Time periodic problem for rotating stably stratified fluids

高田　了（九州大学 大学院数理学研究院）

3 次元全空間において，回転と安定成層の影響を考慮した非圧縮性 Boussinesq 方程式の時間周期問題を考察する．

$$
\begin{cases}
\partial_t v + (v \cdot \nabla) v = \nu \Delta v - \nabla q - \Omega e_3 \times v + \theta e_3 + g & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \\
\partial_t \theta + (v \cdot \nabla)\theta = \kappa \Delta \theta - N^2 v_3 + h & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \\
\nabla \cdot v = 0, & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \\
v(0,x) = v_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x) & x \in \mathbb{R}^3.
\end{cases}
\tag{1}
$$

ここで，$v = (v_1(t,x), v_2(t,x), v_3(t,x))^T$, $\theta = \theta(t,x)$, $q = q(t,x)$ はそれぞれ流体の速度場，温度および圧力を表す未知関数であり，Boussinesq 方程式の定常解

$$
v_\Omega(x) = \Omega e_3 \times x, \quad \theta_N(x) = N^2 x_3, \quad q_{\Omega,N}(x) = \frac{\Omega^2(x_1^2 + x_2^2) + N^2 x_3^2}{2}
$$

からの摂動に対応する．$\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は回転流 v_Ω の角周波数，$N > 0$ は安定成層の温度勾配 $\sqrt{d\theta_N/dx_3}$ を表す定数である．また $g = (g_1(t,x), g_2(t,x), g_3(t,x))^T$, $h = h(t,x)$ はそれぞれ与えられた時間周期的外力とする．

本講演では，回転と安定成層による歪対称な低階項 $(-\Omega e_3 \times v + \theta e_3,\ -N^2 v_3)^T$ が有する分散性の解析，およびその時間周期問題への応用を考察する．特に，方程式系 (1) の時間周期解の存在を保証する外力項のノルムが，回転速度 $|\Omega|$ および浮力周波数 N に比例して大きく取れることを証明する．

未知関数を $u = (v, \theta/N)^T$，外力項を $f = (g, h/N)^T$ とし，$\mu = \Omega/N$, $\widetilde{\nabla} = (\nabla,\, 0)^T$ とおく．また Helmholtz 射影作用素 $\mathbb{P}$ および歪対称定数行列 J_μ を次で定義する：

$$
\mathbb{P} := \left(\begin{array}{c|c} (\delta_{jk} + R_j R_k)_{1 \leqslant j,k \leqslant 3} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad J_\mu := \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

このとき，Helmholtz 射影作用素 $\mathbb{P}$ を作用させることで，方程式系 (1) は次の形に書き換えられる：

$$
\begin{cases}
\partial_t u - \mathrm{diag}(\nu,\nu,\nu,\kappa)\Delta u + N \mathbb{P} J_\mu \mathbb{P} u + \mathbb{P}(u \cdot \widetilde{\nabla}) u = \mathbb{P} f, \quad \widetilde{\nabla} \cdot u = 0, \\
u(0,x) = u_0(x).
\end{cases}
\tag{2}
$$

方程式系 (2) における線形作用素を $L_N := -\mathrm{diag}(\nu,\nu,\nu,\kappa)\Delta + N \mathbb{P} J_\mu \mathbb{P}$ とする．このとき，歪対称な低階項 $-\mathbb{P} J_\mu \mathbb{P}$ の固有周波数が，

$$
\sigma\left[\widehat{-\mathbb{P} J_\mu \mathbb{P}} \right] = \left\{ \pm i \frac{|\xi_\mu|}{|\xi|},\, 0,\, 0 \right\}, \qquad \xi_\mu = (\xi_1, \xi_2, \mu \xi_3)^T
$$

となることから，線形作用素 $-L_N$ によって生成される半群は，$\nu = \kappa$ のときに半群の積公式より，以下の表現をもつことが分かる：

$$
e^{-tL_N} u_0 = e^{\nu t \Delta} e^{iNt p_\mu(D)} P_+ u_0 + e^{\nu t \Delta} e^{-iNt p_\mu(D)} P_- u_0 + e^{\nu t \Delta} P_0 u_0.
$$

