

ローレンツ水車による カオスの実演とその数理

静岡大学大学院工学領域

守田 智

守田 智の略歴

- 1992年3月 京都大学理学部 卒業
- 1994年3月 京都大学大学院理学研究科修士課程
(物理学第一専攻) 修了
- 1997年5月 京都大学大学院理学研究科博士後期課程
(物理学第一専攻) 修了
- 1997年6月 慶應義塾大学工学部助手 (有期・日本学術
振興会未来開拓学術推進事業)
- 1999年1月 静岡大学工学部 システム工学科 助手
- 2004年4月 静岡大学工学部 システム工学科 助教
- 2009年10月 静岡大学工学部 留学生担当 講師
- 2012年12月 静岡大学工学部 システム工学科 准教授
- 2016年4月 静岡大学工学部 システム工学科 教授

非線形物理学とは

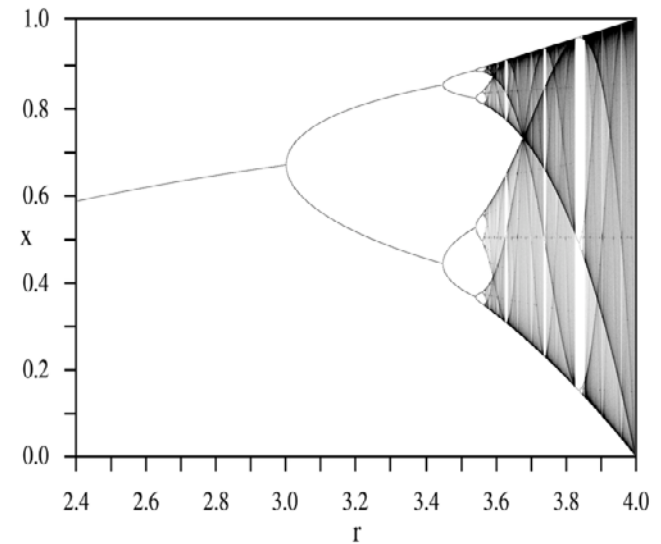
- 平衡系の統計物理学
 - 20世紀の前半、その基本的体系が完成
 - 相転移（臨界現象）の理論
- 平衡状態近傍での線形非平衡系
 - アインシュタインのブラウン運動に始まる
 - 揺動散逸定理、線形応答理論
- 非線形非平衡系
 - 平衡状態から大きく離れた非平衡系
 - 縮約理論などを使って優れた成果
 - パターン形成、ダイナミクス、統計法則などを研究
 - 生態学や経済学などの広範囲の分野に波及

非線形物理学の視点

- 従来の物理学では、以下のような性質を持つ解析的に扱いやすいシステムを考察してきた
 - Linearity
 - Smoothness
 - Stability
- しかし、現実の多くのシステムは
 - Nonlinear
 - Unsmooth
 - “Random”
- ミクロからの外挿ではマクロな現象を予期できない
 - Emergent phenomena

例：カオス

- 単純な規則 ⇒ ランダムに見える複雑な挙動
- 逆に複雑な挙動にも規則がある
- 決定論だが長期的には予測不可能
 - 初期値鋭敏性
 - 構造不安定性
- たとえばロジスティック写像
$$x_{t+1} = r x_t (1-x_t)$$
- しかし、複雑なシステムがすべて単純なカオスが記述できるわけではない



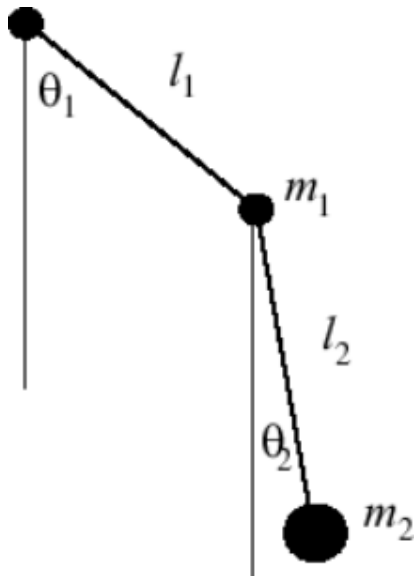
簡単な実験で見られるカオス

- 2重振り子
- 蛇口の水滴
- **ローレンツ水車**

2重振り子

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

ラグランジュの方程式 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$



2重振り子

蛇口からでる水滴

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) = -kz - \gamma \frac{dz}{dt} + mg.$$

