

長方形領域における樟脳円板の運動 に対する分岐解析

宮路 智行（明治大学先端数理科学インスティテュート）

非線形・非平衡系における一つの自己駆動粒子が行うビリヤード運動を考える．たとえば円板状に固められた樟脳が自発的に水面を動く現象はその一例である．樟脳が水に展開することで表面張力差が生じ，樟脳円板は駆動力を獲得する ([15], [19])．その結果，まるでビリヤード球のように直進・反射を繰り返す．

樟脳円板の運動は次のような特徴をもつ：

1. 水槽の壁から離れたところではほぼ等速直線運動をする．
2. 壁に近づくと壁に衝突せずに反射する．
3. 入射角よりも反射角の方が大きい^{*1}(非完全弾性反射)．

自身で駆動力を獲得しながら運動する非線形・非平衡現象なので，これを非平衡ビリヤード球と呼ぶ．上記 2, 3 の特徴は数学的なビリヤード問題と著しく異なる．

われわれは，水槽内での樟脳円板の平面的な運動を記述するモデル方程式として，次の常微分方程式系が定める力学系を考える ([2, 14, 1])：

$$\begin{cases} \dot{x} = v + m_0 (h_a(cL + x) - h_a(cL - x)), \\ \dot{v} = v [\delta - m_1(v^2 + w^2)] + m_2 (h_a(cL + x) - h_a(cL - x)), \\ \dot{y} = w + m_0 (h_a(L + y) - h_a(L - y)), \\ \dot{w} = w [\delta - m_1(v^2 + w^2)] + m_2 (h_a(L + y) - h_a(L - y)), \end{cases} \quad (1)$$

ここで $x(t), v(t), y(t), w(t)$ は時間 t の関数， m_0, m_1, m_2, a, c, L は正のパラメータである．関数 h_a は

$$h_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-2ax} \quad (2)$$

^{*1} [14] やその参考文献では，軌道と壁のなす角を入射角及び反射角と定義しており，「反射角の方が小さい」と書かれている．

で与えられる. (x, y) は長方形領域 $[-cL, cL] \times [-L, L]$ における座標を表す. 以下では $a = m_0 = m_1 = m_2 = 1$ と定める. (1) は樟脳円板を一点粒子と見なしたモデルであるから, 以下ではこれを粒子モデルと呼ぶ.

よく知られているように, 等速直線運動と壁での完全弾性反射を繰り返す正方形領域における通常のビリヤード問題は, 2次元トーラス上の平行移動の問題に帰着する. 初期速度を (ω_1, ω_2) とすれば, ビリヤード球の軌跡は, 初期位置がどこであろうと次のいずれかとなる: (i) $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ ならば周期軌道を描く, (ii) $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ ならば領域を埋め尽くす準周期軌道を描く. すなわち, その定性的な挙動が初期条件に敏感に依存する. 一方, (1) に従うわれわれの非平衡ビリヤード球の運動にはアトラクタがあり, ある初期値の近傍の軌道も同一の周期軌道に吸引され, 定性的には同じ挙動を示す (図 1).

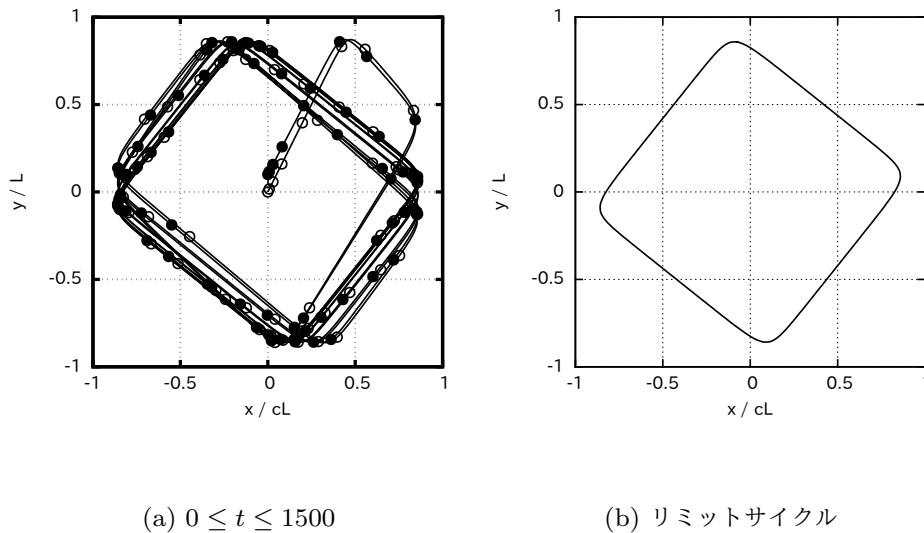


図 1 $c = 1, L = 10, \delta = 0.06$ のときの二つの軌道 (a) とそれらを吸引するリミットサイクル (b). 時計回りに運動している.