ここで，$P_\pm$, P_0 はそれぞれ固有周波数 $\pm i|\xi_\mu|/|\xi|$, 0 に対応した固有射影作用素であり，$e^{\pm iNtp_\mu(D)}$ は次で定義される Fourier 乗法作用素である：

$$e^{\pm iNtp_\mu(D)}f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi \pm iNtp_\mu(\xi)}\widehat{f}(\xi)\,d\xi, \qquad p_\mu(\xi) = \frac{|\xi_\mu|}{|\xi|}.$$

本講演では，Kozono-Nakao [2] および Geissert-Hieber-Nguyen [1] に従い，発散型の外力項 $f = \widetilde{\nabla}\cdot F$ に対し，次の積分方程式を満たす解を考察する：

$$u(t) = e^{-tL_N}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)L_N}\mathbb{P}\widetilde{\nabla}\cdot\{F(\tau) - (u\otimes u)(\tau)\}\,d\tau, \qquad t>0. \tag{3}$$

歪対称行列 $-\widehat{\mathbb{P}J_\mu\mathbb{P}}$ に関する固有射影 $P_\pm$, P_0 を用いて，時間周期的な外力項 F を $\mathbb{P}F = P_+F + P_-F + P_0F$ と分解する．このとき，方程式 (3) の時間周期問題に関して以下が成立する．

定理 1. $\nu = \kappa$ かつ $\mu^2 \neq 1$ とする．$T>0$ とし，指数 (s,p) は次を満たすとする．

$$0 < s < \frac{1}{2}, \quad \max\left\{\frac{2-s}{3}, \frac{5+2s}{9}\right\} < \frac{1}{p} < \frac{2}{3}.$$

このとき，ある正定数 $\delta_1 = \delta_1(\nu,\mu,s,p)$, $\delta_2 = \delta_2(\nu)$ が存在して，

$$\sup_{t>0}\|P_\pm F(t)\|_{L^{p,\infty}} \leqslant \delta_1 N^{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{p}\right)}, \quad \sup_{t>0}\|P_0F(t)\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} \leqslant \delta_2, \tag{4}$$

を満たす任意の時間 T 周期的外力 $F \in BC(\mathbb{R}_+; L^{p,\infty}(\mathbb{R}^3)\cap L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3))$ と $N>0$ に対して，ある初期値 $u_0 \in L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ が一意に存在して，方程式 (3) は時間 T 周期的一意解 $u \in BC(\mathbb{R}_+; L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))$ をもつ．

証明の鍵は，Yamazaki [3] によるスケール臨界な実補間空間における熱核評価 $\|\nabla e^{t\Delta}f\|_{L^1(0,\infty;L^{3,1})} \leqslant C\|f\|_{L^{\frac{3}{2},1}}$ および半群 e^{-tL_N} に対する時間減衰評価

$$\left\|e^{t\Delta}e^{\pm iNtp_\mu(D)}f\right\|_{L^{q,\infty}} \leqslant C(1+Nt)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{L^{p,\infty}}$$

である．特に，発展作用素 $e^{\pm iNtp_\mu(D)}$ による時間減衰 $(1+Nt)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}$ を用いることで，外力項 $P_\pm F$ の低周波部分に対する制限が弱められ，スケール劣臨界な空間 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^3)$ $(p>3/2)$ において，外力項 $P_\pm F$ の大きさに関する特徴付け (4) を得ることが出来る．

本講演内容は，Matthias Hieber 氏（Technische Universität Darmstadt）および Alex Mahalov 氏（Arizona State University）との共同研究に基づく．

参考文献

[1] M. Geissert, M. Hieber, and T. H. Nguyen, *A general approach to time periodic incompressible viscous fluid flow problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **220** (2016), 1095–1118.

[2] H. Kozono and M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), 33–50.

[3] M. Yamazaki, *The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force*, Math. Ann. **317** (2000), 635–675.