エントロピー解・粘性解の選択問題

曽我幸平 *

1　問題の概要

関数 H を flux とする非粘性の Burgers 方程式 (B) および H を Hamiltonian とする Hamilton-Jacobi 方程式 (HJ) は，一般に滑らかな解を持つことができないので，エントロピー解および粘性解とよばれる弱解のクラスで解析される．代表的なタイプの (B) および (HJ) に対する初期値問題の解の存在と一意性は，この弱解のクラスにおいて確立している．空間１次元の場合は，(HJ) の粘性解の微分と (B) のエントロピー解に一致する．(B) および (HJ) の特性曲線を与える常微分方程式系は Hamilton 力学系（H から生成される）あるいはこれに同値な Lagrange 力学系（H の Legendre 変換 L から生成される）である．Hamilton/Lagrange 力学系の大域的性質を調べるという力学系の中心的問題に対して，(B) および (HJ) の弱解を用いる枠組みが Albert Fathi ('97) によって導入された．これは弱 KAM 理論とよばれ，力学系および偏微分方程式の解析を相互補完的に解析する新たな方法として，近年その重要性が注目されている．弱 KAM 理論は，力学系理論で標準的である時間空間周期的な Hamiltonian H を取り扱う．弱 KAM 理論で必要となる (B) および (HJ) の弱解は，H が時間によらないならば空間周期解，時間によるならば時間空間周期解である．初期値問題の場合と異なり，周期解は一般に非可算無限個存在する．(HJ) の解は定数の不定性を持つが，ここで言う非可算な解の多重性は定数差以上の違いを意味することに注意する．

(B) および (HJ) の弱解を構成する方法として，例えば，**(i) 粘性消滅法**（２階の項を加えて放物型にする），**(ii) 有限差分法**（微分を差分商に置き換える），**(iii) discount 消滅法**（０階の項を加える）がある．これらの近似問題では，周期解は一意的になる（(HJ) の場合，(i),(ii) では定数の不定性が残るが，(iii) では真に一意となる）．一意的な近似周期解から成る集合は点列コンパクト性を持つので，その収束部分列の極限によって (B) および (HJ) の周期解を１つ得ることができる．**「一意的な近似周期解は全列で収束するか？収束するならばその極限は非可算無限個ある周期解のどれになるか？」**という問題が近年盛んに研究されている．この問題を**選択問題**とよぶ．(i)-(iii) の収束性を Cauchy 列の議論によって直接調べることは極めて困難なため，現時点では，選択問題の解明には弱 KAM 理論による偏微分方程

*慶應義塾大学 理工学部 数理科学科 (soga@math.keio.ac.jp).

式と力学系の相互補完的な解析が必須となる．そこでは，(B) および (HJ) の近似方程式に対応する “力学系” を考え，その “力学系” が (B) および (HJ) に対応する Hamilton/Lagrange 力学系に漸近する様子を調べることがポイントとなる．“力学系” は，(i) ではある確率微分方程式，(ii) では時空間非一様ランダムウォーク，(iii) では摩擦項付きの Hamilton/Lagrange 力学系となる．選択問題は，(i) については [1],[2],[4] で部分的に，(ii) については [9] で部分的に, (iii) については [3],[5] で完全に解明されている．(i)-(iii) で選択される弱解は，一般に異なるという事実は興味深い．

[7] は有限差分法に対する力学系的アプローチを与える．これを用いて，[8] は有限差分法による弱 KAM 理論の近似理論を与える．これを基に，[9] は有限差分法に対する選択問題を部分的に明らかにする．[10] は [7]-[9] の結果を一般の空間次元へ拡張する基礎を与える．[6] は discount 近似に対する選択問題における誤差評価を部分的に与える．

(B) および (HJ) の選択問題の議論は，解の一意性が成り立たない状況において，解を構成する方法の収束性をより強い形で保証すると同時に極限の性質を構成方法ごとに明らかにする．これは，偏微分方程式論におけるコンパクト性に基づく解の構成的存在証明をより具体的なものに発展させる第一歩の成果と見ることもできる．

