研究集会「数学と現象：Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2017」

日時：平成29年11月17日（金）～11月18日（土）
場所：宮崎大学工学部 B棟2階B210教室
案内：http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/

講演アブストラクト

研究集会　「数学と現象： Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2017 (略称：MPM2017)」

日時：　2017 年 11 月 17 日（金）〜 11 月 18 日（土）
会場：　宮崎大学工学部 B 棟 2 階 B210 教室
案内：　http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/

プログラム

11 月 17 日（金）

午後の部

14:00-14:55　**柳 青**（福岡大学）
「On large exponent behavior of power curvature flow arising in image processing」

15:15-16:10　**高田 了**（九州大学）
「Time periodic problem for rotating stably stratified fluids」

16:30-17:25　**柴田 徹太郎**（広島大学）
「Direct and inverse bifurcation problems for semilinear equations」

11 月 18 日（土）

午前の部 ≪ **MPM2017 特別実験講座** ≫

10:15-12:15　**守田 智**（静岡大学）
「ローレンツ水車によるカオスの実演とその数理」

注　宮交バス「橘通り 3 丁目→宮崎大学（木花キャンパス）」の土曜日の朝の時刻表：

8:21 → 8:54，8:41 → 9:18，9:11 → 9:52，9:21 → 9:54，9:41 → 10:18（遅刻！）

午後の部

14:00-14:55　**曽我 幸平**（慶應義塾大学）

「エントロピー解・粘性解の選択問題」

15:15-16:10　**松家 敬介**（武蔵野大学）

「爆発解をもつ微分方程式の離散化」

16:30-17:25　**瓜屋 航太**（岡山理科大学）

「Long range scattering for NLS equation with critical homogeneous nonlinearity in 3d」

本研究集会は，次の科学研究費補助金の援助を受けています.

課題番号	種目	代表者	課題名
17K05334	基盤 C	辻川　亨	非線形拡散反応系における漸近展開法の開発とその応用
15K04963	基盤 C	飯田雅人	漸近解構築に基づく反応拡散系の解の形と動きの解明
16K05279	基盤 C	今　隆助	常微分方程式で近似できる構造化生態系モデルの数理的研究
16KT0135	基盤 C	出原浩史	生命現象における階層を超えるミクロとマクロとをつなぐ理論の構築
17K14237	若手 B	出原浩史	燃焼モデルに現れるパターンの計算機支援解析
17K14220	若手 B	平山浩之	複雑な共鳴構造を持つ非線形分散型方程式の可解性について

世話人：　辻川亨，飯田雅人，梅原守道，出原浩史，伊藤翼，平山浩之，坂田繁洋，今隆助（宮崎大学）

連絡先：　今 隆助 (Ryusuke Kon)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1　宮崎大学工学部工学基礎教育センター

E-mail：konr@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381, FAX：0985-58-7289

作成日：平成 29 年 10 月 2 日

ON LARGE EXPONENT BEHAVIOR OF POWER CURVATURE FLOW ARISING IN IMAGE PROCESSING

Qing Liu
Department of Applied Mathematics, Fukuoka University
Email: qingliu@fukuoka-u.ac.jp

Abstract. Motivated by applications in image processing, we study asymptotic behavior for the level set equation of power curvature flow as the exponent tends to infinity. More precisely, we consider the level set equation

$$u_t - |\nabla u| \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)^\alpha = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \tag{1}$$

with a Lipschitz initial value u_0 in $\mathbb{R}^n$. Here $\alpha > 0$ is a given exponent. It is well known [2] that for any given $\alpha > 0$ there exists a unique viscosity solution u^α of the initial value problem associated to (1). We are particularly interested in the limit behavior of u^α as $\alpha \to \infty$, which has important applications in image denoising [1].

If u_0 satisfies

$$\begin{array}{ll} \text{(Quasiconvexity)} & \{x \in \mathbb{R}^n : u_0(x) \leq c\} \quad \text{is convex for any } c \in \mathbb{R} \text{ and} \\ \text{(Coercivity)} & \inf_{|x| \geq R} u_0(x) \to \infty \quad \text{as } R \to \infty, \end{array}$$

the limit equation can be characterized as the following stationary obstacle problem involving 1-Laplacian:

$$\min \left\{ -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) + 1,\ U - u_0 \right\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

We discuss various properties of the obstacle problem and show that $u^\alpha(\cdot, t) \to V$ locally uniformly in $\mathbb{R}^n$ as $\alpha \to \infty$ for any $t > 0$, where V is the minimal supersolution of (2). We also discuss the large exponent asymptotics for non-convex initial values and applications related to a math model describing unstable sandpiles. This talk is based on joint work [3] with Professor N. Yamada at Fukuoka University.