Shaw (1984)

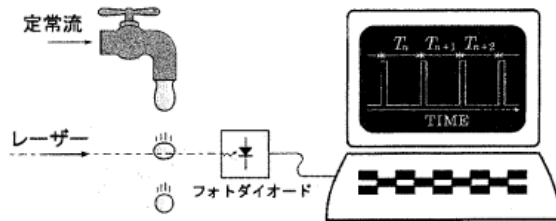
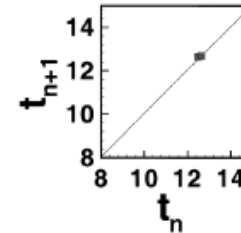
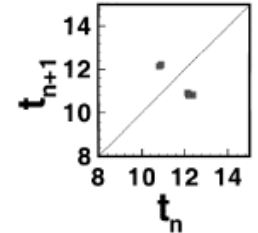


図 2: 落下時間を測定する実験の概略図。流量を制御変数とし、ノズルから生成された水滴がレーザーを遮る時刻を測定する。

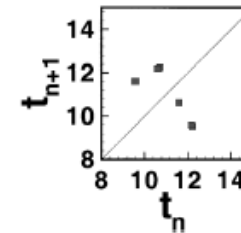
(a) Oh = 0.1, We = 0.12



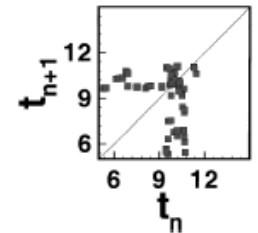
(b) Oh = 0.1, We = 0.135



(c) Oh = 0.1, We = 0.14



(d) Oh = 0.01, We = 0.19



Ambravaneswaran et.a (2000)

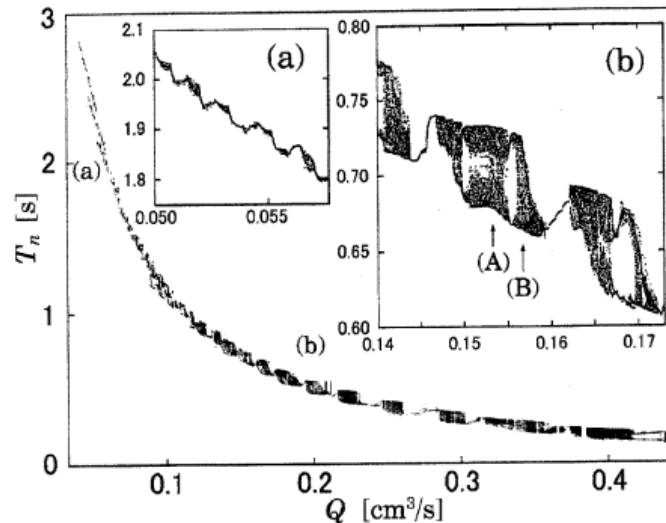
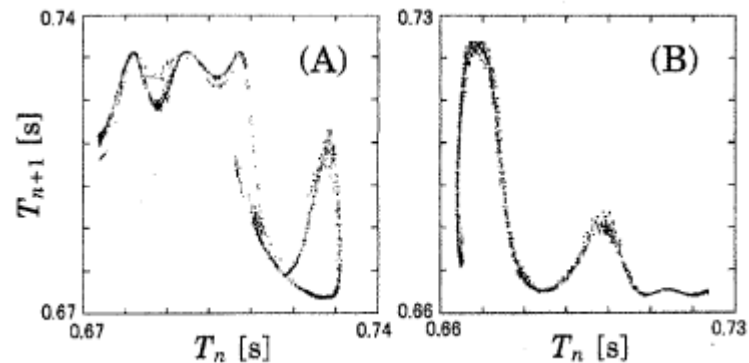