本講演では，選択問題の概要を解説した後，講演者の得た結果 [6],[7],[8],[9],[10] を紹介した．本稿では，選択問題の解析をする際に最も基本となる事実についてまとめる．

2 選択問題

歴史的な経緯に沿って，エントロピー解・粘性解の選択問題の内容について述べる．以下で考える関数 H は,

(H1) $H(x,p):\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, C^2,
(H2) H_{pp} は正定値,
(H3) $\displaystyle\lim_{|p|\to+\infty}\frac{H(x,p)}{|p|}=+\infty$

を満たすものとする（簡単のため，H が時間依存する場合は扱わないことにする）．このような H は解析力学において自然に現れる．定ベクトル $c\in\mathbb{R}^n$ と定数 $h\in\mathbb{R}$ に対して，定常 Hamilton-Jacobi 方程式

(2.1) $$H(x,c+v_x(x))=h\qquad \text{in } \mathbb{T}^n$$

を考える．この問題が C^2 級で解けることと，H が生成する Hamilton 力学系に $\mathbb{T}^n$ と微分同相な C^1 級の Lagrange 不変多様体が１つ存在することは同等である．Kolmogorov-Arnold-Moser による古典 KAM 理論の主結果は，偏微分方程式の言葉で言い換えるならば，特別なクラスの H に対して (2.1) の C^2 級解を保証することである．古典 KAM 理論とは全く別の動機から，Lions-Papanicolaou-Varadhan は (2.1) を粘性解

のクラスで解析した．(H1)-(H3) の下で粘性解の直感的な特徴付けを簡単に述べると「Lipschitz 連続な関数で方程式をほとんど至る所の x で満たしかつ 2階微分に相当するある量が上に有界（下には非有界でも良い)」となる．

Theorem 2.1 (Lions-Papanicolaou-Varadhan (‘88))**.** 各 $c \in \mathbb{R}^n$ に対して定数 $h(c)$ がただ１つ存在して，$h = h(c)$ のときに限り (2.1) は粘性解を有する．

既に述べたように，一般にこの粘性解は定数差を除いても非可算無限個存在し得る．以後，$h = h(c)$ を常に仮定する．Theorem 2.1 は，discount 項と呼ばれる０階の項を付した方程式

$$\varepsilon w^\varepsilon + H(x, c + w^\varepsilon_x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n \ (\varepsilon > 0 \text{ は定数})$$

の解 w^ε（最大値原理により一意となる）の $\varepsilon \to 0$ に対する極限を通して証明される．すなわち，定数 $h(c)$ と関数 v があって，

$$-\varepsilon w^\varepsilon \to h(c), \quad w^\varepsilon - \min_{\mathbb{T}^n} w^\varepsilon \to v \quad as \quad \varepsilon \to 0 \quad (\text{一般に部分列})$$

が成り立ち，定数 $h(c)$ と関数 v は (2.1) を粘性解の意味で満たす．ここで $v^\varepsilon := w^\varepsilon + h(c)/\varepsilon$ とおくと，v^ε は

$$\varepsilon v^\varepsilon + H(x, c + v^\varepsilon_x) = h(c) \qquad \text{in } \mathbb{T}^n \tag{2.2}$$

の一意的粘性解となる．関数の族 $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は一様有界かつ同等 Lipschitz 連続になることが証明される．したがって，集積点が少なくとも１つ存在して，それは (2.1) の粘性解となる．次の問題を「discount 消滅法における選択問題」という．

選択問題１． $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $\varepsilon \to 0$ で全列収束するか？するならばその極限はどのように特徴付けられるか？

これとは別の選択問題が粘性消滅法において定式化できる．時間依存する空間１次元問題については，[4], [2] で最初に解析された．ここでは，時間によらない高次元問題について述べる．Gomes は次のことを示した．

