/>

プログラム

11月21日(金)

午後の部

14:00-15:00 小野寺 有紹 (東北大学)

「複素解析学的手法による Hele-Shaw 流の漸近挙動」

15:15-16:15 大塚 岳 (明治大学)

「スパイラル成長の数理モデルと結晶表面の成長について」

16:30-17:30 小川 卓克 (東北大学)

「Asymptotic behavior of solution of drift-diffusion system of degenerate type」

11月21日(土)

午前の部 << PPM2009 特別実験講座 >>

10:15-12:15 山口 智彦 (産総研)

「渦巻く化学反応 : Belousov-Zhabotinsky 反応の数理」

午後の部

14:00-15:00 荻原 俊子 (城西大)

「多安定型反応拡散方程式におけるフロントの相互作用」

15:15-16:15 西畑 伸也 (東京工業大)

「熱伝導圧縮性粘性流体の半空間上の定常解について」

16:50-18:00 四ツ谷 晶二 (龍谷大)

「Cahn-Hilliard 方程式の定常解の大域的分岐構造と関連する話題」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C：辻川、飯田、北、大塚、若手 B:矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
20540122	辻川 亨	反応拡散方程式の大域的解構造と縮約系についての研究
20540200	飯田雅人	界面を追跡しやすい反応拡散系の構築
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究
21740079	矢崎成俊	移動境界の数値的追跡法、そして界面運動の数理解析に関する研究

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、飯田雅人、北 直泰、大塚浩史、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2010 (略称 : PPM2010) 」

協賛 科学研究費補助金・基盤研究(S)

「非線形非平衡反応拡散系理論の確立 :

Mathematical Theory of

Nonlinear-Non-equilibrium Reaction-Diffusion Systems

(略称 : NNRDS) 」

日時 : 2010年11月20日(土) ~ 11月21日(日)

会場 : 宮崎大学工学部B棟2階B209教室

ポスターセッション兼休憩室B210教室

案内 : <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/ppm/>

プログラム

11月20日(土)

午後の部

14:00-14:55 三村 昌泰 (明治大学・基盤研究(S)代表)

「微小重力環境でのすす燃焼のモデル支援解析」

15:15-16:10 中山まどか (東北大学)

「Marciniak によるヒドラ頭部再生モデルの単調定常解の集合の構造」

16:30-17:25 吉村 和之 (NTT コミュニケーション科学基礎研究所)

「1次元非線形格子における Discrete Breather の存在と安定性」

11月21日(日)

午前の部

≪ ポスターセッション (明治大学) ≫

9:00-10:30 佐合 洋彰「OVモデルによる交通流の研究」

澁谷 幸樹「バクテリアの運動」

田中 吉太郎「ひまわりの葉序形成」

増井 翼「人の避難時に生じるアーチ構造解析」

≪ PPM2010 特別実験講座 ≫

10:45-12:15 伊達 章 (宮崎大学)

「メトロノームの同期現象 +」

午後の部

14:00-14:55 八柳 祐一 (静岡大学)

「絶対温度が負となる点渦系に関する力学的考察

～専用計算機を用いたダイレクトシミュレーション結果, および解析的結果～」

15:15-16:10 柳沢 卓 (奈良女子大学)

「多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題」

16:30-17:25 井口 達雄 (慶応大学)

「A mathematical analysis of tsunami generation

in shallow water due to seabed deformation」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 (S) : 三村 ; 基盤 (C) : 辻川, 飯田, 北, 大塚, 伊達 ; 若手 (B) : 矢崎) の援助を受けています。

課題番号	研究代表者	課題名
18104002	三村昌泰	非線形非平衡反応拡散系理論の確立
20540122	辻川 亨	反応拡散方程式の大域的解構造と縮約系についての研究
20540200	飯田雅人	界面を追跡しやすい反応拡散系の構築
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
22540231	大塚浩史	平衡点渦系の平均場と点渦系の関連の探求
22500206	伊達 章	高次元データに対する事後確率分布構造の解析
21740079	矢崎成俊	移動境界の数値的追跡法, そして界面運動の数理解析に関する研究

世話人 : 辻川 亨, 飯田雅人, 北 直泰, 大塚浩史, 矢崎成俊 (宮崎大学)
上山大信 (明治大学)

連絡先 : 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科
E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2011 (略称 : PPM2011)」

日時 : 2011年11月18日(金) ~ 11月19日(土)

会場 : 宮崎大学工学部B棟2階B209教室

案内 : <http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/ppm/ppm2011/>

プログラム

11月18日(金)

