研究集会

数学と現象

Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2014

2014年11月14日(金), 15日(土)

宮崎大学工学部B棟2階 B209講義室

アブストラクト

研究集会 「数学と現象： **Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2014 (略称：MPM2014)**」

日時： 2014 年 11 月 14 日（金）〜 11 月 15 日（土）

会場： 宮崎大学工学部 B 棟 2 階 B209 教室

案内： `http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/`

プログラム

11 月 14 日（金）

午後の部

14:00-14:55 仙葉 隆（九州工業大学）

「走化性方程式と関連する放物型−楕円型方程式系の球対称な定常解の安定性について」

15:15-16:10 久藤 衡介（電気通信大学）

「白金表面上の CO 分子吸着モデルに現れる反応拡散移流系について」

16:30-17:25 栄 伸一郎（北海道大学）

「Motion of interacting camphors」

11 月 15 日（土）

午前の部

10:15-11:10 櫻井 建成（千葉大学）

「大腸菌のミクロな振舞いと集団的パターン形成」

11:25-12:20 小川 知之（明治大学）

「興奮場反応拡散系の周期進行波解の安定性」

注 宮交バス「橘通り 1 丁目→宮崎大学（木花キャンパス）」の土曜日の朝の時刻表：

8:24 → 8:54，8:44 → 9:18，9:14 → 9:52，9:24 → 9:54，9:44 → 10:18（遅刻！）

午後の部

14:00-14:55　桑村 雅隆（神戸大学）

「Conservation breaking dynamics in reaction-diffusion systems」

15:15-16:10　壁谷 喜継（大阪府立大学）

「球面上での領域のラプラス・ベルトラミ作用素の固有値と関連する非線形問題」

16:30-17:25　観音 幸雄（愛媛大学）

「２種競争系の球対称定常解の大域的な解構造について」

本研究集会は，科学研究費補助金

課題番号	種目	代表者	課題名
26400173	基盤 C	辻川亨	縮約系を応用した高次元空間にみられる現象の解明と解析的手法の構築
25400390	基盤 C	辻川亨 (分担)	生物を模倣した時空間秩序変数を持つネットワーク構造の理解と応用
24540216	基盤 C	飯田雅人	反応拡散系の漸近解構築への理論的アプローチ
25400178	基盤 C	北直泰	非線形シュレディンガー方程式の解の挙動に関する解析
25800095	若手 B	今隆助	数理生物学に現れる差分方程式の Lotka-Volterra 方程式を用いた研究
26800071	若手 B	梅原守道	天文現象における自己重力流体の運動の数学解析
26800084	若手 B	出原浩史	生物の集合形成メカニズムに対する数理モデルからの探求

の援助を受けています.

世話人：　辻川 亨，飯田 雅人，北 直泰，今 隆助，梅原 守道，出原 浩史（宮崎大学）

連絡先：　出原 浩史 (Hirofumi Izuhara)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1　宮崎大学工学部工学基礎教育センター

E-mail：izuhara@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7384 ／ 0985-58-7288（事務室）

走化性方程式と関連する放物型ー楕円型方程式系の球対称な定常解の安定性について

仙葉　隆（九州工大・工）

本講演で述べる結果は、関氏（九州大）との共同研究である。

本講演では、以下の法物型－楕円型方程式系の球対称解を考える。

$$(PE)\begin{cases} U_t = \nabla\cdot(\nabla U - U^q \nabla V) & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ 0 = \Delta V + U & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ U(\cdot,0) = U_0 & \text{in } \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

ただし、$q > 1$、$n = 1,2,3,\cdots$、U_0 は $\mathbf{R}^n$ 上の非負球対称関数とする。

この時、十分小さな $T > 0$ に対して

$$U \geq 0 \;\; \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,T)$$

を満たす解が存在する。ここで、$(U,\nabla V)$ はただ一つ定まるが、(U,V) が (PE) を満たすならば、任意の定数 C に対して $(U, V+C)$ も (PE) を満たすため、(U,V) は一意には定まらない。そのため、本講演では解 U と呼ぶこととする。

本講演では、方程式系の球対称な正値定常解 U の層構造から安定性が従うことを述べる。

任意の正定数 α に対して以下を満たす球対称正値解 U_α はただ一つ存在する。U_α と対をなす V を V_α と置くと (U_α, V_α) は (PE) を満たす。逆に (PE) の球対称正値定常解 U_α に対して以下を満たすような V_α がただ一つ定まる。

$$(S)\begin{cases} U(x) = \dfrac{1}{(q-1)^{1/(q-1)}|V(x)|^{1/(q-1)}}, \quad V<0 & \text{in } \mathbf{R}^n, \\ \Delta V + U = 0 & \text{in } \mathbf{R}^n, \\ U(0) = \alpha > 0 & \end{cases}$$

任意の異なる２つの正数の組 $\beta > \alpha > 0$ に対する (S) の球対称正値解 U_α、U_β が $U_\beta > U_\alpha$ in $\mathbf{R}^n$ を満たすとき ((S) の球対称正値解は) 層構造を持つという。また、(S) の正値解 U_α と (PE) の球対称で非負である初期値 U_0 が適当なノルムに対して十分に近いからば (PE) の球対称非負値解が時間大域的に存在し

$$\lim_{t\to\infty} U(x,t) = U_\alpha(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n$$

が成り立つとき定常解 U_α は安定であるという。
　我々は以下を示した。

定理. $n \geq 3$、$q > q_* = \max\{4/(n-2\sqrt{n-1}), 1\}$ の時、(S) は層構造を持ち、(S) の球対称正値解は (PE) の定常解として安定である。

　講演では、安定性を論じる関数空間を含め上記で述べた事柄の詳細を説明すると共に関連する結果や定常解の層構造と安定性がどのように関連するのかを述べる。

白金表面上のCO分子吸着モデルに現れる反応拡散移流系について*

久藤　衡介　(電気通信大学 情報理工学研究科)

次の反応拡散移流方程式系に対する初期値境界値問題

$$
(\mathrm{P})\ \begin{cases} u_t = d\Delta u + u(1-u)(u+v-1) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\ v_t = \mu\nabla\cdot\{\nabla v + \alpha v(1-v)\nabla\chi(u)\} + g(u,v) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty),\\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0 & \text{on } \ \partial\Omega\times(0,\infty),\\ u(\,\cdot\,,0)=u_0\ge 0,\quad v(\,\cdot\,,0)=v_0\ge 0 & \text{in } \ \Omega \end{cases}
$$