Theorem 2.2 (Gomes ‘02)**.** $\nu > 0$ を固定する．各 $c \in \mathbb{R}^n$ に対して定数 $h^\nu(c)$ がただ１つ存在して，

$$H(x, c + v^\nu_x) = h^\nu(c) + \nu \Delta v^\nu \qquad in\ \mathbb{T}^n \tag{2.3}$$

は C^2 解 v^ν を持つ．定数差を除いて v^ν は一意的である．

この定理の証明は Theorem 2.1 の証明と同じように行われる．すなわち，各 $\varepsilon > 0$ に対して

$$\varepsilon w^{\nu,\varepsilon} + H(x, c + w^{\nu,\varepsilon}_x) = \nu \Delta w^{\nu,\varepsilon} \qquad \text{in } \mathbb{T}^n,$$

の解 $w^{\nu,\varepsilon}$ を考え，その $\varepsilon \to 0$ の極限を通して $h^\nu(c)$ と v^ν を構成する．$h^\nu(c)$ は ν によらず有界になること，$\{v^\nu\}_{\nu>0}$ は同等 Lipshitz 連続になることが証明できる．必

要ならば各 v^ν に適当な定数を加えることで，$\{v^\nu\}_{\nu>0}$ を一様有界にする．以後常にこれを仮定する．粘性解の標準的な議論により，$\{v^\nu\}_{\nu>0}$ の集積点は (2.1) の粘性解になることが示される．次の問題を「粘性消滅法における選択問題」という．

選択問題 2．$\{v^\nu\}_{\nu>0}$ は $\nu\to 0$ で全列収束するか？するならばその極限はどのように特徴付けられるか？

上記 2 つの選択問題とは別の選択問題が有限差分法において定式化できる．講演者はこれに必要となる道具・概念の整理から始め，離散 Hamilton-Jacobi 方程式の周期解の存在について明らかにした．文献 [7], [8] では，時間依存する空間 1 次元問題を明らかにした．これを高次元問題に拡張する議論が [10] と準備中の原稿にある．以下では，時間依存しない n 次元問題について述べるが，証明が進行中の部分もある．$\Delta x=(2N)^{-1}$, $\Delta t=(2K)^{-1}$ $(N,K\in\mathbb{N})$ を空間時間差分幅とする．$\mathbb{R}^n$ 内の幅 Δx の格子点集合を次のように 2 つに分ける: $G_{even}:=\{m\Delta x\,|\,m=(m^1,\dots,m^n)\in\mathbb{Z}^n, m^1+\cdots+m^n=even\}, G_{odd}:=\{m\Delta x\,|\,m\in\mathbb{Z}^n, m^1+\cdots+m^n=odd\}$．$t_k:=k\Delta t$, $k\in\mathbb{Z}$ とおく．さらに $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 内の幅 $\Delta x,\Delta t$ の格子点集合を 2 つに分ける:

$$\mathcal{G}:=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big\{(G_{even}\times\{t_{2k}\})\cup(G^d_{odd}\times\{t_{2k+1}\})\Big\},$$
$$\tilde{\mathcal{G}}:=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big\{(G_{odd}\times\{t_{2k}\})\cup(G_{even}\times\{t_{2k+1}\})\Big\}.$$

$\mathcal{G}$ の点を一般に表す記号として $(x_m,t_k),(x_{m+\mathbf{1}},t_{k+1})$ を，$\tilde{\mathcal{G}}$ の点を一般に表す記号として $(x_{m+\mathbf{1}},t_k),(x_m,t_{k+1})$, $\mathbf{1}:=(1,0,\dots,0)\in\mathbb{Z}^n$ を用いる．$\{e_1,\dots,e_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．$B:=\{\pm e_1,\dots,\pm e_n\}$ とする．$v=v^k_{m+\mathbf{1}}$ を関数: $\tilde{\mathcal{G}}\ni(x_{m+\mathbf{1}},t_k)\mapsto v^k_{m+\mathbf{1}}\in\mathbb{R}$ とする． v の離散空間微分を次のように定義する:

$$(D_{x^j}v)^k_m:=\frac{v^k_{m+e_j}-v^k_{m-e_j}}{2\Delta x},\quad (D_xv)^k_m:=\big((D_{x^1}v)^k_m,\dots,(D_{x^n}v)^k_m\big).$$

v の離散時間微分を次のように定義する:

$$(D_tv)^{k+1}_m:=\left(v^{k+1}_m-\frac{1}{2n}\sum_{\omega\in B}v^k_{m+\omega}\right)\frac{1}{\Delta t}.$$