長方形領域における数値計算によれば, (1) は準周期的な解やカオス的な解をもつ ([11, 14, 13]). 図 2 は c をいろいろ変化させて描いた軌道図である. 周期軌道と非周期軌道が断層的に入れ替わっている. これは周期解の数値分岐解析と平衡点の余次元 2 の分岐解析により, 静止状態の **Hopf-Hopf** 分岐とそれにより生じる **Arnold** の舌に起因することが最近わかった [12].

樟脳円板が運動を持続するには樟脳の純度が重要である ([8],[10]). もし樟脳円板に不純物が多いと, 十分に樟脳が溶解できず, 駆動力が得られない. そのときは静止状態が安

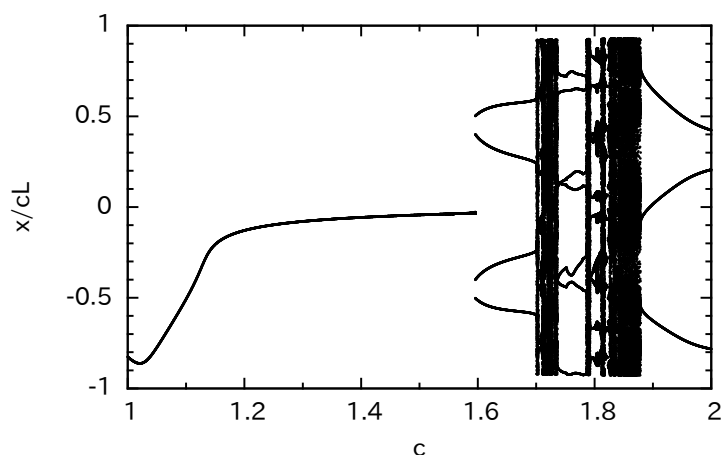


図2 $L = 10, \delta = 0.06$ における (1) の軌道図.

定である．一方，樟脳の純度が高いとき，静止状態は不安定だろう．もし樟脳円板が真の円板状であって注意深く静かに水面に浮かべられれば，対称性により，表面張力の変化が対称に生じ，運動は起こらないと思われる．しかし実際にはこれらの対称性は壊れてしまい，非一様な表面張力変化によって運動が生じる．もし平面上に展開する樟脳の場合ある種の反応拡散方程式系に従うと考えれば，樟脳純度の変化に伴う静止パルス解から進行パルス解へのピッチフォーク分岐として解釈できる．Ei et al. はそのような分岐点近傍において中心多様体理論を展開し，四次元中心多様体上の縮約ベクトル場を導いた [2]．その縮約理論の解説は [3] にもある．さらに，二つのパルス間の相互作用を考慮して，パルスを長方形領域に閉じ込めたモデル方程式 (1) を導いた．また，Chen らによれば，移動境界モデルからも同様の縮約方程式 (1) が導かれる [1]．

[8] および [10] には樟脳円板の実験の詳細な記述がある．[6] では樟脳円板の運動に関するフェーズフィールドモデルが提案され，ピッチフォーク分岐，直進・反射，および二つの樟脳円板の相互作用が数値計算により観察された．[10] では \mathbb{R}^2 上での単独の粒子および一つの壁で反射する運動を記述する粒子モデルが理論的および数値的に解析された．松本 [11] と森原 [13] は長方形領域における粒子モデルに対して，周期軌道と非周期的な軌道を数値的に観察した．また，彼らは極限操作によって一次元離散力学系モデルを提案し，周期軌道の存在を議論した．ただし，その離散モデルでは非周期的な運動が説明できなかった．Mimura et al. [14] は粒子モデルを数値的に観察して離散モデルへの補正を行い，二次元離散力学系モデルを提案し，カオス的な軌道を数値計算で見出した．

樟脳粒の運動に対する我々とは異なる問題設定での数理的な研究も盛んに行われてい

る. Ei et al.([4], [5]) は, 円環領域を動く樟脳船集団の渋滞現象の理解に向けて, 中心多様体理論を展開して偏微分方程式モデルの縮約系であるところの常微分方程式系を導いた. [5] は縮約方程式を [4] よりも高次の項まで求めている. Iida et al.[7] は楕円形の樟脳粒が動き出す様子に関して数理モデルを提案し, 摂動理論による解析を行った. [4] や [7] の化学的な議論については [16] とその中の参考文献を参照されたい. それは樟脳粒の自発的運動に関する実験や数理モデルのレビューであり, より完全な文献のリストがある.