を考える. ここで, Ω は $\mathbb{R}^2$ における滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域であり, d, μ, α は正定数である. なお, $\chi(u)$ および $g(u,v)$ は,

$$
\chi(u) = u^2(2u-3), \quad g(u,v) = c(1-v) - ae^{\alpha\chi(u)}v - bv
$$

で定義される関数で, a, b, c は正定数である. (P) は Hildebrand [1] によって提唱された表面化学反応モデルであって, CO 分子が白金表面に対して吸着や離脱をすることによって形成される分子密度パターンの再現を目指している. その見地では, Ω が白金表面に対応し, 未知関数 u は反応触媒となる白金表面の状態関数を, v は CO 分子の白金表面に対する吸着率を表す. [1] の提唱以来, Hildebrand-Ipsen-Mikhailov-Ertl [2], 武井-Efendiev-辻川-八木 [6], 久藤-辻川 [3, 4, 5] 等によって, 数値解析, 発展方程式, 楕円型方程式の各方面から (P) に対する研究がなされている. 本講演では，久藤-辻川 [3, 4, 5] で得られた結果と (P) に関連する最近の研究進展を紹介する.

まず，(P) のすべての定常解は $\overline{\Omega}$ 上で一様に有界であることに注意する:

定理 1 ([4])**.** (P) の任意の非定数な定常解 (u,v) は, $\overline{\Omega}$ 上で $0<u<1$ および $0<v<1$ を満たす.

このアプリオリ評価によって，写像度の理論が適用出来て，非定数解の存在定理が得られる:

定理 2 ([3])**.** 任意の (μ,α,a,b,c) に対して, $\lim_{j\to\infty} d_j = 0$ を満たす単調非増加列 $\{d_j\}_{j=0}^{\infty}$ が存在して, 次の (i), (ii) が成立する：

(i) $d\ge d_0$ のとき, (P) の非定数な定常解は存在しない.

(ii) $d_j\ne d_{j+1}$ かつ j が奇数のとき, $d\in(d_{j+1},d_j)$ に対して, (P) の非定数な定常解が少なくともひとつ存在する.

定理 1 を利用すると, μ を無限大とした際の非定数定常解の漸近挙動を特徴付ける極限系が導出できる. 特に, 空間 1 次元 ($I:=(0,1)$) に単純化されたケースでの極限系は,

---

* 本講演は, 辻川 亨 先生（宮崎大学工学部）との共同研究に基づく.

次のような積分条件と境界条件を伴う非線形常微分方程式となる.

$$
\text{(S)}\quad
\begin{cases}
du'' + u(1-u)\left(u + \dfrac{1}{1+\lambda e^{\alpha\chi(u)}} - 1\right) = 0, & x \in I,\\
u > 0,\quad u' > 0 & x \in I,\\
u'(0) = u'(1) = 0,\\
\displaystyle\int_0^1 g\left(u, \frac{1}{1+\lambda e^{\alpha\chi(u)}}\right)\, dx = 0, \quad \lambda > 0.
\end{cases}
$$

極限系 (S) の解が形成する大域分岐曲線に関しては, 次の定理を得られる.

定理 3 ([5])**.** (S) の解集合 $\{(u,d,\lambda) \in C^2(\overline{I}) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\}$ は, 以下の (i)〜(iv) の c の値に応じて, 次の有界な曲線を含む:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{(u(\,\cdot\,,s), d(s), \lambda(s)) \in C^2(\overline{I}) \times \mathbb{R}_+ \times (0, e^{\alpha/2})\,;\, s \in (0,1)\},\\
\mathcal{C}_2 &= \{(u(\,\cdot\,,s), d(s), \lambda(s)) \in C^2(\overline{I}) \times \mathbb{R}_+ \times (e^{\alpha/2}, \infty)\,;\, s \in (0,1)\}.
\end{aligned}
$$

(i) $0 < c < ae^{-\alpha/2} + b$ ならば, $\mathcal{C}_2$ は定数解 $u = u^*(\lambda) \in (1/2, 1)$ と区間 I の左端に境界遷移層をもつ解を次の意味で繋ぐ: $\lim_{s\to 1}(u(\,\cdot\,), d(s), \lambda(s)) = (u^*(\lambda_1), d_1, \lambda_1)$ であって, ある $\zeta(c) \in (0,1)$ に対し,

$$
\lim_{s\to 0} u(x;s) = \begin{cases} \zeta(c) & (x = 0),\\ 1 & (0 < x \le 1), \end{cases} \qquad \lim_{s\to 0}(d(s), \lambda(s)) = \left(0, \frac{a + be^{\alpha}}{c}\right). \tag{1}
$$

(ii) $ae^{-\alpha/2} + b < c$ ならば, $\mathcal{C}_1$ は定数解 $u = u^*(\lambda) \in (0, 1/2)$ と右端に境界遷移層をもつ解を繋ぐ: $\lim_{s\to 1}(u(\,\cdot\,), d(s), \lambda(s)) = (u^*(\lambda_1), d_1, \lambda_1)$ であって, ある $\eta(c) \in (0,1)$ に対して,

$$
\lim_{s\to 0} u(x;s) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1),\\ \eta(c) & (x = 1), \end{cases} \qquad \lim_{s\to 0}(d(s), \lambda(s)) = \left(0, \frac{a+b}{c}\right). \tag{2}
$$

(iii) $(a+b)e^{-\alpha/2} < c < ae^{-\alpha/2} + b$ ならば, $\mathcal{C}_1$ は右端に境界遷移層をもつ解と内部遷移層をもつ解を繋ぐ: (2) に加えて, ある $\ell(c) \in (1/2, 1)$ に対して,

$$
\lim_{s\to 1} u(x;s) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < \ell),\\ 1 & (\ell < x \le 1), \end{cases} \qquad \lim_{s\to 1}(d(s), \lambda(s)) = (0, e^{\alpha/2}). \tag{3}
$$

(iv) $ae^{-\alpha/2} + b < c < ae^{-\alpha/2} + be^{\alpha/2}$ ならば, $\mathcal{C}_2$ は左端に境界遷移層をもつ解と内部遷移層をもつ解を繋ぐ: (1) に加えて, ある $\ell(c) \in (0, 1/2)$ に対して, (3) が成り立つ.

参考文献

[1] M. Hildebrand, Ph. D. dissertation, Humboldt Universität, Berlin, 1999.

[2] M. Hildebrand, M. Ipsen, A. S. Mikhailov, G. Ertl, *New J. Phys.*, **5** (2003), 1–28.

[3] K. Kuto, T. Tsujikawa, *Discrete Contin. Dyn. Syst. B*, **14** (2010), 1105–1117.