図 3: 分岐図(勝山、永田の実験 [10])。制御変数である流量 Q に対する落下時間間隔 T_n のプロット。ノズルは、内径 5 mm、外径 7 mm。内挿図は一部分を拡大したもの。

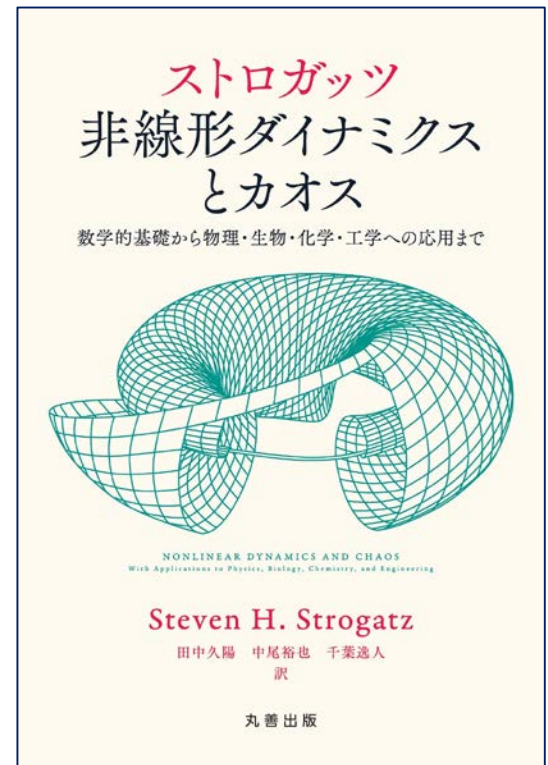
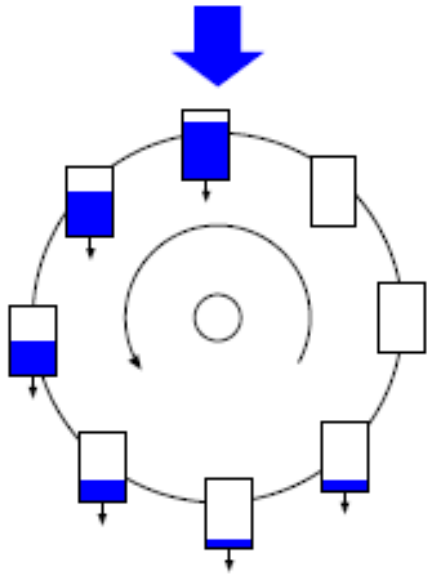


清野健(2005)

ローレンツ水車

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

1963年にLorenzが考案した大気変動の常微分方程式モデルを簡易な物理モデルに置き換えたもの。

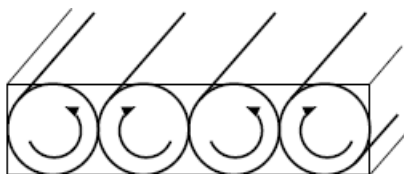


元々のローレンツモデル

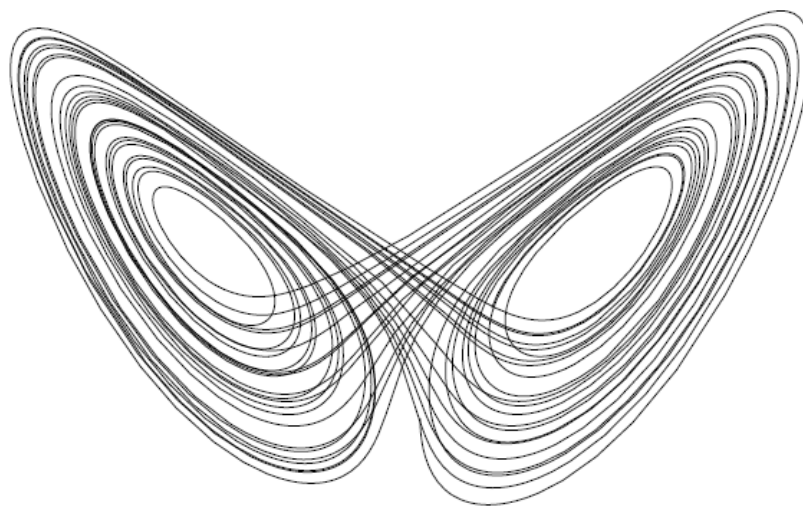
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