午後の部

14:00-14:55 菅徹(東北大学)

「円環領域における Liouville-Gel'fand 方程式の解の分岐構造」

15:15-16:10 赤堀公史(静岡大学)

「エネルギー臨界冪を持つ非線形シュレディンガー方程式に対する
基底状態の存在性と散乱・爆発問題」

16:30-17:25 俣野博(東京大学)

「3次元細胞電気生理学モデルの時間大域解」

11月19日(土)

午前の部 << PPM2011 特別実験講座 >>

10:15-12:15 山崎義弘(早稲田大学)

「粘着テープをはがすということ -界面運動と非線形ダイナミクス-」

注 宮交バス「橘通り3丁目→宮崎大学(木花キャンパス)」の土曜日の朝の時刻表 :

8:21 → 8:54, 8:41 → 9:18, 9:11 → 9:52, 9:21 → 9:54, 9:41 → 10:18 (遅刻!)

午後の部

14:00-14:55 奥田孝志（気象大学校）

「3重臨界点を持つ反応拡散系に現れる振動パターン」

15:15-16:10 大枝和浩（早稲田大学）

「被食者のための protection zone が存在する被食者-捕食者モデルについて」

16:30-17:25 太田隆夫（京都大学）

「興奮性反応拡散系における局在ドメインのさまざまな自己推進運動」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C：北，大塚，矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
22540231	大塚浩史	平衡点渦系の平均場と点渦系の関連の探求
23540150	矢崎成俊	移動境界問題の統一的な数値解法の確立

および平成 23 年度宮崎大学工学部長裁量経費

所管コード	申請代表者	プロジェクト名
13010302	飯田雅人	偏微分方程式と現象に関する研究集会， 及び応用物理学特別講義への最先端トピックスの提供

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨，飯田雅人，北 直泰，大塚浩史，矢崎成俊（宮崎大学）
 連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
 〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料理工学科
 E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
 TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288（事務室） & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「数学と現象 : Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2012 (略称 : MPM2012)」

日時 : 2012年11月16日(金) ~ 11月17日(土)
 会場 : 宮崎大学工学部B棟2階B210教室
 案内 : <http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/>

プログラム

11月16日(金)

午後の部

14:00-14:55 中岡 慎治 (理化学研究所)

「免疫応答ダイナミクスの数理研究 – 皮膚炎の統合的理解に向けて –」

15:15-16:10 眞崎 聡 (広島大学)

「非線形シュレディンガー方程式の最小非散乱解について」

16:30-17:25 郷田 直輝 (国立天文台)

「自己重力多体系の非線形現象と力学構造」

11月17日(土)

午前の部 << MPM2012 特別実験講座 >>

10:15-12:15 末松 J. 信彦 (明治大学)

「微生物の集団が形成する秩序パターン ~ 生物対流の実験と数理 ~」

注 宮交バス「橘通り3丁目→宮崎大学(木花キャンパス)」の土曜日の朝の時刻表 :

8:21 → 8:54, 8:41 → 9:18, 9:11 → 9:52, 9:21 → 9:54, 9:41 → 10:18 (遅刻!)

午後の部

14:00-14:55 柴田 達夫 (理化学研究所)

「走化性細胞における 1 細胞の自己組織化を
実験、統計解析、理論モデル化から解明する」

15:15-16:10 岩淵 司 (中央大学)

「Ill-posedness for the nonlinear Schrödinger equations
in one and two space dimensions」

16:30-17:25 瀬野 裕美 (東北大学)

「生物個体群サイズ制御のパラドックス：数理モデルからの示唆」

本研究集会は、科学研究費補助金

課題番号	研究種目	研究代表者	課題名
24540216	基盤 C	飯田雅人	反応拡散系の漸近解構築への理論的アプローチ
20540181	基盤 C	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
22540231	基盤 C	大塚浩史	平衡点渦系の平均場と点渦系の関連の探求
23740099	若手 B	梅原守道	連続体近似による天文現象のモデル化と数学解析
23840041	研ス支援	今 隆助	Lotka-Volterra 方程式を用いた構造化生態系モデルの数理的研究

および平成 24 年度宮崎大学工学部長裁量経費

申請代表者	プロジェクト名
辻川 亨	「実験科学と理論の融合を目指した」偏微分方程式と現象に関する研究集会

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨, 飯田 雅人, 北 直泰, 大塚 浩史, 梅原 守道, 今 隆助 (宮崎大学)
連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部工学基礎教育センター
E-mail : tsujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

作成日 : 2012.11.07