界面ダイナミクスに対する
接触エネルギーの効果について

可香谷 隆 (東京工業大学 理工学研究科 数学専攻) *

本講演では，集合 $A \subset \Omega$ に対するエネルギー

$$E(A) := \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) + \cos\theta \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \partial\Omega). \tag{1}$$

を扱う．ただし，n を自然数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域，$\theta \in (0, \pi)$ を固定された定数とする．(1) の第一項目は界面エネルギー，第二項目は接触エネルギーに対応している．また，$0 < m < |\Omega|$ に対して集合族

$$\Sigma_m := \{A \subset \Omega : |A| = m\}$$

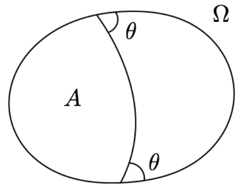

図 1: 臨界点 A

を定める．エネルギー (1) の Σ_m 上における臨界点 $A \in \Sigma_m$ に対して，形式的には，曲面 $\partial A \cap \Omega$ は平均曲率一定であり，$\partial\Omega$ において接触角 θ を生成する (図 1 参照)．本講演ではこのエネルギー (1) に対して，勾配流と特異極限の二つの視点から考察していく．

(i) 勾配流について [1] : ここでは，$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ とする．初期値となる $\partial\Omega$ に接触している集合 $A(0) \subset \Omega$ がエネルギーの勾配の方向に動く場合の漸近挙動を考察することを最初の目標とする．ただし，ここで考察するエネルギーは (1) で用いた接触エネルギーが非一様なものを扱い，$\Gamma := \partial A \cap \Omega$ の左の端点と右の端点のそれぞれの x 座標を $l_-(\Gamma)$, $l_+(\Gamma)$ とすると，固定された定数 $\psi_-, \psi_+ \in (0, \pi/2)$ に対してエネルギー

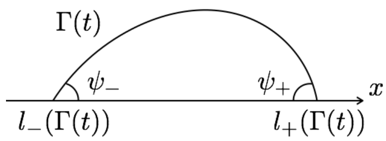

図 2: 勾配流のおける境界条件

$$\tilde{E}(A) := \mathcal{H}^1(\Gamma) - l_+(\Gamma)\cos\psi_+ + l_-(\Gamma)\cos\psi_-$$

を考察対象とする．上記の初期値となる集合 $A(0)$ のエネルギー $\tilde{E}$ に関する形式的な勾配流 $A(t)$ に対して，$\Gamma(t) := \partial A(t) \cap \Omega$ とすると，$\Gamma(t)$ は以下の自由境界値の面積保存型曲率流方程式を満たす：

(Eq) V は $\Gamma(t)$ の外向き法線速度ベクトル，κ は $\Gamma(t)$ の曲率であり $A(t)$ の外向き法線方向が正のものとすると，

$$V = \kappa - \frac{\int_{\Gamma(t)} \kappa \, d\mathcal{H}^1}{\int_{\Gamma(t)} d\mathcal{H}^1} \quad \text{on} \quad \Gamma(t).$$

(BC) $\Gamma(t)$ は x 軸上で 2 つの端点を持ち，左の端点，右の端点それぞれ $A(t)$ の内部で接触角 $\psi_-, \psi_+ \in (0, \pi/2)$ を持つ (図 2 参照)．

さらに，初期条件として以下を仮定する：

(IC) $\Gamma(0)$ は x 軸から見て C^2 級の上に狭義凸な関数でグラフ表示されていて，境界値条件 (BC) を満たす．

非一様な接触エネルギーを扱っているため，上記の方程式の特殊な解として進行波解が得られ，この進行波解の局所指数安定性を紹介する．

*e-mail: kagaya.t.aa@m.titech.ac.jp

(ii) 特異極限について [3]：次に，二層分離モデルとしての特異極限問題を考察する．近似エネルギーとして $\varepsilon > 0$ に対して

$$E_\varepsilon(u) := \int_\Omega \frac{\varepsilon|\nabla u|^2}{2} + \frac{W(u)}{\varepsilon}\,dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(u)\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