[4] K. Kuto, T. Tsujikawa, *J. Math-for-Industry*, **3** (2011), C9, 69–72.

[5] K. Kuto, T. Tsujikawa, *Nonlinearity*, **26** (2013), 1313–1343.

[6] Y. Takei, M. Efendiev, T. Tsujikawa, A. Yagi, *Osaka J. Math.*, **43** (2006), 215–237.

Motion of interacting camphors

Shin-Ichiro Ei
Department of Mathematics, Faculty of Science
Hokkaido University
Sapporo 060-0810, Japan

We consider the motion of interactiing camphor particles on the water surface. Assuming that each camphor particle is slightly deformed from radial symmetry, we show how such deformed camphor tips interact through the shapes. We only consider two camphor particles in this report. Then the considered model equation is

$$
(1) \qquad \begin{cases} \tau_1 \dot{P}_j &= \displaystyle\int_{\partial\Omega_j(t)} \gamma(u)\boldsymbol{n} ds, \\ \tau_2 \dot{\Theta}_j &= \displaystyle\int_{\partial\Omega(t)} \gamma(u)\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} ds, \\ u_t &= d\Delta u - u + f(\boldsymbol{x}, P_1, P_2) \end{cases}
$$

for $j = 1, 2$. P_j denote the locations of camphor particles and $u(t, x)$ the surface concentration of the camphor molecular layer, Θ_j characteristic angles of the camphor particles. $\Omega_j(t)$ are the interiors of camphor particles represented by $\partial\Omega_j(t) := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2;\ \boldsymbol{x} = P_j(t) + \boldsymbol{r}\}$, $\boldsymbol{n}$ outward normal unit vector of $\partial\Omega(t)$. In practice, we will deal with a slightly different model equation by smoothening the above equation.

References

[1] X. Chen, S.-I. Ei and M. Mimura, SELF–MOTION OF CAMPHOR DISCS -MODEL AND ANALYSIS-, NETWORKS AND HETEROGENEOUS MEDIA Volume 4, Number 1 (2009), 1-18.

[2] S.-I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, *Interacting spots in reaction diffusion systems*, DCDS 14 (2006), 31-62.

[3] K. Iida, H. Kitahata, M. Nagayama, Theoretical Study on the Translation and Rotation of an Elliptic Camphor Particle,

大腸菌のミクロな振舞いと集団的パターン形成

櫻井　建成、千葉大学大学院理学研究科

１．はじめに

自然界の森羅万象に見られる多くの深遠な現象の理解には、ミクロからマクロにいたる多重の階層構造と各階層で観測される秩序（リズムやパターン）の形成、発展、消滅、再生の反映を理解する必要がある。その中で、物理・化学から見た時間空間的秩序形成の問題は、生命現象に見られるリズムやパターンの生成の類似性から、実験、数値実験、理論解析など多くの研究が行われてきた。しかしながら、実際の生命現象、もしくは、生物を用いた実験との間にはいまだに大きな壁がある。

さて、ミクロからマクロな現象を繋ぐ研究としてブラウン運動が有名である。個々のブラウン粒子の動き（ランジュバン方程式）から統計的手法を用いてマクロな現象（拡散方程式）としての記述ができる。大腸菌の遺伝子や蛋白レベルのミクロな現象から、メソスコピックな細胞個々の動き（例えば、tumble と run の繰り返しによるランダムウォーク：図１）と細胞間の相互作用、そして、集合した時のマクロな振舞の違いがあることは知られている（例として図２に示すような伝搬する波頭とその後ろで大腸菌クラスタを作るパターン形成）。それぞれの階層で観測される秩序形成は良く研究されているが、大腸菌の振舞についてミクロからマクロを物理的に繋ぐ研究は少ない。

そこで、ミクロからマクロを繋ぐ階層的秩序構造を扱い、大腸菌のパターン形成における階層的秩序の発生メカニズムを理解することを目的とした。具体的には、個々の大腸菌の動きの観察を行い、平均移動距離を見積もることにより、大腸菌の有効拡散係数を求めた。その結果、走化性大腸菌の有効拡散係数は栄養濃度に依存しないこと、走化性のない大腸菌はその伝搬速度に依存して有効拡散係数が変化していることを実験的に示した。上記の結果を加味した数理モデルの提案を行い、大腸菌パターン形成におけるマクロな秩序形成に関する一部の実験結果を再現することに成功したので、本研究集会で議論したい。

２．実験結果

２．１　走化性大腸菌の波頭伝搬速度

アスパラギン酸に対して走化性を持つ大腸菌、および、走化性を持たない大腸菌による伝搬するマクロなパターンの波頭伝搬速度の計測を行った。大腸菌のパターン形成において伝搬するフロント（波頭）が観測される。エサの初期濃度として、コハク酸の濃度を 10 mM とした場合の走化性大腸菌波頭の様子を図３に示す。図３の時空間プロットにおいて、波頭は一定速度で伝搬していることがわかる。また時空間プロットにおける波頭の傾きより伝搬速度を見積もることができる。

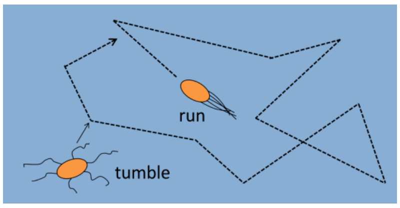


図１：大腸菌の鞭毛を使った２種類の運動（run と tumble）およびその時の大腸菌の形態の概略図。

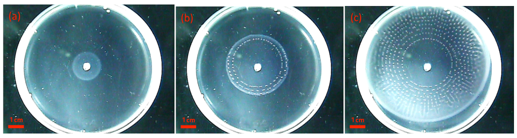


図２：大腸菌のマクロなパターン形成。(a-c) 寒天濃度 0.2％、栄養素（コハク酸）濃度 3 mM の寒天培地に走化性大腸菌の伝搬する波頭と波頭からドットを形成していく様子。それぞれ植菌から (a)25 時間後、(b)40 時間後、(c)75 時間後。

