爆発解をもつ微分方程式の離散化

松家 敬介

武蔵野大学 工学部 数理工学科

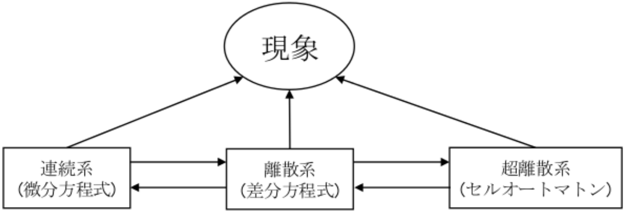
数学と現象： Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2017
於 宮崎大学 木花キャンパス

2017 年 11 月 18 日

目次

1. はじめに

- 研究の背景



微分方程式の解の特徴を保った離散化および超離散化

2. 爆発解をもつ微分方程式について

- 微分方程式の爆発解

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \Delta f + f^{1+\alpha}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u + |u|^p$$

$f := f\left(T, \vec{X}\right)$, $u := u\left(T, \vec{X}\right)$, $T \geq 0$, $\vec{X} \in \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$, $p > 1$,
Δ: d 次元 Laplacian.

定義 (爆発解)

$F := F\left(T, \vec{X}\right)$: ある偏微分方程式の解

$$f \text{ は時刻 } T_0 (\geq 0) \text{ で爆発する. } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \limsup_{T \to T_0 - 0} \|F(T, \cdot)\|_{L^\infty} = +\infty$$

このとき, F を爆発解, T_0 を爆発時刻と呼ぶ.

ただし, $\|F(T, \cdot)\|_{L^\infty} := \sup_{\vec{X} \in \mathbb{R}^d} \left| F\left(T, \vec{X}\right) \right|$.

- 爆発解の例
  $\partial_T f = \Delta f + f^{1+\alpha}$ の空間一様解: $f\left(T, \vec{X}\right) = f(T)$, 即ち

$$\frac{df}{dT} = f^{1+\alpha} \tag{1}$$

  (1) に正の初期値: $f(0) = C > 0$ を与えて解くと,

$$f(T) = \frac{\alpha^{-1/\alpha}}{\left(\alpha^{-1}C^{-\alpha} - T\right)^{1/\alpha}}$$

  が得られる. 解の形から, (1) の解は時刻 $\alpha^{-1}C^{-\alpha}$ で爆発する.

- 爆発解の存在に関する定理
  $\partial_T f = \Delta f + f^{1+\alpha}$ の Cauchy 問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial T} = \Delta f + f^{1+\alpha} & \left(T > 0, \vec{X} \in \mathbb{R}^d\right) \\ f\left(0, \vec{X}\right) = a\left(\vec{X}\right) \ (\geq 0, \neq 0) & \left(\vec{X} \in \mathbb{R}^d\right) \end{cases} \tag{2}$$

  $a(\vec{X})$ は十分に滑らか.

定理 [H. Fujita et al.]

f: (2) の解

- $0 < \alpha \leq 2/d$ のとき, f はある有限時刻で爆発する.
- $2/d < \alpha$ のとき, $a\left(\vec{X}\right)$ が十分小さいと f は有限時刻で爆発しない.

$\partial_T f = \Delta f + f^{1+\alpha}$ の Dirichlet 問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial T} = \Delta f + f^{1+\alpha} & \left(T > 0, \vec{X} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d\right) \\ f\left(0, \vec{X}\right) = a\left(\vec{X}\right) \ (\geq 0, \neq 0) & \left(\vec{X} \in \Omega\right) \\ f\left(T, \vec{X}\right) = 0 & \left(\vec{X} \in \partial\Omega\right) \end{cases} \tag{3}$$

$a\left(\vec{X}\right)$ は十分に滑らか.

定理

f: (3) の解

このとき, $a\left(\vec{X}\right)$ が十分小さいと f は有限時刻で爆発しない.

$\partial_T^2 u = \Delta u + |u|^p$ の Cauchy 問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u + |u|^p & \left(T > 0, \vec{X} \in \mathbb{R}^d\right) \\ u\left(0, \vec{X}\right) = a\left(\vec{X}\right) & \left(\vec{X} \in \mathbb{R}^d\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial T}\left(0, \vec{X}\right) = b\left(\vec{X}\right) & \left(\vec{X} \in \mathbb{R}^d\right) \end{cases} \tag{4}$$

$a(\vec{X}),\ b(\vec{X})$ は十分に滑らか.