を用いる．ただし，u は $\overline{\Omega}$ 上の関数，W を double well potential(例：$W(s) = (1-s^2)^2$)，σ を $\mathbb{R}$ 上の関数とする．上記のエネルギー E_ε の臨界点 u_ε は領域 Ω を $\{u_\varepsilon \approx 1\}$ と $\{u_\varepsilon \approx -1\}$ の二つの領域に分ける (図 3 参照)．この二つの領域やレベルセット $\{u_\varepsilon \approx 0\}$ の $\varepsilon \to 0$ における挙動を考察することが目標となる．形式的には，以下の性質が期待できる：

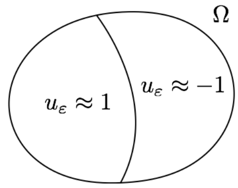

図 3: 臨界点 u_ε

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \to u_0 = \pm 1 \quad \text{for} \quad \mathcal{H}^n\text{-a.e. } x \in \Omega \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0, \\ &\exists m \text{ s.t. } \{u_0 = 1\} \text{ は} \Sigma_m \text{における } E \text{ の臨界点.} \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，ここでのエネルギー E における定数 θ は

$$\theta = \arccos \frac{\sigma(1) - \sigma(-1)}{\int_{-1}^1 \sqrt{2W(s)}\,ds}$$

となることが期待できる．本講演では以下の仮定のもとで考察する：

(A1) Ω は境界が滑らかな有界領域とする．

(A2) W は滑らかな $\mathbb{R}$ 上の関数で $W \geq 0$, $W(\pm 1) = 0$, ある定数 $\gamma \in (0,1)$ に対して $W''(s) > 0(|s| \geq \gamma)$ とし，$(-1,1)$ で唯一の局所最大点を持つとする．

(A3) σ は滑らかな $\mathbb{R}$ 上の関数で，ある定数 $C \in [0,1)$ に対して $|\sigma'(s)| \leq C\sqrt{2W(s)}$ を満たすとする．

(A4) $\varepsilon_i \to 0 (i \in \mathbb{N}, i \to \infty)$ を満たす数列に対して滑らかな関数 u_{ε_i} と定数 λ_i が存在して以下の方程式を満たすとする (u_{ε_i} が $\tilde{E}$ に対する積分値一定のもとでの臨界点であることに対応)：

$$\begin{cases} -\varepsilon_i \Delta u_{\varepsilon_i} + \dfrac{W'(u_{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i} = \lambda_{\varepsilon_i} & \text{in } \Omega, \\ \varepsilon_i \langle \nabla u_{\varepsilon_i}, \nu \rangle = -\sigma'(u_{\varepsilon_i}) & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，ν は Ω の外向き単位法線ベクトルとする．

(A5) $\|u_{\varepsilon_i}\|_{L^\infty(\Omega)}, |\lambda_i|, E_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i})$ は全て i に対して一様有界とする．

(A6) $\dfrac{\varepsilon_i |\nabla u_\varepsilon|^2}{2} - \dfrac{W(u_{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i}$ は $L^1(\Omega)$ の意味で 0 に収束するとする．

上記の仮定のもとで幾何学的測度論の varifold という概念を用いた予想 (2) のある意味での肯定的な結果を紹介する．また，上記の議論では varifold に対する接触角条件が必要になるため，参考文献として [2] を挙げる．

参考文献

[1] T. Kagaya and M. Shimojo, *Exponential stability of a traveling wave for an area preserving curvature motion with two endpoints moving freely on a line*, Asymptotic Analysis **96** (2016), no. 2, pp 109–134.

[2] T. Kagaya and Y. Tonegawa, *A fixed contact angle condition for varifolds*, submitted, arXiv:1606.00164.

[3] T. Kagaya and Y. Tonegawa, *A singular perturbation limit of diffused interface energy with a fixed contact angle condition*, submitted, arXiv:1609.00191.