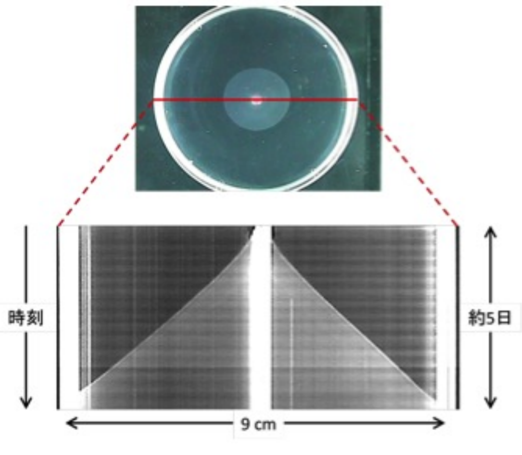


図３：伝搬するフロント（波頭）の様子（上図）と走化性大腸菌の広がる様子の時空間プロット（下図）。寒天培地中の寒天濃度は 0.2 ％、栄養素（コハク酸）濃度は 10 mM。縦軸は時間であり、時間は上から下が正の方向である。 横軸は空間であり、上図中の赤い直線での断面が時空間プロットの横幅と対応している。

２．２　走化性のない大腸菌の波頭伝搬速度

エサの初期濃度として、コハク酸の濃度を６mM とした場合の走化性のない大腸菌波頭の様子を図４に示す。図４から、実験開始４日間ぐらいは一定速度で伝搬しているが、その後速度が変化している様子（一定速度であるが、速度が速くなっている）が分かる。ここでは、波頭の伝播速度が変化する前の領域を領域 I、変化した後の領域を領域 II とした。

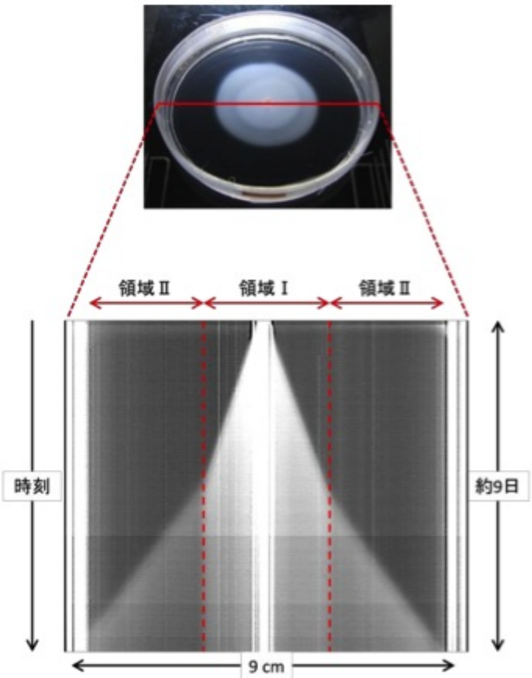


図４：伝搬するフロント（波頭）の様子（上図）走化性のない大腸菌の広がる様子の時空間プロット（下図）。寒天培地中の寒天濃度は 0.2 %、栄養素(コハク酸)濃度は 6 mM。縦軸は時間であり、時間は上から下が正の方向である。途中でフロント（波頭）の伝播速度が変化している様子が見られる。フロント（波頭）の伝播速度が変化する前の領域が領域 I、変化した後の領域が領域 II とした。

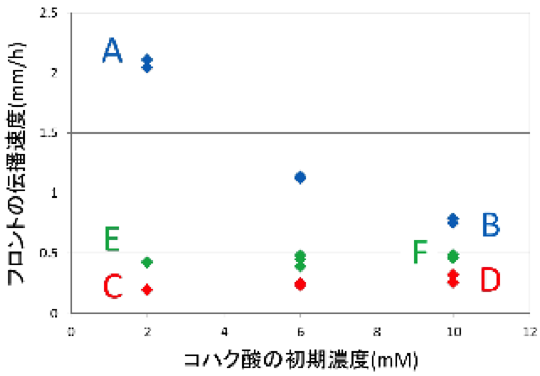


図５：実験における、寒天培地中の栄養素濃度とフロントの伝播速度との関係。　寒天培地中の寒天濃度は 0.2 %とした。　◆は走化性のある菌株、◆は走化性のない菌株の領域 I、　◆は走化性のない菌株の領域 II をそれぞれ表す。

２．３　波頭伝搬速度のコハク酸初期濃度依存性

コハク酸初期濃度（初期栄養濃度）を変えたときの実験結果を図５に示す。図５より、走化性大腸菌による伝搬するマクロなパターンの波頭伝搬速度（図５中◆）は、コハク酸初期濃度に対し減少することが分かった。従来提案されている大腸菌パターン形成における数理モデルでは、初期栄養濃度に対して伝搬速度は増加することが示されており、従来の数理モデルの改良が必要である。

走化性のない大腸菌の波頭伝搬速度（図５中◆および◆）は、コハク酸初期濃度に対してほとんど依存しないことが分かった。またその伝搬速度は同一の条件にも関わらず、領域 I(実験開始４日間ぐらい)と領域 II（それ以降）で、それぞれ、伝搬速度が変わることが分かった。ここで、各コハク酸初期濃度において、領域 II の方の伝搬速度が速いことが分かる。同一の条件にも関わらず、波頭の伝搬速度が変化することは、従来報告されていない。

２．４初期栄養濃度を変数とした個々の大腸菌の動きの観測によるマクロな物理量である有効拡散係数の同定

アスパラギン酸に対して走化性を持たない菌株の大腸菌が水中を遊泳する場合、もしくは、走化性を持った菌株であっても、遊泳する水中にアスパラギン酸の濃度勾配が存在しない場合、Run 時の平均速度は約 20 μm/秒、Run 状態の平均持続時間（Tumble の平均時間間隔）は 0.83 秒であり、Tumble での方向転換の角度はランダムに選ばれることが知られている（図１）。したがって大腸菌はランダムウォークのような運動を見せる。そこで、大腸菌の運動をランダムウォークと考え、その有効拡散係数を求める。

個々の活性な状態の大腸菌を観察するため、円状に伝搬する波頭のすぐ外側にいる大腸菌を倒立顕微鏡により観察した。観測した様子を図６に示す。図７に、図５の A-F の条件における実験結果を示す。それぞれの平均二乗変位(MSD)は大腸菌の軌跡より移動平均することにより求めた。それぞれのグラフにおいて、１本の線が１つの個体に関するデータを表している。一見して分かるように、図７のグラフ中の線の傾き(拡散係数に相当するような量)に大きなばらつきが見られる。図６(b)の軌跡からも分かるように、数十秒という短い時間内では、比較的まっすぐな経路を選びやすい個体や頻繁に向きを変える個体などがいる。そのばらつきが、図７に見られる分布を生んでいる。そこで、それらの