定理 [T. Kato]

u: (4) の解

$a(\vec{X}),\ b\left(\vec{X}\right)$ の台は有界, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} b\left(\vec{X}\right) d\vec{X} > 0$ とする.

- $d = 1$ のとき, u はある有限時刻で爆発する.
- $d > 2$ かつ $p \leq \dfrac{d+1}{d-1}$ のとき, u はある有限時刻で爆発する.

3. 半線形熱方程式の離散化について

- 半線形熱方程式の離散化
  $\partial_T f = \Delta f + f^{1+\alpha}$ の差分法による標準的な離散化:

$$\frac{f_{\vec{n}}^{t+1} - f_{\vec{n}}^{t}}{\delta} = \sum_{k=1}^{d} \frac{f_{\vec{n}+\vec{e}_k}^{t} - 2f_{\vec{n}}^{t} + f_{\vec{n}-\vec{e}_k}^{t}}{\xi^2} + \left(f_{\vec{n}}^{t}\right)^{1+\alpha}$$

$$t \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \vec{n} \in \mathbb{Z}^d,\ \delta, \xi > 0,\ \vec{e}_k := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{–th}}, 0, \dots, 0).$$

  微分方程式の解の特徴の保存:
  - 正値性: $2d\delta/\xi^2 \leq 1$
  - 爆発解: 有限時刻で解の値が急激に大きくなっているか?

$$\downarrow$$

$$\times$$

$$\because f_{\vec{n}}^{t} < \infty,\ {}^\forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d \ \Rightarrow\ f_{\vec{n}}^{t+1} < \infty,\ {}^\forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d$$

$f_T = f^{1+\alpha}$ の離散化

$$f(T) = \frac{\alpha^{-1/\alpha}}{(\alpha^{-1}C^{-\alpha} - T)^{1/\alpha}} \to f^t = \frac{\alpha^{-1/\alpha}}{(\alpha^{-1}C^{-\alpha} - \delta t)^{1/\alpha}}$$

f^t が満たす差分方程式:

$$f^{t+1} = \frac{f^t}{\{1 - \alpha\delta\,(f^t)^{\alpha}\}^{1/\alpha}}$$

$$f^{t+1} = f^t + \delta\left(f^t\right)^{1+\alpha} + O\left(\delta^2\right)\ (\delta \to 0)$$

拡散項?

$$f^{t+1} = \frac{f^t}{\left\{1 - \alpha\delta\left(f^t\right)^\alpha\right\}^{1/\alpha}}$$

$$\downarrow$$

$$f_{\vec{n}}^{t+1} = \frac{g_{\vec{n}}^t}{\left\{1 - \alpha\delta\left(g_{\vec{n}}^t\right)^\alpha\right\}^{1/\alpha}}$$

$$g_{\vec{n}}^t := \sum_{k=1}^{d} \frac{f_{\vec{n}+\vec{e}_k}^t + f_{\vec{n}-\vec{e}_k}^t}{2d}$$

$$\frac{f_{\vec{n}}^{t+1} - f_{\vec{n}}^t}{\delta} = \sum_{k=1}^{d} \frac{f_{\vec{n}+\vec{e}_k}^t - 2f_{\vec{n}}^t + f_{\vec{n}-\vec{e}_k}^t}{2d\delta} + \left(g_{\vec{n}}^t\right)^{1+\alpha} + O(\delta)\ (\delta \to 0)$$

$\xi := \sqrt{2d\delta}$ とし, 連続極限をとることで元の方程式が得られる.

- 離散半線形熱方程式の爆発解

$$f_{\vec{n}}^{t+1} = \frac{g_{\vec{n}}^t}{\left\{1 - \alpha\delta\left(g_{\vec{n}}^t\right)^\alpha\right\}^{1/\alpha}} \tag{5}$$

$$g_{\vec{n}}^t \to (\alpha\delta)^{-1/\alpha} \Rightarrow f_{\vec{n}}^{t+1} \to +\infty$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{解の爆発に対応する性質}}$$

定義 ((5) の爆発解)

$f_{\vec{n}}^t$: (5) の解
$f_{\vec{n}}^t$ が時刻 $t_0 (\in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で爆発する.

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} g_{\vec{n}}^t < (\alpha\delta)^{-1/\alpha},\ {}^\forall t < t_0,\ {}^\forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d,\ {}^\exists \vec{n}_0 \in \mathbb{Z}^d \text{ s.t. } g_{\vec{n}_0}^{t_0} \geq (\alpha\delta)^{-1/\alpha}$$

このとき, $f_{\vec{n}}^t$ を爆発解, t_0 を爆発時刻と呼ぶ.