References

[1] F. Cao. *Geometric curve evolution and image processing*, volume 1805 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[2] H. Ishii and P. Souganidis. Generalized motion of noncompact hypersurfaces with velocity having arbitrary growth on the curvature tensor. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(2):227–250, 1995.

[3] Q. Liu and N. Yamada. An obstacle problem arising in large exponent limit of power mean curvature flow equation. *preprint*.

Time periodic problem for rotating stably stratified fluids

高田　了（九州大学 大学院数理学研究院）

3 次元全空間において，回転と安定成層の影響を考慮した非圧縮性 Boussinesq 方程式の時間周期問題を考察する．

$$
\begin{cases}
\partial_t v + (v\cdot\nabla)v = \nu\Delta v - \nabla q - \Omega e_3\times v + \theta e_3 + g & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3,\\
\partial_t \theta + (v\cdot\nabla)\theta = \kappa\Delta\theta - N^2 v_3 + h & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3,\\
\nabla\cdot v = 0, & t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^3,\\
v(0,x)=v_0(x),\quad \theta(0,x)=\theta_0(x) & x\in\mathbb{R}^3.
\end{cases}
\tag{1}
$$

ここで，$v=(v_1(t,x),v_2(t,x),v_3(t,x))^T$, $\theta=\theta(t,x)$, $q=q(t,x)$ はそれぞれ流体の速度場，温度および圧力を表す未知関数であり，Boussinesq 方程式の定常解

$$
v_\Omega(x)=\Omega e_3\times x,\quad \theta_N(x)=N^2x_3,\quad q_{\Omega,N}(x)=\frac{\Omega^2(x_1^2+x_2^2)+N^2x_3^2}{2}
$$

からの摂動に対応する．$\Omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ は回転流 v_Ω の角周波数，$N>0$ は安定成層の温度勾配 $\sqrt{d\theta_N/dx_3}$ を表す定数である．また $g=(g_1(t,x),g_2(t,x),g_3(t,x))^T$, $h=h(t,x)$ はそれぞれ与えられた時間周期的外力とする．

本講演では，回転と安定成層による歪対称な低階項 $(-\Omega e_3\times v+\theta e_3,\ -N^2v_3)^T$ が有する分散性の解析，およびその時間周期問題への応用を考察する．特に，方程式系 (1) の時間周期解の存在を保証する外力項のノルムが，回転速度 $|\Omega|$ および浮力周波数 N に比例して大きく取れることを証明する．

未知関数を $u=(v,\theta/N)^T$，外力項を $f=(g,h/N)^T$ とし，$\mu=\Omega/N$, $\widetilde{\nabla}=(\nabla,\,0)^T$ とおく．また Helmholtz 射影作用素 $\mathbb{P}$ および歪対称定数行列 J_μ を次で定義する：

$$
\mathbb{P}:=\left(\begin{array}{c|c}(\delta_{jk}+R_jR_k)_{1\leqslant j,k\leqslant 3} & 0\\ \hline 0 & 1\end{array}\right),\quad J_\mu:=\begin{pmatrix}0&-\mu&0&0\\ \mu&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\end{pmatrix}.
$$

このとき，Helmholtz 射影作用素 $\mathbb{P}$ を作用させることで，方程式系 (1) は次の形に書き換えられる：

$$
\begin{cases}
\partial_t u - \mathrm{diag}(\nu,\nu,\nu,\kappa)\Delta u + N\mathbb{P}J_\mu\mathbb{P}u + \mathbb{P}(u\cdot\widetilde{\nabla})u=\mathbb{P}f, \quad \widetilde{\nabla}\cdot u=0,\\
u(0,x)=u_0(x).
\end{cases}
\tag{2}
$$

方程式系 (2) における線形作用素を $L_N:=-\mathrm{diag}(\nu,\nu,\nu,\kappa)\Delta+N\mathbb{P}J_\mu\mathbb{P}$ とする．このとき，歪対称な低階項 $-\mathbb{P}J_\mu\mathbb{P}$ の固有周波数が，

$$
\sigma\left[-\widehat{\mathbb{P}J_\mu\mathbb{P}}\right]=\left\{\pm i\frac{|\xi_\mu|}{|\xi|},\,0,\,0\right\},\qquad \xi_\mu=(\xi_1,\xi_2,\mu\xi_3)^T
$$