平均をとることにより（図８）それぞれの条件、および、株における有効拡散係数とした。図８より、走化性大腸菌（A, B）の有効拡散係数は、初期栄養濃度に依存しないことが分かった。しかしながら、走化性を持たない大腸菌では、実験開始４日間（領域 I:C, D）とそれ以降（領域 II:E, F）では、個々の大腸菌の有効拡散係数が変わっていることが分かる。ただし、その有効拡散係数は初期栄養濃度にほとんど依存しない。このことは、個々の大腸菌の動き易さがマクロなパターンの波頭の伝搬速度に反映されていることを示しており、図５の実験結果を説明することができる。つまり、実験開始４日以降（領域 II:E, F）では、個々の大腸菌の活動が活発になり、マクロな物理量である有効拡散係数を大きくし、伝搬する波頭の伝搬速度を速くしていると考えることができる。だたし、実験開始４日以降で大腸菌が活発化する生物的理解には至っていない。

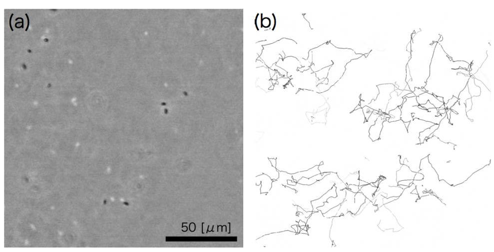


図６：大腸菌パターンの波頭付近の大腸菌の動き。(a) 顕微鏡画像。黒い（および白い）点が個々の大腸菌。(b) 個々の大腸菌の軌跡（図 (a) の黒い点の重心の軌跡)。

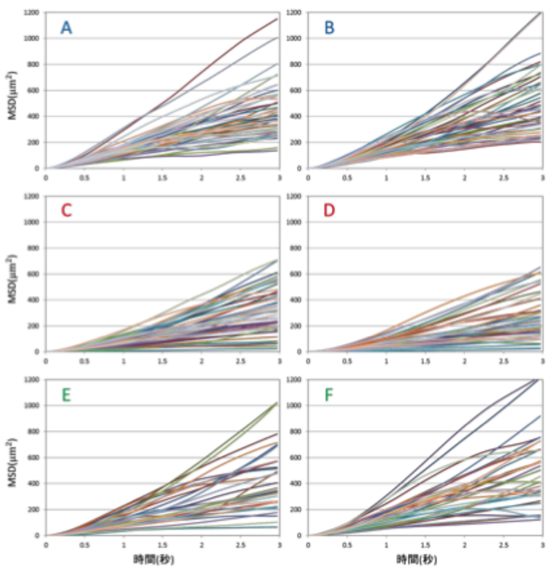


図７：図５の A-F それぞれの条件における、3 秒間の平均二乗変位。それぞれの線は個々の大腸菌の動きを反映したものであり、ここでは３０個体の平均二乗変位を示している。このグラフ中の線の傾きが、拡散係数に相当する。

３．まとめ

上記の実験結果では、個々の大腸菌の動きの統計量から、走化性大腸菌の有効拡散係数は栄養濃度に依存しないことが分かった。また、大腸菌の有効拡散係数と化学物質の拡散係数の比を見積もることができた。そこで、それらの結果を考慮に入れながら反応拡散移流モデルの提案と数値計算を行った。図９に波頭の伝搬速度の初期栄養濃度依存性を示す。本数理モデルにより、初期栄養濃度に対して正の相関がみられる領域と負の相関がみられる領域があることが分かった。負の相関がみられる数値結果はいままで存在せず、実験結果を説明することができる数理モデルの提案ができたと考えられる。しかしながら、実験結果との完全な一致はみられていない。本研究集会では、これら実験結果と数値計算結果について議論したい。

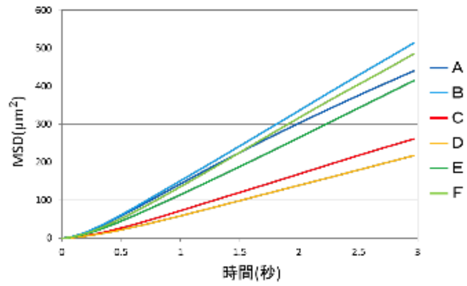


図８：図７の A-F それぞれのグラフ中のすべてのデータの平均。平均をとる際は、それぞれのデータの撮影時間の違いも考慮し、重みをつけている。

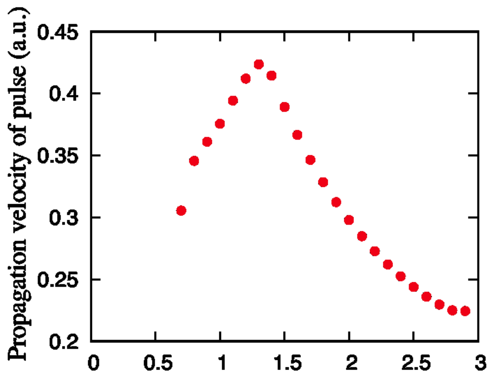


図９：反応拡散移流モデルにおける、大腸菌パターンの波頭の伝搬速度。

興奮場反応拡散系の周期進行波解の安定性

小川知之　(明治大学総合数理学部)*

1. Introduction

神経細胞における興奮およびその伝播は，Hodgkin-Huxley 方程式 [8] を始め，膜電位とイオンチャンネルの伝導率が結合した微分方程式モデルで研究されてきた．また，酸化還元の振動で知られる BZ 反応でも反応物質の濃度をコントロールすることにより，安定な酸化状態に刺激で誘発された還元状態の波が伝播するような，いわゆる興奮場を実現できる．それによりスパイラル波が作られることもよく知られている．([2] およびその参考文献を参照）このような興奮場における現象の解明にはその典型として FHN 方程式 [5][11]

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = D_1 u_{xx} + u(1-u)(u-a) - v, & x \in \mathbf{R},\, t > 0, \\ v_t = D_2 v_{xx} + \epsilon(u - \gamma v), & x \in \mathbf{R},\, t > 0, \end{array}\right. \tag{1}$$

を考察対象にすることが多い．ただし $0 < a < \frac{1}{2}, D_1 > 0, D_2 = 0$ ．特異摂動法により，$\epsilon > 0$ が十分小さいときに，パルス進行波解の構成，その安定性解析，周期進行波（ウェーブトレイン）の構成などが可能である．([12] およびその参考文献を参照）

さて，心筋細胞もペースメーカーからの刺激を伝播させることにより心臓のポンプ機能を実現しているので，興奮場と考えることができるが，心臓生理では興奮波の形状が重視され実験的に得られる心筋細胞の興奮波をできるだけ模倣するように設計された Aliev-Panfilov モデル [1] が，よく知られている．ここでは，Aliev-Panfilov モデルの特性を残しつつ，FHN 方程式との類似性も持たせた以下の修正 FHN 方程式系で，これも興奮場なのでウェーブトレインがあるが，その安定性が元の FHN 方程式とどう異なるかを問題にしたい．

