ローレンツ水車によるカオスの実演とその数理

守田　智　（静岡大学学術院工学領域）

決定論的方程式から生じる不規則運動はカオスと呼ばれる。決定論的とは、ある瞬間での状態が完全に決まっているなら、それ以後の状態も完全に決まってしまうことをいう。カオス状態では、初期のわずかな誤差が指数関数的に増幅してしまうため将来の予想が困難になる。ここではカオスのモデルとして有名なローレンツ方程式を水車の実験を通して考察したい。水車モデルとローレンツ方程式の導出は Strogatz の教科書 [1] による。

ローレンツ方程式は、もともと気象学者の Lorenz が 1653 年に地球上の大気対流のモデルとして提案したものである。大気を薄い層状に閉じ込められている流体であるとみなし、流体の層が底面が太陽光によって暖められる状況を考える。上面と下面の温度差が十分小さい時、熱は伝導でじわじわと伝わり流体自体が変動することはない。しかし、上下の温度差が大きくなると熱膨張による浮力のため流体が運動を始める。このときロール状あるいは蜂の巣状のの対流パターンが見られるようになる。この対流パターンをベナール (Bénard) 対流とよぶ。さらに温度差を大きくした場合の対流の変動を記述しようと試みたのが以下の方程式である。

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\
\frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\
\frac{dz}{dt} &= xy - bz
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

流体の運動をわずか 3 変数で記述している点が特徴である。x は対流運動の強度に比例した変数、y は上昇流と下降流の温度差に比例する変数、z は垂直方向の温度の歪みに比例する変数を意味する。$\sigma, r, b > 0$ はパラメーターである。σ はプランドル数とよばれ流体の特性（粘性率＆熱伝導率）で決まる。r はレーリー数とよばれ温度差によって決まる。b には名前がなくベナール対流のロールパターンの縦横の比に対応している。$\sigma = 10, b = 8/3$ と固定してレーリー数 r だけ変化させる場合が多い。

流体の方程式からローレンツ方程式を導くには熱伝導や粘性と温度変化による流体の膨張などを考える必要がある。ここではもっと簡単でほぼ等価な力学的なシステムを考え、ローレンツ方程式を導く。図 2 のような穴のあいたコップがたくさんついた水車を考えよう。上部のコップにだけ水が補給され、その量が少ない場合には水車はどちらか一方に回転するだけだが、水の量が多くなると排出が間に合わず逆回転が起こるようになる。これはベナール対流で温度差の大きい場合ロール状の流れに逆転が生じることに対応している。

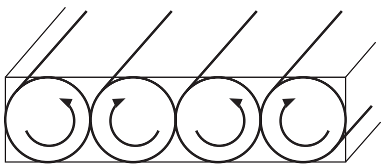

図 1: ベナール対流の模式図

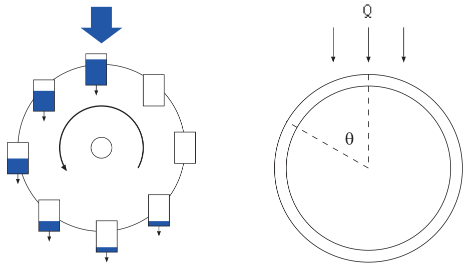

図 2: ローレンツ水車の模式図とその連続化

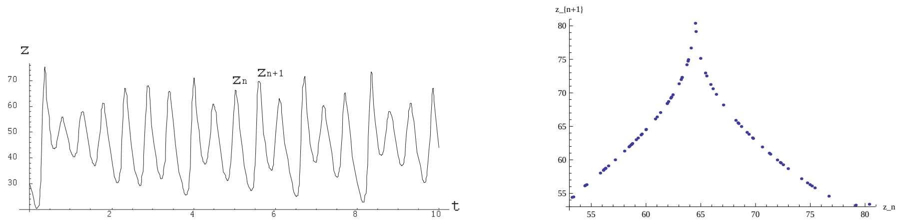

図 3: z の時間変化とローレンツ写像

上部における水の補給がベナール対流の下からの暖めに対応し、コップの穴からの水の流出はエネルギー散逸に対応している。講演では、コップの数が無数にあるとして図 2 の右のような連続化した極限を考え、ローレンツ水車の運動を表現する方程式を導出し、これがローレンツ方程式と等価であることを示す [1]。

Lorenz は、このモデルから生じた不思議な軌道を解析するため次のような方法を考案した。軌道上で z が極大値に着目してその時間変化を追いかけるのである。n 番目の極大値 z_n として z_n 対 z_{n+1} のグラフを書いてみる。この方法では不連続時間（離散時間）で状態を記述しており、一般に不連続時間による記述を写像（マップ）という。ローレンツ方程式を離散化したものはローレンツ写像とよばれる。変数は z の 1 個だけになるので 1 次元の写像となり、カオスのメカニズムがより明確に理解されることとなる。講演で披露する簡易実験でどこまで再現できるかは今のところ分からないが、示唆を富む講演ができればと考えている。

参考文献

[1] S.H.Strogatz, ”Nonlinear Dyanamics and Chaos” Westview Press (2014).