- 離散半線形熱方程式の爆発解に関する定理
  離散半線形熱方程式の Cauchy 問題:

$$
\begin{cases}
f_{\vec{n}}^{t+1} = \dfrac{g_{\vec{n}}^t}{\{1-\alpha\delta(g_{\vec{n}}^t)^\alpha\}^{1/\alpha}} & (t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^d) \\
f_{\vec{n}}^0 = a_{\vec{n}} \ (\geq 0, \neq 0) & (\vec{n} \in \mathbb{Z}^d)
\end{cases}
\tag{6}
$$

定理 [K. M. & T. Tokihiro]

$f_{\vec{n}}^t$: (6) の解

- $0 < \alpha \leq 2/d$ のとき, $f_{\vec{n}}^t$ はある有限時刻で爆発する.
- $2/d < \alpha$ のとき, $a_{\vec{n}}$ が十分小さいと $f_{\vec{n}}^t$ は有限時刻で爆発しない.

- 証明の概略
  - $\alpha \neq 2/d$ の場合, 優解及び劣解を構成し, 比較原理を適用.
  - $\alpha = 2/d$ の場合, $\sum_{\vec{n}} f_{\vec{n}}^t$ を下から評価

$$\begin{cases} U_{\vec{n}}^{t+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{U_{\vec{n}+\vec{e}_k}^t + U_{\vec{n}-\vec{e}_k}^t}{2d} \\ U_{\vec{n}}^0 = \delta_{\vec{n},\vec{0}} \end{cases}, \quad h_{\vec{n}}^t := \sum_{\vec{n}' \in \mathbb{Z}^d} U_{\vec{n}-\vec{n}'}^t a_{\vec{n}'}$$

$U_{\vec{n}}^t$: d 次元単純ランダムウォークの推移確率

$$U_{\vec{n}}^t \sim 2\left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} t^{-d/2} \exp\left(-\frac{4^{1/d} d|\vec{n}|^2}{2t}\right) \ (t \to +\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$^{\exists}C > 0 \text{ s.t. } h_{\vec{n}}^t \sim C t^{-d/2} \exp\left(-\frac{4^{1/d} d|\vec{n}|^2}{2t}\right) \ (t \to +\infty)$$

優解の構成 $(2/d < \alpha)$

$$\overline{f}_{\vec{n}}^{t} := \frac{h_{\vec{n}}^{s}}{\left\{1 - \alpha\delta \sum_{k=0}^{t} (m_k)^{\alpha}\right\}^{1/\alpha}}$$

ただし, $m_k := \sup_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} h_{\vec{n}}^{k}$.

補題

$1 - \alpha\delta \sum_{k=0}^{t_1} (m_k)^{\alpha} > 0 \Rightarrow f_{\vec{n}}^{t}$ は時刻 t_1 で爆発しない.

$$(m_t)^{\alpha} \sim C^{\alpha} t^{-\alpha d/2} \ (t \to +\infty)$$

$$\alpha d/2 > 1 \ \Leftrightarrow \ 2/d < \alpha$$

劣解の構成 ($\alpha < 2/d$)

$$\underline{f}^t_{\vec{n}} := \frac{h^t_{\vec{n}}}{\{1 - \alpha\delta t (h^t_{\vec{n}})^\alpha\}^{1/\alpha}}$$

補題

$\underline{f}^t_{\vec{n}}$ は時刻 t_2 で爆発しない. $\Rightarrow 1 - \alpha\delta t_2 \left(h^{t_2}_{\vec{n}}\right)^\alpha > 0, \ {}^\forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d$

$$1 - \alpha\delta t \left(h^t_{\vec{n}}\right)^\alpha \sim 1 - \alpha\delta C^\alpha t^{1-\alpha d/2} \ (t \to +\infty)$$

$$1 - \alpha d/2 > 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha < 2/d$$

$\alpha = 2/d$ の場合

$$f_{\vec{n}}^t = h_{\vec{n}}^t + \sum_{s=1}^{t} \sum_{\vec{n}' \in \mathbb{Z}^d} U_{\vec{n}-\vec{n}'}^{t-s} H\left(g_{\vec{n}'}^{s-1}\right)$$

ただし, $H(g) := \dfrac{g}{(1-\alpha\delta g^{\alpha})^{1/\alpha}} - g \ \left(0 \leq g < (\alpha\delta)^{-1/\alpha}\right)$.