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = D_1 u_{xx} + u(1-u)(u-a) - v, & x \in \mathbf{R},\, t > 0, \\ v_t = D_2 v_{xx} + \epsilon(du(b-u)(u+c) - v), & x \in \mathbf{R},\, t > 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

Aliev-Panfilov モデルでは興奮状態に対応する slow manifold 上でのダイナミクスを遅延させることで興奮波の形状を模倣しているが，同様のことを修正 FHN 方程式でも $b > 1$ を 1 に近づけることで実現できる [1]（図 1 参照）．さて，心筋細胞の Luo-Rudy モデル [10] を用いたシミュレーションではウェーブトレインが不安定することが報告されている [14] が，修正 FHN 方程式でも，周期境界条件下でのシミュレーションによりウェーブトレインの振動が観測される．本講演ではウェーブトレインの本質スペクトラムを数値的に求める [13][15] ことにより，修正 FHN 方程式では，FHN 方程式には現れないエックハウス不安定性が発生することを紹介する．またそれは，周期境界条件下での，ウェーブトレインのホップ分岐とも整合性があり，スパイラル解の不安定化 [3][4][9] などとの関連も議論したい．

なお，本講演は M.O.Gani との共同研究 [6][7] に基づく．

---

* 〒 164-8525 東京都中野区中野 4- 21-1
e-mail: `togw@meiji.ac.jp`

[1] 実はこの形の修正に限ったことではなく興奮状態に対応する slow manifold 上の速度が遅延すれば他の方法でも本講演で述べることは生じるようである．

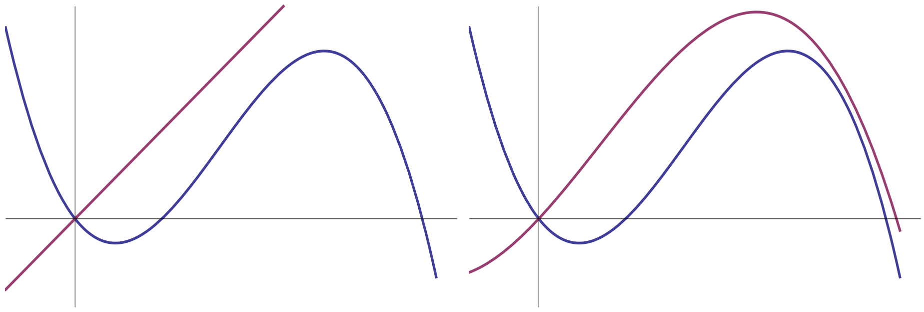


図 1: FHN 方程式 (1)（左図）と修正 FHN 方程式 (2)（右図）のアイソクライン．$a = 0.25, \gamma = 5$ さらに $d = 0.41, b = 1.03, c = 0.5$ とした．

参考文献

[1] R. R. Aliev and A. V. Panfilov, *A simple two-variable model of cardiac excitation*, Chaos, Solitons and Fractals 7 (1996) 293-301.

[2] M.Cross and P.Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Reviews of Modern Physics, 65(3), 1993.

[3] http://www.thevirtualheart.org.

[4] F. H. Fenton, E. M. Cherry, H. M. Hastings and S. J. Evans, *Multiple mechanisms of spiral wave breakup in a model of cardiac electrical activity*, Chaos 12 (2002) 852-892.

[5] R. FitzHugh, *Impulse and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophys. J. 1 (1961) 445-465.

[6] O.Gani and T.Ogawa, *Alternans and spiral breakup in an excitable reaction-diffusion system: a simulation study*, preprint,

[7] O.Gani and T.Ogawa, *Instability of Periodic Traveling Wave Solutions in a Generalized FitzHugh-Nagumo Model for Excitable Media*, preprint,

[8] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *A quantitative description of membrane cur- rent and its application to conduction and excitation in nerve*, J.Physiol. 117 (1952) 500-544.

[9] A. Karma, *Spiral breakup in model equations of action potential propagation in cardiac tissue*, Physical Review Letters. 71 (1993) 1103-1106.

[10] C. Luo and Y. Rudy, *A model of the ventricular cardiac action potential*, Circ. Res. 68 (1991) 1501-1526.

[11] J. S. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. IRE. 50 (1962) 2061-2071.

[12] Y.Nishiura, *Far-from-Equilibrium Dynamics*, translations of Mathematical Monographs 209, AMS, 2002.

[13] J. D. M. Rademacher, B. Sandstede and A. Scheel, *Computing absolute and essential spectra using continuation*, Physica D 229 (2007) 166-183.

[14] H. Sakaguchi and T. Maruyama, *Elimination of pulses and spirals by external forces in Luo-Rudy model*, J. of the Phy. Soc. of Japan 77 (2008) 1-5.

[15] J. A. Sherratt, *Numerical continuation methods for studying periodic travelling wave (wavetrain) solutions of partial differential equations*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 4684-4694.

Conservation breaking dynamics in reaction-diffusion systems

桑村雅隆[1]

次の形の反応拡散方程式系を考える。

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_t &=& D_u u_{xx} + f(u,v) + \varepsilon g(u,v), \\ v_t &=& D_v v_{xx} - f(u,v) + \varepsilon h(u,v) \end{array}\right. \qquad (0 < x < L) \tag{1}$$

ここで、f, g, h は滑らかであり、$D_v > D_u > 0$、$\varepsilon > 0$ とする。また、境界条件は周期境界条件であるとする。$\varepsilon = 0$ のとき、(1) は

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_t &=& D_u u_{xx} + f(u,v), \\ v_t &=& D_v v_{xx} - f(u,v) \end{array}\right. \qquad (0 < x < L) \tag{2}$$

となる。これは、保存量をもつ反応拡散方程式 (reaction-diffusion systems with mass conservation) とよばれる。その理由は、(2) の解に対して

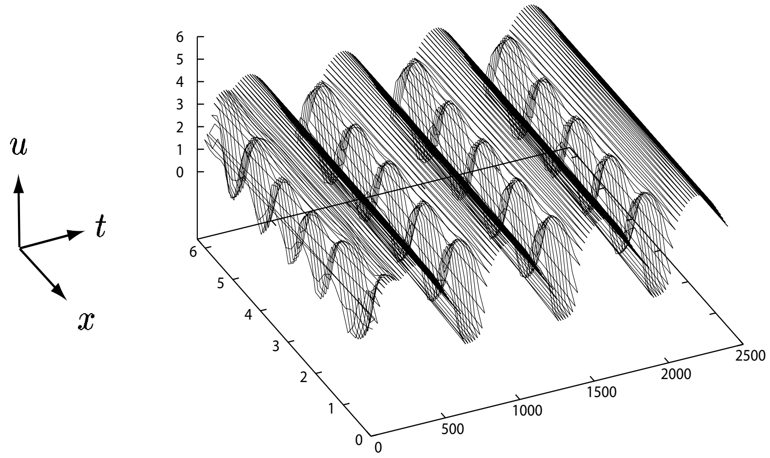
$$\int_0^L (u(x,t) + v(x,t))\, dx \equiv \int_0^L (u(x,0) + v(x,0))\, dx \tag{3}$$