となることから，線形作用素 $-L_N$ によって生成される半群は，$\nu=\kappa$ のときに半群の積公式より，以下の表現をもつことが分かる：

$$
e^{-tL_N}u_0=e^{\nu t\Delta}e^{iNtp_\mu(D)}P_+u_0+e^{\nu t\Delta}e^{-iNtp_\mu(D)}P_-u_0+e^{\nu t\Delta}P_0u_0.
$$

ここで，$P_\pm$, P_0 はそれぞれ固有周波数 $\pm i|\xi_\mu|/|\xi|$, 0 に対応した固有射影作用素であり，$e^{\pm iNtp_\mu(D)}$ は次で定義される Fourier 乗法作用素である：

$$e^{\pm iNtp_\mu(D)}f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi \pm iNtp_\mu(\xi)}\widehat{f}(\xi)\,d\xi, \qquad p_\mu(\xi) = \frac{|\xi_\mu|}{|\xi|}.$$

本講演では，Kozono-Nakao [2] および Geissert-Hieber-Nguyen [1] に従い，発散型の外力項 $f = \widetilde{\nabla}\cdot F$ に対し，次の積分方程式を満たす解を考察する：

$$u(t) = e^{-tL_N}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)L_N}\mathbb{P}\widetilde{\nabla}\cdot\{F(\tau) - (u\otimes u)(\tau)\}\,d\tau, \qquad t>0. \tag{3}$$

歪対称行列 $-\widehat{\mathbb{P}J_\mu\mathbb{P}}$ に関する固有射影 $P_\pm$, P_0 を用いて，時間周期的な外力項 F を $\mathbb{P}F = P_+F + P_-F + P_0F$ と分解する．このとき，方程式 (3) の時間周期問題に関して以下が成立する．

定理 1. $\nu = \kappa$ かつ $\mu^2 \neq 1$ とする．$T>0$ とし，指数 (s,p) は次を満たすとする．

$$0 < s < \frac{1}{2}, \quad \max\left\{\frac{2-s}{3}, \frac{5+2s}{9}\right\} < \frac{1}{p} < \frac{2}{3}.$$

このとき，ある正定数 $\delta_1 = \delta_1(\nu,\mu,s,p)$, $\delta_2 = \delta_2(\nu)$ が存在して，

$$\sup_{t>0}\|P_\pm F(t)\|_{L^{p,\infty}} \leqslant \delta_1 N^{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{p}\right)}, \quad \sup_{t>0}\|P_0F(t)\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} \leqslant \delta_2, \tag{4}$$

を満たす任意の時間 T 周期的外力 $F \in BC(\mathbb{R}_+; L^{p,\infty}(\mathbb{R}^3)\cap L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3))$ と $N>0$ に対して，ある初期値 $u_0 \in L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ が一意に存在して，方程式 (3) は時間 T 周期的一意解 $u \in BC(\mathbb{R}_+; L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))$ をもつ．

証明の鍵は，Yamazaki [3] によるスケール臨界な実補間空間における熱核評価 $\|\nabla e^{t\Delta}f\|_{L^1(0,\infty;L^{3,1})} \leqslant C\|f\|_{L^{\frac{3}{2},1}}$ および半群 e^{-tL_N} に対する時間減衰評価

$$\left\|e^{t\Delta}e^{\pm iNtp_\mu(D)}f\right\|_{L^{q,\infty}} \leqslant C(1+Nt)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{L^{p,\infty}}$$

である．特に，発展作用素 $e^{\pm iNtp_\mu(D)}$ による時間減衰 $(1+Nt)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}$ を用いることで，外力項 $P_\pm F$ の低周波部分に対する制限が弱められ，スケール劣臨界な空間 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^3)$ $(p>3/2)$ において，外力項 $P_\pm F$ の大きさに関する特徴付け (4) を得ることが出来る．

本講演内容は，Matthias Hieber 氏（Technische Universität Darmstadt）および Alex Mahalov 氏（Arizona State University）との共同研究に基づく．

参考文献

[1] M. Geissert, M. Hieber, and T. H. Nguyen, *A general approach to time periodic incompressible viscous fluid flow problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **220** (2016), 1095–1118.

[2] H. Kozono and M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), 33–50.

[3] M. Yamazaki, *The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force*, Math. Ann. **317** (2000), 635–675.

