体積保存性をもつ曲面の発展方程式の定常曲面の安定性について

高坂良史 *
神戸大学大学院海事科学研究科

以下の曲面の発展方程式による曲面の時間発展について考える:

$$V = -\Delta_{\Gamma(t)} H. \tag{1}$$

ここで，V は時間発展する曲面 $\Gamma(t)$ の法速度，H は $\Gamma(t)$ の平均曲率，$\Delta_{\Gamma(t)}$ は $\Gamma(t)$ 上の Laplace-Beltrami 作用素である．(1) は表面拡散方程式と呼ばれ，1957 年に W. W. Mullins により，粒界溝の発展プロセスが表面拡散のみによる場合に，その発展プロセスを記述する方程式として提唱された ([2] 参照)．近年では，高温水素アニールによるシリコン微細構造の形態変化の解析に表面拡散方程式 (1) が利用されている．

$\mathcal{A}(\Gamma(t))$ を曲面 $\Gamma(t)$ の表面積とするとき，表面拡散方程式 (1) は $\mathcal{A}(\Gamma(t))$ の H^{-1}-勾配流として導出される．つまり，表面拡散方程式 (1) は $\Gamma(t)$ によって囲まれた部分の体積を一定に保ちながら $\Gamma(t)$ の表面積を最小化するという変分構造をもつ．また，(1) は曲面を何らかの関数で表した場合，その関数を未知関数とする非線形 4 階放物型偏微分方程式として表記される．

本講演では 2 つの軸対象な曲面 Π_i ($\subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$) をとり，Π_1, Π_2 にはさまれた回転面 $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathbb{R}^3$ の以下の初期値・境界値問題による時間発展を考え，対応する定常曲面の安定性について考える．

$$\begin{cases} V = -\Delta_{\Gamma(t)} H \quad \text{on } \Gamma(t), \\ \angle(\Gamma(t), \Pi_i) = \theta_i \quad \text{on } \Gamma(t) \cap \Pi_i, \\ (\nabla_{\Gamma(t)} H, \nu_i)_{\mathbb{R}^3} = 0 \quad \text{on } \Gamma(t) \cap \Pi_i, \\ \Gamma(0) = \Gamma_0. \end{cases} \tag{2}$$

ただし，$\nabla_{\Gamma(t)}$ は $\Gamma(t)$ 上の勾配ベクトル場，ν_i は $\Gamma(t) \cap \Pi_i$ での $\Gamma(t)$ の単位余法線ベクトルである．(2) における境界条件は，エネルギー汎関数

$$\mathcal{A}(\Gamma(t)) - \gamma_1 \mathcal{A}(\Sigma_1(t)) - \gamma_2 \mathcal{A}(\Sigma_2(t))$$

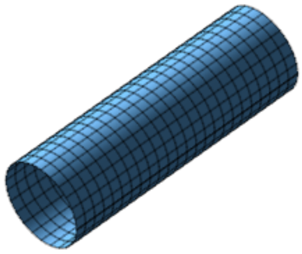
に対する H^{-1}-勾配流を考えたときに自然に得られる境界条件である．ここで，$\Sigma_i(t)$ は Π_i 上で $\partial\Gamma(t)$ を境界にもつ曲面を表し，$\mathcal{A}(\Sigma_i(t))$ はその面積を表す ($\mathcal{A}(\Sigma_i(t))$ は濡れエネルギーと呼ばれる)．$\theta_i = \arccos(\gamma_i)$ である．

(2) の定常曲面 Γ_* の平均曲率 H_* は

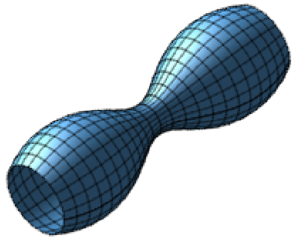
$$\begin{cases} \Delta_{\Gamma_*} H_* = 0 \quad \text{on } \Gamma_*, \\ (\nabla_{\Gamma_*} H_*, \nu_i)_{\mathbb{R}^3} = 0 \quad \text{on } \Gamma_* \cap \Pi_i \end{cases}$$

を満たすので，$H_* =$ (定数) となる．つまり，(2) の定常曲面は平均曲率一定回転面となる．平均曲率一定回転面は Delaunay 曲面と呼ばれ，Delaunay 曲面は円柱，アンデュロイド，球面，ノドイド，カテノイド (この場合は平均曲率 0) となる．

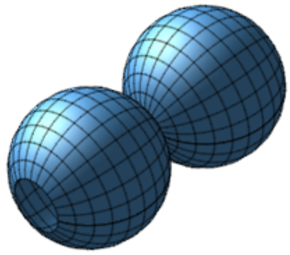
*e-mail: kohsaka@maritime.kobe-u.ac.jp



円柱



アンデュロイド



球面

本講演では，円柱，アンデュロイド，球面の安定性について考え，各平均曲率一定曲面の安定性の判定基準について得た結果を紹介する．時間があれば，体積保存型平均曲率流

$$V = H - H_{av}, \quad H_{av} = \frac{1}{\mathrm{Area}[\Gamma(t)]}\int_{\Gamma(t)} H\, dS$$

との関連についても紹介する．

References

[1] M. Athanassenas, *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, J. Reine Angew. Math., 377(1987), 97–107.

[2] W. W. Mullins, *Theory of thermal grooving*, J. Appl. Phys., 28(1957), 333–339.

[3] L. G. Fel and B. Y. Rubinstein, *Stability of axisymmetric liquid bridges*, Z. Angew. Math. Phys., DOI 10.1007/s00033-015-0555-5(2015), 1–25.

[4] B. Y. Rubinstein and L. G. Fel, *Theory of axisymmetric pendular rings*, J. Colloid Interface Sci., 417(2014), 37–50.

[5] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes*, SIAM J. Appl. Math., 47(1987), no. 3, 516–525.

[6] T. I. Vogel, *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes. II. General contact angles*, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), no. 4, 1009–1028.

[7] T. I. Vogel, *Convex, rotationally symmetric liquid bridges between spheres*, Pacific J. Math., 224(2006), no. 2, 367–377.

[8] T. I. Vogel, *Liquid bridges between balls: the small volume instability*, J. Math. Fluid Mech., 15(2013), no. 2, 397–413.

[9] T. I. Vogel, *Liquid bridges between contacting balls*, J. Math. Fluid Mech., 16(2014), no. 4, 737–744.