が成り立つからである。(2) は細胞の極性化 (cell polarization) を説明するために、[1, 6] によって導入された概念的なモデルである。彼らは、(2) が特定の形の f をもつとき、拡散誘導型の不安定性 (Turing instability) によって空間一様な平衡解から分岐する解が局在化された単純な形の解 (spike) に近づくことを数値計算と semi-rigorous な解析により示した。この結果は、[2, 4, 5] によって数学的にも厳密に証明された。

本講演では、(2) を摂動した (1) の形の反応拡散方程式系を用いて「大域的に安定な空間一様な平衡解をもつ反応拡散方程式であっても、遷移過程において Turing-like な空間パターンが現れることがありうる」という例を示す。このことは、自発的な空間パターン形成において、必ずしも空間一様な平衡解の存在を前提にする必要がないことを示唆している。また、(1) と同様の構造をもつ単純な３成分の反応拡散方程式系を用いて、下図のように空間的に（ほとんど）一様な振動状態と Turing-like な空間パターンが交互に繰り返し現れる例を与える。

これらは、反応拡散方程式系の解のダイナミクスにおいて、今までの常識に反する奇妙なものがありうることを示している。以上の結果は、森田善久先生との共同研究 [3] にもとづく。

[1]神戸大学人間発達環境学研究科、kuwamura@main.h.kobe-u.ac.jp



参考文献

[1] Ishihara, S., Otsuji, M., Mochizuki A., Transient and steady state of mass-conserved reaction-diffusion systems, Phys. Rev. E **75** (2007), 015203.

[2] Jimbo, S., Morita, Y., Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation, J. Diff. Eqns **255** (2013) 1657-1683.

[3] Kuwamura, M., Morita, Y., Conservation breaking dynamics in reaction-diffusion systems, submitted.

[4] Morita, Y., Spectrum comparison for a conserved reaction-diffusion system with a variational property, J. Appl. Anal. Comp. **2** (2012) 57-71.

[5] Morita, Y., Ogawa, T., Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of mass, Nonlinearity **23** (2010) 1387-1411.

[6] Otsuji, M., Ishihara, S., Co, C., Kaibuchi, K., Mochizuki, A., Kuroda, S., A mass conserved reaction-diffusion system captures properties of cell polarity, PLoS Comp. Biol. **3** (2007) e108.

球面上での領域のラプラス・ベルトラミ作用素の固有値と関連する非線形問題

壁谷　喜継（大阪府立大学）

1　序

本講演の内容は，C. Bandle (Univ. Basel), 川上竜樹氏（大阪府立大学），小坂篤志氏（大阪市立大学），二宮広和氏（明治大学）との共同研究に基づく．

講演の初めは，線形偏微分方程式

$$\Lambda u + \lambda u = 0, \quad \text{in } \Omega(\varepsilon) \subset \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{1.1}$$

を球面上の領域 $\Omega(\varepsilon)$ で考える．ここで， Λ は球面 $\mathbb{S}^n$ での Laplace-Beltrami 作用素, 次元 n は $n \geq 2$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ は小さいパラメータである．$\Omega(\varepsilon)$ は北極中心で，測地半径 $\pi - \varepsilon$ の測地球である．境界条件は, Dirichlet, Neumann 条件のみならず，第三種境界条件も考える．

後半では，以下のような非線形問題の解の分岐ついても考察する．

$$\Lambda u + \lambda(-u + |u|^{p-1}u) = 0, \quad \text{in } \Omega(\varepsilon) \subset \mathbb{S}^n \ (p > 1) \tag{1.2}$$

領域が球面全体のとき， $-\Lambda$ の固有値・固有関数はよく知られており, k 番目の固有値 ($k = 0$ から数える) は $k(k+n-1)$ であり，その多重度は

$$(2k+n-1)\frac{(k+n-2)!}{(n-1)!k!} \text{である．}$$

では，本問題のような領域の摂動はどのような影響を固有値にあたえるのであろうか？ 非線形問題を解くにあたり，固有値の情報は非常に重要

である．固有値の情報を得るため，問題を極座標表示して考える．簡単のため，$n=2$ の場合を記す．このときは，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\lambda u=0 \tag{1.3}$$

となり，これを変数分離 $u(\theta,\phi)=\Phi(\theta)\Psi(\phi)$ で解くことになる．

境界条件はまず，Neumann 条件 $\partial_{\mathbf{n}}u=0$ をおく．なお， Tichmarsh の本 (“Eigenfunction Expansion Part 1” (1962)) に従った議論を行えば，**固有関数は変数分離形のみ（変数分離形で完全系）**であることがわかる．（吉田耕作「微分方程式の解法第 2 版」の§ 90，91 にも本質的には同様な記述がある.） 従って，変数分離形で考えれば十分である．このとき，Φ と Ψ は

$$\sin^2\theta(\Phi''(\theta)+(\cot\theta)\Phi'(\theta)+\lambda\Phi)=-\frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)}=m^2$$

を満たす．ここで $m=0,1,2,\ldots$.