Direct and inverse bifurcation problems for semilinear equations

Tetsutaro Shibata
Laboratory of Mathematics, Graduate School of Engineering,
Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, 739-8527, Japan
tshibata@hiroshima-u.ac.jp

We consider the bifurcation problem

$$\begin{aligned} -u''(t) &= \lambda\,(u(t) + g(u(t)))\,, \quad x \in I := (-1,1), \\ u(t) &> 0, \quad t \in I, \\ u(-1) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Here, $\lambda > 0$ is a bifurcation parameter. The typical examples of $g(u)$ are: $g(u) = g_1(u) := \sin\sqrt{u}$, $g_2(u) := \sin u^2 (= \sin(u^2))$. Then it is well known that under the suitable conditions on $g(u)$, λ is parameterized by the maximum norm $\alpha = \|u_\lambda\|_\infty$ of the solution u_λ corresponding to λ and is written as $\lambda = \lambda(g, \alpha)$. It should be mentioned that if $g(u) = g_1(u)$, then this problem has been proposed in Cheng [2] as an example which has arbitrary many solutions near the line $\lambda = \pi^2/4$. In this talk, we show that the bifurcation diagram of $\lambda(g_1, \alpha)$ intersects the line $\lambda = \pi^2/4$ infinitely many times by establishing the precise asymptotic formulas for $\lambda(g_1, \alpha)$ as $\alpha \to \infty$. We also establish the precise asymptotic formulas for $\lambda(g_i, \alpha)$ $(i = 1, 2)$ as $\alpha \to \infty$ and $\alpha \to 0$. We also treat the other nonlinear term $g(u)$. We apply these results to the new concept of inverse bifurcation problems.

References

[1] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. J. Funct. Anal. 122 (1994), 519–543.

[2] Y.J. Cheng, On an open problem of Ambrosetti, Brezis and Cerami, Differential Integral Equations 15 (2002), 1025–1044.

[3] A. Galstian, P. Korman and Y. Li, On the oscillations of the solution curve for a class of semilinear equations, J. Math. Anal. Appl. 321 (2006), 576–588.

[4] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products. Translated from the Russian. Translation edited and with a preface by Daniel Zwillinger and Victor Moll. Eighth edition. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2015.

[5] P. Korman and Y. Li, Infinitely many solutions at a resonance, Electron. J. Differ. Equ. Conf. 05, 105–111.

[6] P. Korman, An oscillatory bifurcation from infinity, and from zero, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 15 (2008), 335–345.

[7] P. Korman, Global solution curves for semilinear elliptic equations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, (2012).

[8] I. Krasikov, Approximations for the Bessel and Airy functions with an explicit error term, LMS J. Comput. Math. 17 (2014), 209–225.

[9] T. Laetsch, The number of solutions of a nonlinear two point boundary value problem, Indiana Univ. Math. J. 20 1970/1971 1–13.

[10] T. Shibata, Oscillatory bifurcation for semilinear ordinary differential equations, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, No. 44, 1–13.

ローレンツ水車によるカオスの実演とその数理

守田　智　（静岡大学学術院工学領域）

決定論的方程式から生じる不規則運動はカオスと呼ばれる。決定論的とは、ある瞬間での状態が完全に決まっているなら、それ以後の状態も完全に決まってしまうことをいう。カオス状態では、初期のわずかな誤差が指数関数的に増幅してしまうため将来の予想が困難になる。ここではカオスのモデルとして有名なローレンツ方程式を水車の実験を通して考察したい。水車モデルとローレンツ方程式の導出は Strogatz の教科書 [1] による。

ローレンツ方程式は、もともと気象学者の Lorenz が 1653 年に地球上の大気対流のモデルとして提案したものである。大気を薄い層状に閉じ込められている流体であるとみなし、流体の層が底面が太陽光によって暖められる状況を考える。上面と下面の温度差が十分小さい時、熱は伝導でじわじわと伝わり流体自体が変動することはない。しかし、上下の温度差が大きくなると熱膨張による浮力のため流体が運動を始める。このときロール状あるいは蜂の巣状のの対流パターンが見られるようになる。この対流パターンをベナール (Bénard) 対流とよぶ。さらに温度差を大きくした場合の対流の変動を記述しようと試みたのが以下の方程式である。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned} \tag{1}$$

流体の運動をわずか 3 変数で記述している点が特徴である。x は対流運動の強度に比例した変数、y は上昇流と下降流の温度差に比例する変数、z は垂直方向の温度の歪みに比例する変数を意味する。$\sigma, r, b > 0$ はパラメーターである。σ はプランドル数とよばれ流体の特性（粘性率＆熱伝導率）で決まる。r はレーリー数とよばれ温度差によって決まる。b には名前がなくベナール対流のロールパターンの縦横の比に対応している。$\sigma = 10, b = 8/3$ と固定してレーリー数 r だけ変化させる場合が多い。