補題

$\alpha = 2/d$ であり, $f_{\vec{n}}^t$ は有限時刻で爆発しないとする.
この時, 以下が成り立つ.

$$^{\exists}C_0 > 0 \text{ s.t.} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} f_{\vec{n}}^t < C_0, \ ^{\forall}t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

関係式

$$H(g_{\vec{n}}^t) \geq \delta \left(h_{\vec{n}}^{t+1}\right)^{1+\alpha}, \quad \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} h_{\vec{n}}^t > 0, \quad \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} U_{\vec{n}}^t = 1.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} f_{\vec{n}}^t &= \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \left(h_{\vec{n}}^t + \sum_{s=1}^{t} \sum_{\vec{n}'\in\mathbb{Z}^d} U_{\vec{n}-\vec{n}'}^{t-s} H(g_{\vec{n}'}^{s-1}) \right) \\
&> \sum_{s=1}^{t} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \delta \left(h_{\vec{n}}^s\right)^{1+\alpha}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \left(h_{\vec{n}}^t\right)^{1+\alpha} \sim \frac{C^{1+\alpha}}{t} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \exp\left(-\frac{4^{1/d}d}{2}\left(1+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{|\vec{n}|}{\sqrt{t}}\right)^2 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^d \quad (t \to +\infty)$$

$$\sim \frac{C'}{t} \ (t \to +\infty) \qquad ({}^{\exists}C' > 0)$$

離散半線形熱方程式の Dirichlet 問題:

$$\begin{cases} f_{\vec{n}}^{t+1} = \dfrac{g_{\vec{n}}^t}{\{1-\alpha\delta(g_{\vec{n}}^t)^\alpha\}^{1/\alpha}} & (t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \vec{n} \in \Omega_D^\circ) \\ f_{\vec{n}}^0 = a_{\vec{n}} \ (\geq 0, \neq 0) & (\vec{n} \in \Omega_D) \\ f_{\vec{n}}^t = 0 \ (\geq 0, \neq 0) & (\vec{n} \in \partial\Omega_D) \end{cases} \tag{7}$$

ただし, $\Omega_D \subset \mathbb{Z}^d$ とし,

$$\Omega_D^\circ := \left\{ n \in \Omega_D \middle| {}^\forall k,\ n \pm e_k \in \Omega_D \right\},\ \partial\Omega_D = \Omega_D \setminus \Omega_D^\circ$$

とする.

定理 [K. M.]

$f_{\vec{n}}^t$: (7) の解
このとき, $a_{\vec{n}}$ が十分小さいと $f_{\vec{n}}^t$ は有限時刻で爆発しない.

証明は前の定理と類似した優解を構成し, 比較原理を適用する.

4. 半線形波動方程式の離散化について

- 半線形波動方程式の離散化

$$f^{t+1} = \frac{f^t}{\left\{1 - \alpha\delta\left(f^t\right)^\alpha\right\}^{1/\alpha}} \ : \ f_T = f^{1+\alpha} \text{ の離散化}$$

$$f_{\vec{n}}^{t+1} = \frac{g_{\vec{n}}^t}{\left\{1 - \alpha\delta\left(g_{\vec{n}}^t\right)^\alpha\right\}^{1/\alpha}} \ : \ \partial_T f = \Delta f + f^{1+\alpha} \text{ の離散化}$$

$\underline{u_{TT} = |u|^p \text{ の離散化}}$

$$\begin{aligned} u^{t+1} + u^{t-1} &= \frac{4u^t}{2 - \delta^2 u^t \left|u^t\right|^{p-2}} \\ &= 2u^t + \delta^2 \left|u^t\right|^p + O\left(\delta^4\right) \ (\delta \to 0) \end{aligned}$$

$\underline{\partial_T^2 u = \Delta u + |u|^p \text{ の離散化}}$

$$u_{\vec{n}}^{t+1} + u_{\vec{n}}^{t-1} = \frac{4v_{\vec{n}}^t}{2 - \delta^2 v_{\vec{n}}^t \left|v_{\vec{n}}^t\right|^{p-2}}, \quad v_{\vec{n}}^t := \sum_{k=1}^{d} \frac{u_{\vec{n}+\vec{e}_k}^t + u_{\vec{n}-\vec{e}_k}^t}{2d}$$

$$u_{\vec{n}}^{t+1}+u_{\vec{n}}^{t-1}=\frac{4v_{\vec{n}}^t}{2-\delta^2 v_{\vec{n}}^t\left|v_{\vec{n}}^t\right|^{p-2}},\ v_{\vec{n}}^t:=\sum_{k=1}^{d}\frac{u_{\vec{n}+\vec{e}_k}^t+u_{\vec{n}-\vec{e}_k}^t}{2d} \tag{8}$$

$$\frac{u_{\vec{n}}^{t+1}-2u_{\vec{n}}^t+u_{\vec{n}}^{t-1}}{\delta^2}=\sum_{k=1}^{d}\frac{u_{\vec{n}+\vec{e}_k}^t-2u_{\vec{n}}^t+u_{\vec{n}-\vec{e}_k}^t}{d\delta^2}+\left|v_{\vec{n}}^t\right|^p +O(\delta^2)\ (\delta\to 0)$$

$\xi:=\sqrt{d}\delta$ とし, 連続極限をとることで元の方程式が得られる.