x : 対流の強度
 y : 水平方向の温度差
 z : 垂直方向の温度差

σ : プランドル数 (動粘度と温度拡散率の比)
 r : レーリー数 (温度差で決まる無次元量)
 b : ロールパターンの縦横比



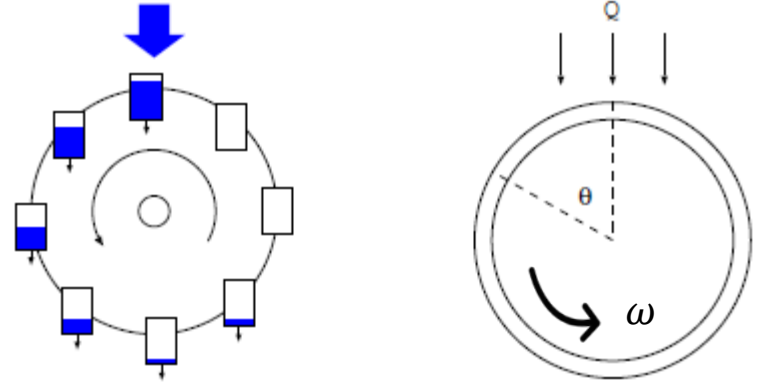
層状の流体を下から暖めたときに生じる対流パターンの概念図。ローレンツモデルは回転流の1つに着目して流体方程式を簡略化し3変数の常微分方程式を導く



有名なアトラクター

ローレンツ水車の方程式の導出 1

コップが無数にあるとし下図のような連続的な状況を考える



時間 t の水車の角速度： $\omega(t)$

時間 t に角度 θ_1 から角度 θ_2 の間にある水の量： $\int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$

角度 θ_1 から角度 θ_2 の間で排出される水の量： $A \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$

角度 θ_1 から角度 θ_2 の間で補給される水の量： $\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta$

注意) トリチェリの定理によれば排出量は深さの平方根に比例するのだが簡単のため水量に比例するとした

ローレンツ水車の方程式の導出 2

微小時間 Δt での $M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$ の変化 ΔM は

$$\Delta M = \Delta t \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta - A \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta \right] + \omega(t) \Delta t m(\theta_1, t) - \omega(t) \Delta t m(\theta_2, t)$$

$$m(\theta_1, t) - m(\theta_2, t) = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta$$

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[Q(\theta) - A m(\theta, t) - \frac{\partial m(\theta, t)}{\partial \theta} \right] d\theta$$

連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} m(\theta, t) = Q(\theta) - A m(\theta, t) - \omega(t) \frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, t)$$

$$I \frac{d}{dt} \omega(t) = -k \omega(t) + g \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta$$

I : 水車の慣性モーメント
 k : 摩擦抵抗
 g : 重力加速度 \times 水車半径
 $\times \sin$ (水車の傾斜角)

注意) 水量変化による慣性モーメントの変化は無視している

ローレンツ水車の方程式の導出 3

$$\frac{\partial}{\partial t} m(\theta, t) = Q(\theta) - Am(\theta, t) - \omega(t) \frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, t)$$

$$I \frac{d}{dt} \omega(t) = -k\omega(t) + g \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta$$

ここでフーリエ展開を用いると

$$m(\theta, t) = \sum_n^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] \quad Q(\theta) = \sum_n^{\infty} q_n(t) \cos n\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta] \right] &= -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta - A \left[\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta] \right] \end{aligned}$$

ローレンツ水車の方程式の導出 4

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta] \right] = -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta - A \left[\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta] \right]$$