流体の方程式からローレンツ方程式を導くには熱伝導や粘性と温度変化による流体の膨張などを考える必要がある。ここではもっと簡単でほぼ等価な力学的なシステムを考え、ローレンツ方程式を導く。図 2 のような穴のあいたコップがたくさんついた水車を考えよう。上部のコップにだけ水が補給され、その量が少ない場合には水車はどちらか一方に回転するだけだが、水の量が多くなると排出が間に合わず逆回転が起こるようになる。これはベナール対流で温度差の大きい場合ロール状の流れに逆転が生じることに対応している。

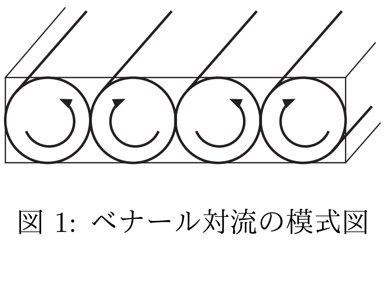

図 1: ベナール対流の模式図

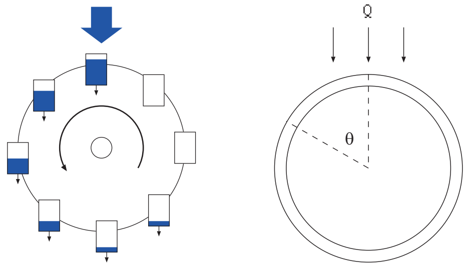

図 2: ローレンツ水車の模式図とその連続化

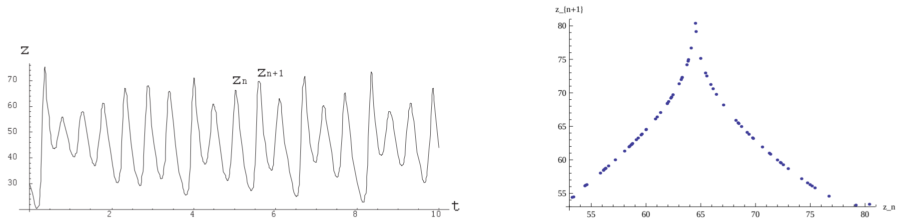

図 3: z の時間変化とローレンツ写像

上部における水の補給がベナール対流の下からの暖めに対応し、コップの穴からの水の流出はエネルギー散逸に対応している。講演では、コップの数が無数にあるとして図 2 の右のような連続化した極限を考え、ローレンツ水車の運動を表現する方程式を導出し、これがローレンツ方程式と等価であることを示す [1]。

Lorenz は、このモデルから生じた不思議な軌道を解析するため次のような方法を考案した。軌道上で z が極大値に着目してその時間変化を追いかけるのである。n 番目の極大値 z_n として z_n 対 z_{n+1} のグラフを書いてみる。この方法では不連続時間（離散時間）で状態を記述しており、一般に不連続時間による記述を写像（マップ）という。ローレンツ方程式を離散化したものはローレンツ写像とよばれる。変数は z の 1 個だけになるので 1 次元の写像となり、カオスのメカニズムがより明確に理解されることとなる。講演で披露する簡易実験でどこまで再現できるかは今のところ分からないが、示唆を富む講演ができればと考えている。

参考文献

[1] S.H.Strogatz, ”Nonlinear Dyanamics and Chaos” Westview Press (2014).

エントロピー解・粘性解の選択問題

曽我幸平 (慶應義塾大学)

関数 H を flux とする非粘性の Burgers 方程式 (B) および H を Hamiltonian とする Hamilton-Jacobi 方程式 (HJ) は，一般に滑らかな解を持つことができないので，エントロピー解および粘性解とよばれる弱解のクラスで解析される．代表的なタイプの (B) および (HJ) に対する初期値問題の解の存在と一意性は，この弱解のクラスにおいて確立している．(B) および (HJ) の特性曲線を与える常微分方程式系は Hamilton 力学系（H から生成される）あるいはこれに同値な Lagrange 力学系（H の Legendre 変換 L から生成される）である．Hamilton/Lagrange 力学系の大域的性質を調べるという力学系の中心的問題に対して，(B) および (HJ) の弱解を用いる枠組みが Albert Fathi ('97) によって導入された．これは弱 KAM 理論とよばれ，力学系および偏微分方程式の解析を相互補完的に解析する新たな方法として，近年その重要性が注目されている．弱 KAM 理論は，力学系理論で標準的である時間空間周期的な Hamiltonian H を取り扱う．弱 KAM 理論で必要となる (B) および (HJ) の弱解は，H が時間によらないならば空間周期解，時間によるならば時間空間周期解である．初期値問題の場合と異なり，周期解は一般に非可算無限個存在する．(HJ) の解は定数の不定性を持つが，ここで言う非可算な解の多重性は定数差以上の違いを意味することに注意する．