定義 ((8) の爆発解)

$u_{\vec{n}}^t$: (8) の解
$u_{\vec{n}}^t$ が時刻 $t_0(\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ で爆発する.

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v_{\vec{n}}^t<(2\delta^{-2})^{\frac{1}{p-1}},\ {}^\forall t<t_0,\ {}^\forall\vec{n}\in\mathbb{Z}^d,\ {}^\exists\vec{n}_0\in\mathbb{Z}^d$ s.t. $v_{\vec{n}_0}^{t_0}\geq(2\delta^{-2})^{\frac{1}{p-1}}$

このとき, $u_{\vec{n}}^t$ を爆発解, t_0 を爆発時刻と呼ぶ.

- 離散半線形波動方程式の爆発解に関する定理
  離散半線形波動方程式の Cauchy 問題

$$
\begin{cases}
u_{\vec{n}}^{t+1} + u_{\vec{n}}^{t-1} = \dfrac{4v_{\vec{n}}^{t}}{2 - \delta^2 v_{\vec{n}}^{t} \left| v_{\vec{n}}^{t} \right|^{p-2}} & (t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^d) \\
u_{\vec{n}}^{0} = a_{\vec{n}} & (\vec{n} \in \mathbb{Z}^d) \\
u_{\vec{n}}^{1} = b_{\vec{n}} & (\vec{n} \in \mathbb{Z}^d)
\end{cases}
\tag{9}
$$

定理 [K. M.]

$u_{\vec{n}}^{t}$: (9) の解
$a_{\vec{n}}$, $b_{\vec{n}}$ の台は有界, $\sum_{\vec{n}} b_{\vec{n}} > \sum_{\vec{n}} a_{\vec{n}}$ とする.

- $d = 1$ のとき, $u_{\vec{n}}^{t}$ はある有限時刻で爆発する.
- $d > 2$ かつ $p \leq \dfrac{d+1}{d-1}$ のとき, $u_{\vec{n}}^{t}$ はある有限時刻で爆発する.

- 証明の概略
  解が爆発しないと仮定し,

$$W^t := \sum_{\vec{n}} u_{\vec{n}}^t$$

の不等式評価から矛盾を示す.

$$W^t < C_0 t^d \qquad (t >> 1)$$

$$\begin{cases} W^t \geq C_1 t \\ W^{t+1} - 2W^t + W^{t-1} \geq C_2 t^{-d(p-1)} \left(W^t\right)^p \end{cases} \qquad (t >> 1)$$

ただし, $C_0,\ C_1,\ C_2 > 0$.

$$W^t < C_0 t^d \qquad (t >> 1)$$

$$\begin{cases} W^t \geq C_1 t \\ W^{t+1} - 2W^t + W^{t-1} \geq C_2 t^{-d(p-1)} \left(W^t\right)^p \end{cases} \qquad (t >> 1)$$

以下の補題から上記の不等式評価が矛盾し, 証明が完了する.

補題

$$\begin{cases} F^t \geq \tilde{C}_1 t^\eta \\ F^{t+1} - 2F^t + F^{t-1} \geq \tilde{C}_2 t^{-q} (F^t)^p \end{cases} \qquad (t \geq t_0)$$

ただし, $\eta \geq 1,\ p > 1,\ (p-1)\eta > q - 2$. このとき, 任意の $\ell \geq \eta$ に対して $F^t \geq C t^\ell$ $(t >> t_0)$ を満たすような t に依存しない正定数 C が存在する.

5. まとめ

- 本日お話したこと
  - 離散半線形熱方程式および離散半線形波動方程式
  - 離散化した方程式の爆発解について
  - 爆発解の存在に関する定理の離散類似
- 今後の課題
  - 連立系
  - 半線形波動方程式の爆発解の存在に関する臨界指数
  - 微分方程式の爆発解の性質について (爆発時刻 etc.)
  - 超離散類似