爆発解をもつ微分方程式の離散化

松家 敬介

概要

爆発現象とは, 人口などのある量が急激に増加する現象のことである. 自然現象や社会現象は微分方程式を用いて数理モデル化され, この爆発現象は微分方程式の爆発解によってっ数理モデル化される. 爆発解は, 非線形偏微分方程式論において盛んに研究されている. 爆発解をもつ非線形偏微分方程式をいくつか挙げてみると, 半線形熱方程式の一つである

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + f^{1+\alpha} \tag{1}$$

や半線形波動方程式の一つである

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + |u|^p \tag{2}$$

などがある. ただし, $f := f(t,x),\ u := u(t,x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha > 0,\ p > 1$ とし, Δ は d 次元のラプラシアンとする. (1) と (2) の Cauchy 問題に対する爆発解濃霧は, 初期条件だけではなく方程式に含まれているパラメータである α や p が重要な役割を担っていることが先行研究で知られている. より具体的には, ある臨界指数が存在し, その指数とパラメータの大小によって爆発解の存在が左右されるというものである.

一方, 微分方程式の解を計算機に計算させるには微分方程式を何らかの形で離散化する必要がある. 本講演では, (1) の差分法による離散化の一つである

$$f_n^{s+1} = \frac{g_n^s}{\{1 - \alpha\delta(g_n^s)^\alpha\}^{1/\alpha}} \tag{3}$$

および (2) の差分法による離散化の一つである

$$u_n^{s+1} + u_n^{s-1} = \frac{4v_n^s}{2 - \delta^2 v_n^s \, |v_n^s|^{p-2}} \tag{4}$$

について議論する. ただし, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}^d,\ \delta > 0,\ e_k$ を第 k 成分が 1 の単位ベクトルとし,

$$g_n^s := \sum_{k=1}^{d} \frac{f_{n+e_k}^s + f_{n-e_k}^s}{2d}, \quad v_n^s := \sum_{k=1}^{d} \frac{u_{n+e_k}^s + u_{n-e_k}^s}{2d}$$

とする. これらの離散化した方程式 (3) および (4) にはもとの微分方程式 (1) および (2) の爆発解に対応する解がある. 本講演では (3) および (4) の Cauchy 問題に対する爆発解の産むについて解説し, (1) および (2) で得られている定理の離散類似を与える [1,2]. また, (3) の Dirichret 境界値問題に対する爆発解の有無についても議論したい [3].

参考文献

[1] K. Matsuya and T. Tokihiro, Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 31(2011), 209–220.

[2] K. Matsuya, A blow-up theorem for a discrete semilinear wave equation, J. Differ. Equations Appl, 19(2013), 457-465.

[3] 松家 敬介, 離散半線形熱方程式の爆発解とその Dirichlet 問題, 武蔵野大学数理工学センター紀要, 1(2016), 92–100.