(B) および (HJ) の弱解を構成する方法として，例えば，**(i) 粘性消滅法**（２階の項を加えて放物型にする），**(ii) 有限差分法**（微分を差分商に置き換える），**(iii) discount 消滅法**（０階の項を加える）がある．これらの近似問題では，周期解は一意的になる（(HJ) の場合，(i),(ii) では定数の不定性が残るが，(iii) では真に一意となる）．一意的な近似周期解から成る集合は点列コンパクト性を持つので，その収束部分列の極限によって (B) および (HJ) の周期解を１つ得ることができる．**「一意的な近似周期解は全列で収束するか？収束するならばその極限は非可算無限個ある周期解のどれになるか？」**という問題が近年盛んに研究されている．この問題を**選択問題**とよぶ．(i)-(iii) の収束性を Cauchy 列の議論によって直接調べることは極めて困難なため，現時点では，選択問題の解明には弱 KAM 理論による偏微分方程式と力学系の相互補完的な解析が必須となる．そこでは，(B) および (HJ) の近似方程式に対応する "力学系" を考え，その "力学系" が (B) および (HJ) に対応する Hamilton/Lagrange 力学系に漸近する様子を調べることがポイントとなる．"力学系" は，(i) ではある確率微分方程式，(ii) では時空間非一様ランダムウォーク，(iii) では摩擦項付きの Hamilton/Lagrange 力学系となる．選択問題は，(i) については [1],[2],[4] で部分的に，(ii) については [9] で部分的に, (iii) については [3],[5] で完全に解明されている．(i)-(iii) で選択される弱解は，一般に異なるという事実は興味深い．

本講演では，選択問題の概要を解説すると同時に，講演者の得た結果 [6],[7],[8],[9] を紹介する．結果 [7] は有限差分法に対する力学系的アプローチを与える．これを用いて，結果 [8] は有限差分法による弱 KAM 理論の近似理論を与える．これを基に，結果 [9] は有限差分法に対する選択問題を部分的に明らかにする．結果 [6] は discount

近似に対する選択問題における誤差評価を部分的に与える．

(B) および (HJ) の選択問題の議論は，解の一意性が成り立たない状況において，解を構成する方法の収束性をより強い形で保証すると同時に極限の性質を構成方法ごとに明らかにする．これは，偏微分方程式論におけるコンパクト性に基づく解の構成的存在証明をより具体的なものに発展させる第一歩の成果と見ることもできる．

[1] N. Anantharaman, R. Iturriaga, P. Padilla and H. Sanchez-Morgado, Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **5** (2005), No. 3, 513-528.

[2] U. Bessi, Aubry-Mather theory and Hamilton-Jacobi equations, Comm. Math. Phys. **235** (2003), 495-511.

[3] A. Davini, A. Fathi, R. Iturriaga and M. Zavidovique, Convergence of the solutions of the discounted equation, Invent. Math. **206** (2016), No. 1, 29-55.

[4] H. R. Jauslin, H. O. Kreiss and J. Moser, On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions, Proc. Symp. Pure Math. **65** (1999), 133-153.

[5] H. Mitake and H. V. Tran, Selection problems for a discounted degenerate viscous Hamilton-Jacobi equation, Adv. Math. **306** (2017), 684-703.

[6] H. Mitake and K. Soga, Weak KAM theory for discounted Hamilton-Jacobi equations and its application, submitted.

[7] K. Soga, Stochastic and variational approach to the Lax-Friedrichs scheme, Math. Comp. **84** (2015), no. 292, 629-651.

[8] K. Soga, More on stochastic and variational approach to the Lax-Friedrichs scheme, Math. Comp. **85** (2016), no. 301, 2161-2193.

[9] K. Soga, Selection problems of $\mathbf{Z}^2$-periodic entropy solutions and viscosity solutions, Calc. Var. PDEs **56** (2017), no. 4, Article 119, 30 pp.

爆発解をもつ微分方程式の離散化

松家 敬介

概要

爆発現象とは, 人口などのある量が急激に増加する現象のことである. 自然現象や社会現象は微分方程式を用いて数理モデル化され, この爆発現象は微分方程式の爆発解によってっ数理モデル化される. 爆発解は, 非線形偏微分方程式論において盛んに研究されている. 爆発解をもつ非線形偏微分方程式をいくつか挙げてみると, 半線形熱方程式の一つである

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + f^{1+\alpha} \tag{1}$$

や半線形波動方程式の一つである

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + |u|^p \tag{2}$$

などがある. ただし, $f := f(t, x),\ u := u(t, x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha > 0,\ p > 1$ とし, Δ は d 次元のラプラシアンとする. (1) と (2) の Cauchy 問題に対する爆発解濃霧は, 初期条件だけではなく方程式に含まれているパラメータである α や p が重要な役割を担っていることが先行研究で知られている. より具体的には, ある臨界指数が存在し, その指数とパラメータの大小によって爆発解の存在が左右されるというものである.