次の周期境界条件付き離散 Hamilton-Jacobi 方程式を考える:

$$(2.4)\quad\begin{cases}(D_tv)^{k+1}_m+H(x_m,c+(D_xv)^k_m)=h\quad\text{in }\tilde{\mathcal{G}}\cap([0,1)^n\times[0,\infty)),\\ v^{k+1}_{m+2Ne_j}=v^{k+1}_m,\\ v^0_{m+\mathbf{1}}\quad\text{is given on }G_{odd}\cap[0,1)^n\text{ with periodicity.}\end{cases}$$

(2.4) に関して次のことが成り立つ (はずである):

Theorem 2.3. $\lambda:=\Delta t/\Delta x$ を適当に取る．各 c に対して定数 $h_\Delta(c)$ がただ 1 つ存在して，$h=h_\Delta(c)$ の時に限り，(2.4) の差分方程式は $\bar v^{k+2K}_{m+\mathbf{1}}=\bar v^k_{m+\mathbf{1}}$ となる解を有する．このような $\bar v^k_{m+\mathbf{1}}$ は定数差を除いて一意的であり，(2.4) の解は, 初期値によらず，$v^k_{m+\mathbf{1}}-\bar v^k_{m+\mathbf{1}}\to 0$ *as* $k\to\infty$ を満たす.

H は t に依存しないので，$\bar{v}^k_{m+\mathbf{1}} = \bar{v}^{k+2}_{m+\mathbf{1}}$ が成り立つ．この意味で $\bar{v}^k_{m+\mathbf{1}}$ は定常解である．$\bar{v}^k_{m+\mathbf{1}}$ の空間時間に関する補間を v_Δ，$(D_{x^j}v)^k_m$ の空間時間に関する補間を u^j_Δ とする．$\lambda = \Delta t/\Delta x$ を一定に保ちながら $\Delta x \to 0$ とすることを $\Delta \to 0$ で表す．必要ならば v_Δ に定数を加えて $\{v_\Delta\}$ を一様有界にする．このとき，v_Δ の部分列があって (2.1) のある解 v に一様収束し，この部分列に対して u^j_Δ は v_{x_j} に a.e. で各点収束することが証明される．次の問題を「有限差分法における選択問題」という．

選択問題３．$\{v_\Delta\}$ は $\Delta t/\Delta x \equiv \lambda$, $\Delta = (\Delta x, \Delta t) \to 0$ で全列収束するか？するならばその極限はどのように特徴付けられるか？

3　力学系を用いた解析法

すでに述べたように，選択問題の解明には関数列のコンパクト性よりも詳しい解析が必要となる．Fathi は，Lions-Papanicolaou-Varadhan の結果を古典 KAM 理論の観点から見直し，(2.1) の粘性解と H, L が生成する Hamilton 力学系, Lagrange 力学系の関連を明らかにした．この理論を Fathi の弱 KAM 理論という．弱 KAM 理論およびそのアナロジーは選択問題を解析する基本的な道具となる．以下，その一部を紹介する．

(2.1) の粘性解 v は, 任意の $x \in \mathbb{T}^n$ と $T > 0$ に対して

$$v(x) = \inf_{\gamma\in AC,\gamma(0)=x} \left\{ \int_{-T}^{0} (L(\gamma(s), \gamma'(s)) - c\cdot\gamma'(s) + h(c))ds + v(\gamma(-T)) \right\},$$