我々は樟脳円板の運動を動機付けとして, 反応拡散系の中心多様体縮約を出発点とした. 一方, 樟脳以外の実験・数値実験でも非平衡ビリヤードのような運動が報告されている. 例えば [18] は非線形光共振器における空洞ソリトンのモデル方程式 (散逸項を伴う Schrödinger 方程式と ODE の結合系) に対する数値計算で図 1(b) と類似の軌道を得ている. [18] では, [17] の実験との類似が指摘されている. [17] は垂直に振動する液体の上を跳ねながら動く油滴の運動の実験である. [20] は Marangoni 効果で駆動されて水面を動く油滴の実験であり, 円板状のシャーレをビリヤードのように動くことがある. これらに対する数理モデルとしては, 反応拡散系は必ずしも適当でないかもしれないが, 縮約方程式は数理構造から導かれるので, ある程度普遍性をもつはずである. 従って粒子モデルに対する解析結果は, 樟脳系にとどまらず, より広い範囲に適用可能だと考えられる.

■謝辞 本研究を行うにあたり, 先行研究および未発表論文に関する貴重な資料を三村昌泰教授 (明治大学先端数理科学インスティテュート) からご提供いただきました. 心より感謝いたします. 本研究では文部科学省共同利用・共同研究拠点明治大学先端数理科学インスティテュート「現象数理学研究拠点」の共同利用計算機設備を利用しました.

参考文献

- [1] X. Chen, S.-I. Ei, M. Mimura, Self-motion of camphor discs. model and analysis. *Networks and Heterogeneous Media* **4** (2009) 1–18.
- [2] S.-I. Ei, M. Mimura, and M. Nagayama. Interacting spots in reaction diffusion systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **14** (2006) 31–62.
- [3] 柴伸一郎. 縮約理論. 三村昌泰 (編), パターン形成とダイナミクス, 非線形・非平衡現象の数理, 第 4 巻, 第 4 章, pp. 95–146. 東京大学出版会, 2006.
- [4] S.-I. Ei, K. Ikeda, M. Nagayama, and A. Tomoeda. Application of a center manifold theory to a reaction-diffusion system of collective motion of camphor disks and boats. *Math. Bohem.*, **139** (2014) 363–371.

- [5] S.-I. Ei, K. Ikeda, M. Nagayama, and A. Tomoeda. Reduced model from a reaction-diffusion system of collective motion of camphor boats. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, **8** (2015) 847–856.
- [6] 古屋栄一郎. 円板樟脳の運動を記述するフェーズフィールドモデルの数値計算. 広島大学修士論文, 2001.
- [7] K. Iida, H. Kitahata, and M. Nagayama. Theoretical study on the translation and rotation of an elliptic camphor particle. *Phys. D*, **272** (2014), 39–50.
- [8] 神田洋平. 円板樟脳の運動についての実験と数値解析. 広島大学卒業論文, 2002.
- [9] Yu.A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Third Edition*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [10] 松本美紀. 樟脳運動を記述する粒子モデルの解析. 広島大学修士論文, 2002.
- [11] 松本武彦. 非線形非平衡下におけるビリヤード問題. 広島大学修士論文, 2003.
- [12] T. Miyaji. Arnold tongues in a billiard problem in nonlinear and nonequilibrium systems. submitted.
- [13] 森原隆. 非平衡ビリヤード問題：シミュレーションと解析. 広島大学修士論文, 2004.
- [14] M. Mimura, T. Miyaji, and I. Ohnishi. A billiard problem in nonlinear and nonequilibrium systems. *Hiroshima Math. J.*, **37** (2007) 343–384.
- [15] S. Nakata, Y. Iguchi, S. Ose, M. Kuboyama, T. Ishii, and K. Yoshikawa. Self-rotation of a camphor scraping on water: new insight into the old problem. *Langmuir*, **13** (1997) 4454–4458.
- [16] S. Nakata, M. Nagayama, H. Kitahata, N.J. Suematsu, and T. Hasegawa. Physicochemical design and analysis of self-propelled objects that are characteristically sensitive to environments. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **17** (2015) 10326–10338.
- [17] S. Protière, A. Boudaoud, and Y. Couder. Particle-wave association on a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, **554** (2006) 85–108.
- [18] F. Prati, L. A. Lugiato, G. Tissoni, and M. Brambilla. Cavity soliton billiards. *Phys. Rev. A*, **84** (2011) 053852.
- [19] L. Rayleigh. Measurements of the amount of oil necessary in order to check the motions of camphor upon water. *Proc. R. Soc. Lond.*, **47** (1889) 364–367.
- [20] S. Tanaka, Y. Sogabe, and S. Nakata, Spontaneous change in trajectory patterns of a self-propelled oil droplet at the air-surfactant solution interface. *Phys. Rev. E*, **91** (2015) 032406.