一方, 微分方程式の解を計算機に計算させるには微分方程式を何らかの形で離散化する必要がある. 本講演では, (1) の差分法による離散化の一つである

$$f_n^{s+1} = \frac{g_n^s}{\{1 - \alpha\delta(g_n^s)^\alpha\}^{1/\alpha}} \tag{3}$$

および (2) の差分法による離散化の一つである

$$u_n^{s+1} + u_n^{s-1} = \frac{4v_n^s}{2 - \delta^2 v_n^s\, |v_n^s|^{p-2}} \tag{4}$$

について議論する. ただし, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}^d,\ \delta > 0,\ e_k$ を第 k 成分が 1 の単位ベクトルとし,

$$g_n^s := \sum_{k=1}^{d} \frac{f_{n+e_k}^s + f_{n-e_k}^s}{2d}, \quad v_n^s := \sum_{k=1}^{d} \frac{u_{n+e_k}^s + u_{n-e_k}^s}{2d}$$

とする. これらの離散化した方程式 (3) および (4) にはもとの微分方程式 (1) および (2) の爆発解に対応する解がある. 本講演では (3) および (4) の Cauchy 問題に対する爆発解の産むについて解説し, (1) および (2) で得られている定理の離散類似を与える [1, 2]. また, (3) の Dirichret 境界値問題に対する爆発解の有無についても議論したい [3].

参考文献

[1] K. Matsuya and T. Tokihiro, Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 31(2011), 209–220.

[2] K. Matsuya, A blow-up theorem for a discrete semilinear wave equation, J. Differ. Equations Appl, 19(2013), 457-465.

[3] 松家 敬介, 離散半線形熱方程式の爆発解とその Dirichlet 問題, 武蔵野大学数理工学センター紀要, 1(2016), 92–100.

LONG RANGE SCATTERING FOR NLS EQUATION WITH CRITICAL HOMOGENEOUS NONLINEARITY IN 3D

瓜屋 航太 (岡山理科大学理学部応用数学科) [1]

1. 導入

本講演では, 次の非線形 Schrödinger 方程式を考察する:

$$i\partial_t u + \Delta u = F(u), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{NLS}$$

ここで, 空間次元 d は 1 以上とし, $u(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は複素数値の未知関数を表す. 非線形項 F は $1 + 2/d$ 次斉次であると仮定する. すなわち, 任意の $\lambda > 0$ に対して,

$$F(\lambda u) = \lambda^{1+2/d} F(u) \tag{1}$$

が成り立つとする. 本研究の目的は (NLS) に対して終値条件:

$$\|u(t) - u_p(t)\|_{L^2} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

を課した終値問題を考察し, その可解性を得ることである. 終値問題を解く上では解の時間無限大での漸近挙動 u_p を適切に設定することが重要となる. 典型的な冪乗型の非線項 $F(u) = |u|^{p-1}u$ の場合, 漸近形として自由解を選んだとき $p > 1 + 2/d$ であれば終値問題は可解であるが, $1 < p \le 1 + 2/d$ のときには可解ではないことが知られている ([1], [8]). したがって, $1+2/d$ が解の漸近挙動の意味で臨界指数となることが分かる. 実際, $p = 1+2/d$ のとき解の漸近挙動は位相の修正が入った自由解となる ([6], [2]). また, 空間 1 次元, 2 次元において臨界指数がそれぞれ 3 次, 2 次となることから, u と $\overline{u}$ からなる単項式の場合には終値問題の可解性が知られている. より詳しく述べれば, 1 次元で $u^3, \overline{u}^3, |u|^2\overline{u}$, 2 次元で $u^2, \overline{u}^2$ の場合には自由解に漸近する解の存在が示されている ([3], [5]). 例外的な場合が 2 次元で $|u|^2$ の場合であり, このとき解は自由解に漸近しないことが示されている ([7]).