を満たす．ただし，L は H の p に関する Legendre 変換, AC は絶対連続関数: $[-T, 0] \to \mathbb{T}^n$ 全体を表す．Tonelli の変分法によって，minimizer γ^* の存在がわかり，γ^* は L が生成する Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{ds}\left(L_\xi(x(s), x'(s))\right) = L_x(x(s), x'(s)).$$

の C^2 解となることが示される．さらに，v は Lipschitz 連続であるが，$\gamma^*(s)$ $(s < 0)$ 上で v は微分可能であり，

$$v_x(\gamma^*(s)) = L_\xi(\gamma^*(s), \gamma^{*\prime}(s)) - c \tag{3.1}$$

となることが示される．したがって，Legendre 変換によって，$(x(s), p(s)) := (\gamma^*(s), c+v_x(\gamma^*(s)))$ は Hamilton の正準方程式

$$\begin{cases} x'(s) = H_p(x(s), p(s)), \\ p'(s) = -H_x(x(s), p(s)). \end{cases}$$

の C^1 解になることが従う．γ^* は Euler-Lagrange 方程式の解として $(-\infty, 0]$ に延長可能であり，(3.1) が $s < 0$ で成り立つ．γ^* は $\mathbb{T}^n$ 上の曲線なので，$\{\gamma^*(s)\}_{s<0}$ の集

積点が見つかる．この集積点は，(2.1) と Lagrange/Hamilton 力学系の情報を豊富に含んでいる．弱 KAM 理論はこの事実を細部まで明らかにする．

(2.2) に対しても同様の方法がある．(2.2) の解 v^ε は，任意の $x \in \mathbb{T}^n$ と $T>0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
v^\varepsilon(x) \quad = \quad & \inf_{\gamma\in AC, \gamma(0)=x} \Big\{ \int_{-T}^{0} e^{\varepsilon s}(L(\gamma(s),\gamma'(s)) - c\cdot\gamma'(s) + h(c))ds \\
& + e^{-\varepsilon T} v^\varepsilon(\gamma(-T)) \Big\}.
\end{aligned}
$$

を満たす．Tonelli の変分法によって，minimizer γ^ε の存在が示され，これは

$$
\frac{d}{ds}\left(L_\xi(x(s),x'(s))\right) = L_x(x(s),x'(s)) - \varepsilon L_\xi(x(s),x'(s)) + \varepsilon c. \tag{3.2}
$$

の C^2 解となる．(3.2) は摩擦付きの Lagrange 力学系となる．さらに，v^ε は Lipschitz 連続であるが，$\gamma^\varepsilon(s)$ $(s<0)$ 上で v^ε は微分可能であり，

$$
v_x^\varepsilon(\gamma^\varepsilon(s)) = L_\xi(\gamma^\varepsilon(s), \gamma^{\varepsilon\prime}(s)) - c \tag{3.3}
$$

となることが示される．$(x(s),p(s)) := (\gamma^\varepsilon(s), L_\xi(\gamma^\varepsilon(s),\gamma^{\varepsilon\prime}(s)))$ とおくと，これは摩擦付きの Hamilton の正準方程式

$$
\begin{cases}
x'(s) = H_p(x(s),p(s)), \\
p'(s) = -H_x(x(s),p(s)) + \varepsilon c - \varepsilon p(s).
\end{cases} \tag{3.4}
$$

の C^1 解になることが従う．γ^ε は (3.2) の解として $(-\infty,0]$ に延長可能であり，(3.3) が $s<0$ で成り立つ．γ^ε は $\mathbb{T}^n$ 上の曲線なので，$\{\gamma^\varepsilon(s)\}_{s<0}$ の集積点が見つかる．また，ある $\varepsilon\to 0$ に対して v^ε が (2.1) のある解 v に収束するならば，γ^ε は v の minimizer γ^* に広義一様収束する．以上の事実は，選択問題 1 を解析する際の基本的な道具となる．

