# LONG RANGE SCATTERING FOR NLS EQUATION WITH CRITICAL HOMOGENEOUS NONLINEARITY IN 3D

瓜屋 航太 (岡山理科大学理学部応用数学科) [1]

## 1. 導入

本講演では, 次の非線形 Schrödinger 方程式を考察する:

$$\text{(NLS)} \qquad i\partial_t u + \Delta u = F(u), \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

ここで, 空間次元 $d$ は 1 以上とし, $u(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は複素数値の未知関数を表す. 非線形項 $F$ は $1 + 2/d$ 次斉次であると仮定する. すなわち, 任意の $\lambda > 0$ に対して,

$$F(\lambda u) = \lambda^{1+2/d} F(u) \tag{1}$$

が成り立つとする. 本研究の目的は (NLS) に対して終値条件:

$$\|u(t) - u_p(t)\|_{L^2} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

を課した終値問題を考察し, その可解性を得ることである. 終値問題を解く上では解の時間無限大での漸近挙動 $u_p$ を適切に設定することが重要となる. 典型的な冪乗型の非線項 $F(u) = |u|^{p-1}u$ の場合, 漸近形として自由解を選んだとき $p > 1 + 2/d$ であれば終値問題は可解であるが, $1 < p \le 1 + 2/d$ のときには可解ではないことが知られている ([1], [8]). したがって, $1+2/d$ が解の漸近挙動の意味で臨界指数となることが分かる. 実際, $p = 1+2/d$ のとき解の漸近挙動は位相の修正が入った自由解となる ([6], [2]). また, 空間 1 次元, 2 次元において臨界指数がそれぞれ 3 次, 2 次となることから, $u$ と $\overline{u}$ からなる単項式の場合には終値問題の可解性が知られている. より詳しく述べれば, 1 次元で $u^3, \overline{u}^3, |u|^2\overline{u}$, 2 次元で $u^2, \overline{u}^2$ の場合には自由解に漸近する解の存在が示されている ([3], [5]). 例外的な場合が 2 次元で $|u|^2$ の場合であり, このとき解は自由解に漸近しないことが示されている ([7]).

非線形項に対する斉次条件 (1) の下で (NLS) の終値問題の可解性については Masaki-Miyazaki [4] による空間 1 次元と 2 次元の場合の研究がある. [4] におけるアイデアは非線形項の斉次条件から

$$F(u) = |u|^{1+\frac{2}{d}} F\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

と変形し, $g(\theta) = F(e^{i\theta})$ により定められる $2\pi$ 周期関数 $g$ を Fourier 級数展開することにより, 非線形項 $F$ を

$$F(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n |u|^{1+\frac{2}{d}-n} u^n$$

ととらえることである.

## 2. 主結果

本講演の主結果は [4] における結果の 3 次元への拡張である. 非線形項に対して次の仮定をする.

---

本講演は眞崎聡氏 (阪大基礎工), 宮崎隼人氏 (津山高専) との共同研究に基づく.

[1] uriya@xmath.ous.ac.jp

**仮定 2.1.** $F$ は $5/3$ 次斉次であるとし，対応する $2\pi$ 周期関数 $g$ について $g_0 = 0$ かつ $g_1 \in \mathbb{R}$ であるとする．さらに，ある $\eta > 0$ が存在し，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{1+\eta}|g_n| < \infty$$

が成り立つとする．

**定義.** $s, m \in \mathbb{R}$ として，重み付き Sobolev 空間 $H^{s,m}$，および斉次 Sobolev 空間 $\dot{H}^s$ を

$$H^{s,m} = H^{s,m}(\mathbb{R}^3) = \left\{\phi \in \mathcal{S}' \;;\; \|\phi\|_{H^{s,m}} = \|(1+|x|^2)^{m/2}(1-\Delta)^{s/2}\phi\|_{L^2} < \infty\right\},$$

$$\dot{H}^s = H^s(\mathbb{R}^3) = \left\{\phi \in \mathcal{S}' \;;\; \|\phi\|_{\dot{H}^s} = \|(-\Delta)^{s/2}\phi\|_{L^2} < \infty\right\}$$

とする．

**定理 2.2.** $F$ は仮定 *2.1* をみたすとする．$\delta \in (3/2, 5/3)$ を $\delta - 3/2 < 2\eta$ をみたすようにとり，$b \in (3/4, \delta/2)$ とする．$u_+ \in H^{0,2} \cap \dot{H}^{-\delta}$ は十分小さい $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(b, \|g\|_{Lip})$ について $\|\widehat{u_+}\|_{L^\infty} < \varepsilon_0$ をみたすとする．このとき，ある $T > 0$ が存在し，$u \in C([T,\infty); L^2(\mathbb{R}^3))$ に属する (NLS) の解で，

$$\sup_{t\in[T,\infty)} t^b \|u(t) - u_p(t)\|_{L^2} < \infty$$

をみたすものが一意的に存在する．ここで，

$$u_p(t) = (2it)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} \widehat{u_+}\left(\frac{x}{2t}\right) \exp(-ig_1|\widehat{u_+}|^{\frac{2}{3}} \log t)$$

である．

**注意 1.** (1) 定理 *2.2* は具体例として $F(u) = |\mathrm{Re}\, u|^{\frac{2}{3}}\mathrm{Re}\, u$ に適用することができる．対応する関数は $|\cos\theta|^{\frac{2}{3}}\cos\theta$ であり，その *Fourier* 係数は

$$g_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{11}{6})\Gamma(\frac{3n-5}{6})}{\sqrt{\pi}\Gamma(-\frac{1}{3})\Gamma(\frac{3n+11}{6})} & (n : \text{奇数}), \\ 0 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

となる．

## References


[1] Barab, J. E., *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.

[2] Ginibre, J., Ozawa, T., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension* $n \leq 2$, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[3] Hayashi, N., Wang, H., Naumkin, P. I., *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in lower order Sobolev spaces*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **8** (2011), 759–775.

[4] Masaki, S., Miyazaki, H., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations with general homogeneous nonlinearity*, arxiv, 2016.

[5] Moriyama, K., Tonegawa, S., Tsutsumi, Y., *Wave operator for the nonlinear Schrödinger equation with a nonlinearity of low degree in one or two space dimensions*, Commun. Contemp. Math. **5** (2003), 983–996.

[6] Ozawa, T., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[7] Shimomura, A., Tsutsumi, Y., *Nonexistence of scattering states for some quadratic nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions*, Differential Integral Equations **19** (2006), 1047-1060.

[8] Tsutsumi, Y., Yajima, K., *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **11** (1984), 186-188.