$\sin n\theta, \cos n\theta$ の係数を見比べて

$$\frac{d}{dt} a_n(t) = n\omega b_n - A a_n$$

$$\frac{d}{dt} b_n(t) = -n\omega a_n - A b_n + q_n$$

もうひとつの式にもフーリエ展開式を代入

$$\begin{aligned} I \frac{d}{dt} \omega(t) &= -k\omega(t) + g \int_0^{2\pi} \sin \theta \sum_n^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] d\theta \\ &= -k\omega(t) + g \int_0^{2\pi} a_1 \sin^2 \theta d\theta = -k\omega(t) + \pi g a_1 \end{aligned}$$

ローレンツ水車の方程式

$$\frac{d}{dt} a_1(t) = \omega(t)b_1(t) - Aa_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} b_1(t) = -\omega(t)a_1(t) + Ab_1(t) + q_1$$

$$\frac{d}{dt} \omega(t) = \left(-\frac{k}{I} \omega(t) + \frac{\pi g}{I} a_1(t) \right)$$

g : 重力加速度 \times 水車半径
 $\times \sin(\text{水車の傾斜角})$

A : 水の排出率

q_1 : 水の供給

k : 水車の摩擦抵抗

I : 水車の慣性モーメント



$$a_1(t) = \frac{Ak}{\pi g} y(At)$$

$$b_1(t) = -\frac{Ak}{\pi g} z(At) + \frac{q_1}{A}$$

$$\omega(t) = Ax(At)$$

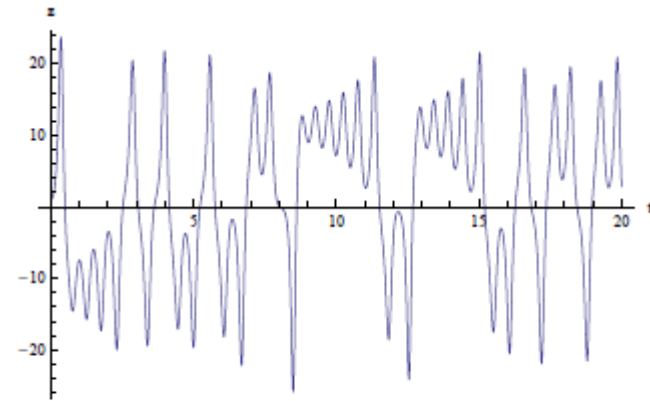
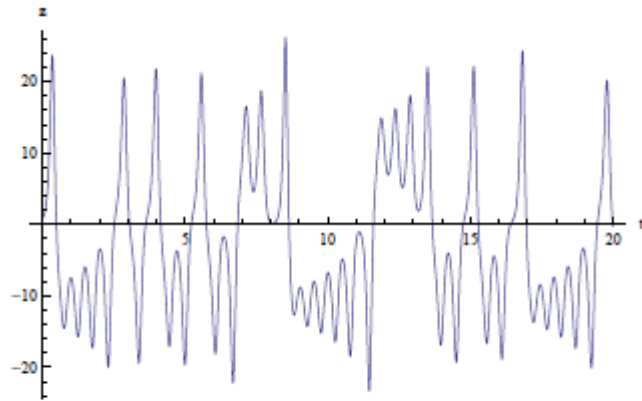
$$\sigma = \frac{k}{IA}, r = \frac{\pi g q_1}{A^2 k}, b = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

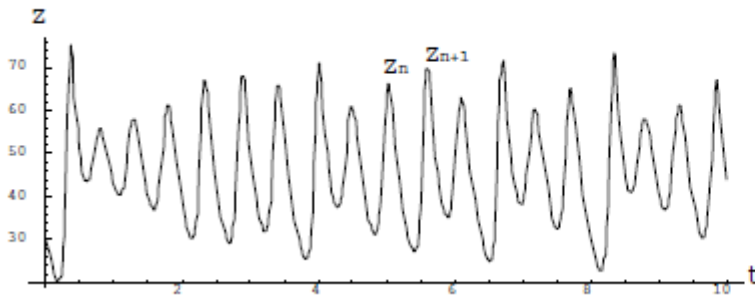
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