非線形項に対する斉次条件 (1) の下で (NLS) の終値問題の可解性については Masaki-Miyazaki [4] による空間 1 次元と 2 次元の場合の研究がある. [4] におけるアイデアは非線形項の斉次条件から

$$F(u) = |u|^{1+\frac{2}{d}} F\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

と変形し, $g(\theta) = F(e^{i\theta})$ により定められる 2π 周期関数 g を Fourier 級数展開することにより, 非線形項 F を

$$F(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n |u|^{1+\frac{2}{d}-n} u^n$$

ととらえることである.

2. 主結果

本講演の主結果は [4] における結果の 3 次元への拡張である. 非線形項に対して次の仮定をする.

本講演は眞崎聡氏 (阪大基礎工), 宮崎隼人氏 (津山高専) との共同研究に基づく.

[1] uriya@xmath.ous.ac.jp

仮定 2.1. F は $5/3$ 次斉次であるとし, 対応する 2π 周期関数 g について $g_0 = 0$ かつ $g_1 \in \mathbb{R}$ であるとする. さらに, ある $\eta > 0$ が存在し,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{1+\eta}|g_n| < \infty$$

が成り立つとする.

定義. $s, m \in \mathbb{R}$ として, 重み付き Sobolev 空間 $H^{s,m}$, および斉次 Sobolev 空間 $\dot{H}^s$ を

$$H^{s,m} = H^{s,m}(\mathbb{R}^3) = \left\{\phi \in \mathcal{S}' \ ; \ \|\phi\|_{H^{s,m}} = \|(1+|x|^2)^{m/2}(1-\Delta)^{s/2}\phi\|_{L^2} < \infty\right\},$$

$$\dot{H}^s = H^s(\mathbb{R}^3) = \left\{\phi \in \mathcal{S}' \ ; \ \|\phi\|_{\dot{H}^s} = \|(-\Delta)^{s/2}\phi\|_{L^2} < \infty\right\}$$

とする.

定理 2.2. F は仮定 *2.1* をみたすとする. $\delta \in (3/2, 5/3)$ を $\delta - 3/2 < 2\eta$ をみたすようにとり, $b \in (3/4, \delta/2)$ とする. $u_+ \in H^{0,2} \cap \dot{H}^{-\delta}$ は十分小さい $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(b, \|g\|_{Lip})$ について $\|\widehat{u_+}\|_{L^\infty} < \varepsilon_0$ をみたすとする. このとき, ある $T > 0$ が存在し, $u \in C([T,\infty); L^2(\mathbb{R}^3))$ に属する (NLS) の解で,

$$\sup_{t\in[T,\infty)} t^b \|u(t) - u_p(t)\|_{L^2} < \infty$$

をみたすものが一意的に存在する. ここで,

$$u_p(t) = (2it)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} \widehat{u_+}\left(\frac{x}{2t}\right) \exp(-ig_1|\widehat{u_+}|^{\frac{2}{3}} \log t)$$

である.

注意 1. (1) 定理 *2.2* は具体例として $F(u) = |\mathrm{Re}\, u|^{\frac{2}{3}} \mathrm{Re}\, u$ に適用することができる. 対応する関数は $|\cos\theta|^{\frac{2}{3}} \cos\theta$ であり, その *Fourier* 係数は

$$g_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{11}{6})\Gamma(\frac{3n-5}{6})}{\sqrt{\pi}\Gamma(-\frac{1}{3})\Gamma(\frac{3n+11}{6})} & (n : \text{奇数}), \\ 0 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

となる.

References

[1] Barab, J. E., *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.

[2] Ginibre, J., Ozawa, T., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \le 2$*, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[3] Hayashi, N., Wang, H., Naumkin, P. I., *Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in lower order Sobolev spaces*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **8** (2011), 759–775.

[4] Masaki, S., Miyazaki, H., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations with general homogeneous nonlinearity*, arxiv, 2016.

[5] Moriyama, K., Tonegawa, S., Tsutsumi, Y., *Wave operator for the nonlinear Schrödinger equation with a nonlinearity of low degree in one or two space dimensions*, Commun. Contemp. Math. **5** (2003), 983–996.

[6] Ozawa, T., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[7] Shimomura, A., Tsutsumi, Y., *Nonexistence of scattering states for some quadratic nonlinear Schrödinger equations in two space dimensions*, Differential Integral Equations **19** (2006), 1047-1060.

[8] Tsutsumi, Y., Yajima, K., *The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **11** (1984), 186-188.

MPM

世話人：辻川 亨，飯田 雅人，梅原 守道，出原 浩史，伊藤 翼，平山 浩之，坂田 繁洋，今 隆助
連絡先：今 隆助（宮崎大学工学部工学基礎教育センター）
E-mail：konr@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL：0985-58-7379，FAX：0985-58-7289