まず，$\Psi(\phi)=c_1\cos m\phi+c_2\sin m\phi$ がわかる．$m=0$ のときは，$\Psi(\phi)\equiv 1$ とみなす． また， Φ は **Legendre の陪微分方程式**

$$\Phi''(\theta)+(\cot\theta)\Phi'(\theta)+(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta})\Phi=0 \tag{1.4}$$

を満たす． パラメータを $\lambda=\nu(\nu+1)$ とおき，非負の ν をとる． すると，定数倍を除いて，第一種の Legendre 陪関数 (整数以外の ν に対しては，実は Ferrers による) $P_\nu^m(\cos\theta)$ が (1.4) の解である． ν は境界条件

$$\frac{d}{d\theta}P_\nu^m(\cos(\pi-\varepsilon))=0.$$

から決まる．ここから，どのように固有値が決定されるかを講演では解説する．

２種競争系の球対称定常解の大域的な解構造について

観音幸雄　（愛媛大学教育学部）

本報告では，２種競争系の定常問題

$$
(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{0} = \varepsilon^2 D\, r^{1-\ell} \left[r^{\ell-1}\, \mathbf{u}' \right]' + \mathbf{f}(\mathbf{u}), & r \in (0,\pi), \\ \mathbf{u}' = \mathbf{0}, \qquad r = 0, \pi \end{cases}
$$

の正値解の大域的な解構造について考える．ここで，$\mathbf{u} = (u,v) \in \mathbb{R}^2$，$\varepsilon > 0$ であり，D は d_u，$d_v > 0$ を用いて $D = \mathrm{diag}(d_u, d_v)$ と表される対角行列，$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は滑らかな関数である．ℓ は生物の住処の空間次元を意味する自然数であるが，ここでは $\ell \geq 1$ をみたす実数値パラメータとして扱う．また，順序関係 $\preceq_s$ および $\preceq_o$ を

$$
\begin{aligned}
(u_1,v_1) \preceq_s (u_2,v_2) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad u_1 \leq u_2,\ v_1 \leq v_2; \\
(u_1,v_1) \preceq_o (u_2,v_2) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad u_1 \leq u_2,\ v_1 \geq v_2
\end{aligned}
$$

により定義し，二項関係 $\prec_s$ および $\prec_o$ をそれぞれ上の定義において大小関係 $\leq$ を $<$ で置き換えたものとする．

関数 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ は２種の競争関係を表す非線形項であるから，$\mathbf{f}(\mathbf{u})$ は

$$
\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f,g)(\mathbf{u}), \qquad f(\mathbf{u}) = u\, f_0(\mathbf{u}), \qquad g(\mathbf{u}) = v\, g_0(\mathbf{u})
$$

と表され，次の性質をみたすものとする．

(A.1) $\mathbf{f}_0(\mathbf{u}) = (f_0, g_0)(\mathbf{u})$ は滑らかな関数であり，$\mathbf{f}_0(\mathbf{0}) \succ_s \mathbf{0}$，第 1 象限の任意の $\mathbf{u}$ に対して

$$
\max\{f_{0u}(\mathbf{u}), f_{0v}(\mathbf{u}), g_{0u}(\mathbf{u}), g_{0v}(\mathbf{u})\} < 0
$$

をみたす，

(A.2) ある α_u，$\alpha_v > 0$ が存在して

$$
f_0(\alpha_u, 0) = 0 > g_0(\alpha_u, 0), \qquad g_0(0, \alpha_v) = 0 > f_0(0, \alpha_v)
$$

が成り立ち，関係式 $\mathbf{f}_0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$，$\det \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) < 0$ をみたす第 1 象限の解 $\mathbf{u}$ は $\bar{\mathbf{e}}$ のみである，

(A.3) 第 1 象限における方程式 $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ の解は $\bar{\mathbf{e}}$ のみである．

ここで，非線形項 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ が

$$
f_0(\mathbf{u}) = 1 - u - c\, v, \qquad g_0(\mathbf{u}) = 1 - b\, u - v
$$

である古典的な２種競争系において，

$$
\alpha_u = \alpha_v = 1, \qquad \bar{\mathbf{e}} = \left(\frac{1-c}{1-b\,c}, \frac{1-b}{1-b\,c} \right)
$$

とおくと，強い競争関係を意味する条件 $\min(b,c) > 1$ のもとで，仮定 (A.1)，(A.2)，(A.3) がみたされることに注意したい．また，仮定 (A.1)，(A.2) から，

(i) 問題 (1) は順序関係 $\preceq_o$ に関して weakly coupled elliptic system，つまり，比較定理が成り立つ系である，

(ii) $\mathbf{e}_- = (0, \alpha_v)$ と $\mathbf{e}_+ = (\alpha_u, 0)$ は常微分方程式 $\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ の安定な平衡点であり，$\bar{\mathbf{e}}$ は不安定な平衡点である，

ことにも注意したい．仮定 (A.3) は問題 (1) を単純にするためのものである．

問題 (1) に対する正値解の解構造の研究は多く研究者によって行われてきている（例えば，Gui-Lou [1]，Ni [4]，および，それらの参考文献を参照すると良い）．$\ell = 1$ の場合，古典的な２種競争系については，正値解の大域的な解構造が決定されている（[2]）．$\ell > 1$ の場合，単純分岐点から分岐する解の枝についての大雑把な情報を得ることができる（Rabinowitz [5]）が，問題 (1) の正値解の詳細な解構造に関して十分な結果は得られていない．最近，仮定 (A.1)，(A.2)，(A.3) のもとで，次のような正値解の一意性定理が得られている．

定理 1 (Theorem 2.1 in [3]) 非線形項 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ は仮定 (A.1), (A.2), (A.3) をみたすとし，$\mathbf{u}_k(r) = (u_k, v_k)(r)$ （$k = 1$，2）を $\varepsilon = \varepsilon_k > 0$ に対する問題 (1) の任意の正値解とする．このとき，$\mathbf{u}_1(r)$ および $\mathbf{u}_2(r)$ は

$$\mathbf{0} = \varepsilon^2 \, D \, r^{1-\ell} \, \left[r^{\ell-1} \, \mathbf{u}' \right]' + \mathbf{f}(\mathbf{u}), \qquad r > 0$$

の正値かつ有界な解であり，$u_1(0) = u_2(0)$ または $v_1(0) = v_2(0)$ ならば

$$\mathbf{u}_1(\varepsilon_1 \, \xi) = \mathbf{u}_2(\varepsilon_2 \, \xi), \qquad \xi \geq 0$$

が成り立つ．

本報告では，上記の一意性定理を概観した後に，仮定 (A.1)，(A.2)，(A.3) のもとで，問題 (1) の正値解の大域的な解構造について議論する．

参考文献

[1] C. Gui and Y. Lou, Uniqueness and nonuniqueness of coexistence states in the Lotka-Volterra competition model, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), pp. 1571–1594.

[2] Y. Kan-on, Global bifurcation structure of positive stationary solutions for a classical Lotka-Volterra competition model with diffusion, Japan J. Indust. Appl. Math. **20** (2003), pp. 285–310.

[3] Y. Kan-on, A uniqueness theorem of radially symmetric positive stationary solutions for a competition-diffusion system, J. Math. Anal. Appl. **422** (2015), pp. 625–637.

[4] W.-M. Ni, The mathematics of diffusion, SIAM, Philadelphia, PA, 2011.

[5] P. H. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Functional Analysis **7** (1971), pp. 487-513.