ローレンツ方程式のふるまい

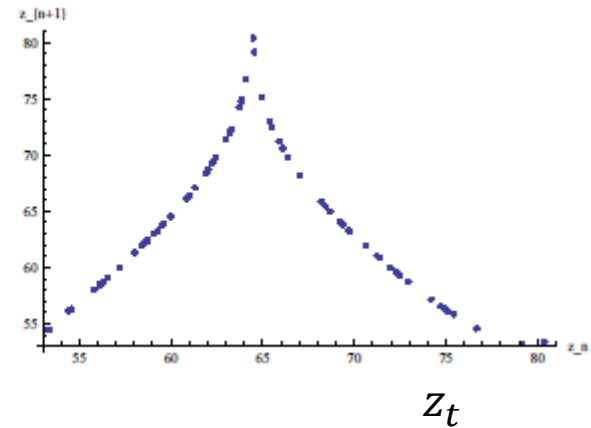


x の時間変化。左右の図の違いは x 初期条件を $= 1$ から $x = 1.00001$ に変え

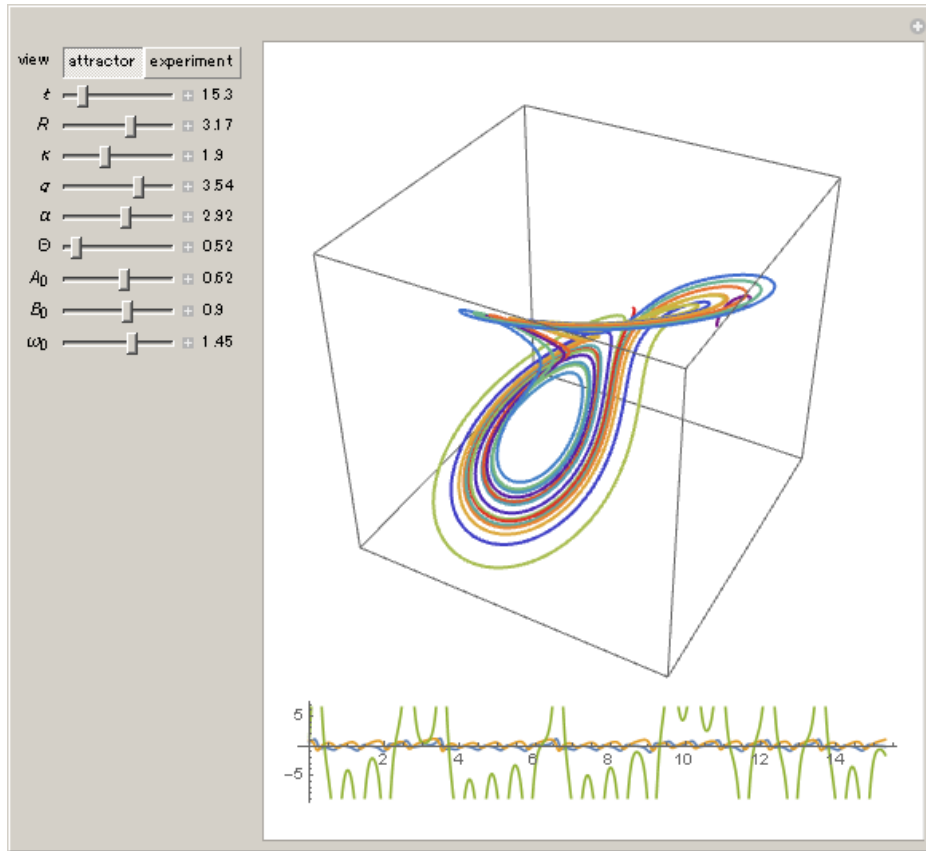
ローレンツ写像



z_{t+1}



Wolfram CDF playerでシミュレーション



- g : 重力加速度 \times 水車半径
 $\times \sin(\text{水車の傾斜角})$
- A : 水の排出率
- q_1 : 水の供給
- k : 水車の摩擦抵抗
- I : 水車の慣性モーメント

T. Tél and M. Gruiž, *Chaotic Dynamics, An Introduction Based on Classical Mechanics*, New York: Cambridge University Press, 2006.