エントロピー解・粘性解の選択問題

曽我幸平 (慶應義塾大学)

関数 H を flux とする非粘性の Burgers 方程式 (B) および H を Hamiltonian とする Hamilton-Jacobi 方程式 (HJ) は，一般に滑らかな解を持つことができないので，エントロピー解および粘性解とよばれる弱解のクラスで解析される．代表的なタイプの (B) および (HJ) に対する初期値問題の解の存在と一意性は，この弱解のクラスにおいて確立している．(B) および (HJ) の特性曲線を与える常微分方程式系は Hamilton 力学系（H から生成される）あるいはこれに同値な Lagrange 力学系（H の Legendre 変換 L から生成される）である．Hamilton/Lagrange 力学系の大域的性質を調べるという力学系の中心的問題に対して，(B) および (HJ) の弱解を用いる枠組みが Albert Fathi ('97) によって導入された．これは弱 KAM 理論とよばれ，力学系および偏微分方程式の解析を相互補完的に解析する新たな方法として，近年その重要性が注目されている．弱 KAM 理論は，力学系理論で標準的である時間空間周期的な Hamiltonian H を取り扱う．弱 KAM 理論で必要となる (B) および (HJ) の弱解は，H が時間によらないならば空間周期解，時間によるならば時間空間周期解である．初期値問題の場合と異なり，周期解は一般に非可算無限個存在する．(HJ) の解は定数の不定性を持つが，ここで言う非可算な解の多重性は定数差以上の違いを意味することに注意する．

(B) および (HJ) の弱解を構成する方法として，例えば，**(i) 粘性消滅法**（２階の項を加えて放物型にする），**(ii) 有限差分法**（微分を差分商に置き換える），**(iii) discount 消滅法**（０階の項を加える）がある．これらの近似問題では，周期解は一意的になる（(HJ) の場合，(i),(ii) では定数の不定性が残るが，(iii) では真に一意となる）．一意的な近似周期解から成る集合は点列コンパクト性を持つので，その収束部分列の極限によって (B) および (HJ) の周期解を１つ得ることができる．**「一意的な近似周期解は全列で収束するか？収束するならばその極限は非可算無限個ある周期解のどれになるか？」**という問題が近年盛んに研究されている．この問題を**選択問題**とよぶ．(i)-(iii) の収束性を Cauchy 列の議論によって直接調べることは極めて困難なため，現時点では，選択問題の解明には弱 KAM 理論による偏微分方程式と力学系の相互補完的な解析が必須となる．そこでは，(B) および (HJ) の近似方程式に対応する "力学系" を考え，その "力学系" が (B) および (HJ) に対応する Hamilton/Lagrange 力学系に漸近する様子を調べることがポイントとなる．"力学系" は，(i) ではある確率微分方程式，(ii) では時空間非一様ランダムウォーク，(iii) では摩擦項付きの Hamilton/Lagrange 力学系となる．選択問題は，(i) については [1],[2],[4] で部分的に，(ii) については [9] で部分的に, (iii) については [3],[5] で完全に解明されている．(i)-(iii) で選択される弱解は，一般に異なるという事実は興味深い．

本講演では，選択問題の概要を解説すると同時に，講演者の得た結果 [6],[7],[8],[9] を紹介する．結果 [7] は有限差分法に対する力学系的アプローチを与える．これを用いて，結果 [8] は有限差分法による弱 KAM 理論の近似理論を与える．これを基に，結果 [9] は有限差分法に対する選択問題を部分的に明らかにする．結果 [6] は discount

近似に対する選択問題における誤差評価を部分的に与える．

(B) および (HJ) の選択問題の議論は，解の一意性が成り立たない状況において，解を構成する方法の収束性をより強い形で保証すると同時に極限の性質を構成方法ごとに明らかにする．これは，偏微分方程式論におけるコンパクト性に基づく解の構成的存在証明をより具体的なものに発展させる第一歩の成果と見ることもできる．

[1] N. Anantharaman, R. Iturriaga, P. Padilla and H. Sanchez-Morgado, Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **5** (2005), No. 3, 513-528.

[2] U. Bessi, Aubry-Mather theory and Hamilton-Jacobi equations, Comm. Math. Phys. **235** (2003), 495-511.

[3] A. Davini, A. Fathi, R. Iturriaga and M. Zavidovique, Convergence of the solutions of the discounted equation, Invent. Math. **206** (2016), No. 1, 29-55.

[4] H. R. Jauslin, H. O. Kreiss and J. Moser, On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions, Proc. Symp. Pure Math. **65** (1999), 133-153.

[5] H. Mitake and H. V. Tran, Selection problems for a discounted degenerate viscous Hamilton-Jacobi equation, Adv. Math. **306** (2017), 684-703.

[6] H. Mitake and K. Soga, Weak KAM theory for discounted Hamilton-Jacobi equations and its application, submitted.

[7] K. Soga, Stochastic and variational approach to the Lax-Friedrichs scheme, Math. Comp. **84** (2015), no. 292, 629-651.

[8] K. Soga, More on stochastic and variational approach to the Lax-Friedrichs scheme, Math. Comp. **85** (2016), no. 301, 2161-2193.

[9] K. Soga, Selection problems of $\mathbf{Z}^2$-periodic entropy solutions and viscosity solutions, Calc. Var. PDEs **56** (2017), no. 4, Article 119, 30 pp.