(2.3) は楕円型方程式なので，議論はより複雑になる．$B(s)$ を $\mathbb{T}^n$ 上の Brown 運動とする．C^1 関数 $\xi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して確率微分方程式

$$
d\gamma(s) = \xi(\gamma(s))ds - \sqrt{2\nu}dB(-s) \quad (s\le 0), \quad \gamma(0)=x \tag{3.5}
$$

の解 γ を考える．(2.3) の解 v^ν は，任意の $x\in\mathbb{T}^n$ と $T>0$ に対して，

$$
v^\nu(x) = \inf_{\xi\in C^1} E\left[\int_{-T}^{0} L(\gamma(s),s,\xi(\gamma(s))) - c\cdot\xi(\gamma(s)) + h^\nu(c)ds + v^\nu(\gamma(-T))\right]
$$

を満たす．ここで E は Wiener 測度に関する平均を表す．minimizer $\xi^*\in C^1$ が存在して，$\xi^*(x) = H_p(x, c+v_x^\nu(x))$ が成り立つ．$(3.5)|_{\xi=\xi^*}$ の解を γ^ν と表す．ある $\nu\to 0$ に対して v^ν が (2.1) のある解 v に収束するならば，γ^ν は v の minimizer γ^* に広義一様に確率収束する (大数の法則)．[2], [1] では，以上の事実を用いて選択問題 2 が解析される．

(2.4) に対応する “力学系” は非一様ランダムウォークとなる．これを最初に議論した結果が [7] である．各 $(x_{\tilde{n}}, t_{l+1}) \in \tilde{\mathcal{G}}$ に対して，時刻 t_{l+1} に点 $x_{\tilde{n}}$ を出発し，Δt 毎に $\omega\Delta x$, $\omega \in B$ だけ動く時間後ろ向きランダムウォーク γ を考える:

$$\gamma = \{\gamma^k\}_{k=l',\cdots,l+1}, \quad \gamma^{l+1} = x_{\tilde{n}}, \quad \gamma^k = \gamma^{k+1} + \omega\Delta x.$$

次元 n と格子点の添字 $\tilde{n}$ の区別に注意する．より詳しくは，点 $(x_{\tilde{n}}, t_{l+1}) \in \tilde{\mathcal{G}}$ と $l' \le l$ に対して，

$X_{\tilde{n}}^{l+1,k} := \{x_{m+\mathbf{1}} \mid (x_{m+\mathbf{1}}, t_k) \in \tilde{\mathcal{G}}, \max_{1\le j\le n} |x^j_{m^j+\mathbf{1}^j} - x^j_{\tilde{n}^j}| \le (l+1-k)\Delta x\}$
(時刻 t_k で到達しうる点の集合),
$G_{\tilde{n}}^{l+1,l'} := \displaystyle\bigcup_{l'\le k\le l+1} \big(X_{\tilde{n}}^{l+1,k} \times \{t_k\}\big) \subset \tilde{\mathcal{G}},$
$\xi : G_{\tilde{n}}^{l+1,l'+1} \ni (x_m, t_{k+1}) \mapsto \xi_m^{k+1} \in [-(n\lambda)^{-1}, (n\lambda)^{-1}]^n, \quad \lambda := \Delta t/\Delta x,$
$\rho : G_{\tilde{n}}^{l+1,l'+1} \times B \ni (x_m, t_{k+1}; \omega) \mapsto \rho_m^{k+1}(\omega) := \Big\{\dfrac{1}{2n} - \dfrac{\lambda}{2}(\omega\cdot\xi_m^{k+1})\Big\} \in [0,1],$
$\gamma : \{l', l'+1, \dots, l+1\} \ni k \mapsto \gamma^k \in X_{\tilde{n}}^{l+1,k},\ \gamma^{l+1} = x_{\tilde{n}},\ \gamma^k = \gamma^{k+1} + \omega\Delta x,\ \omega \in B,$
$\Omega_{\tilde{n}}^{l+1,l'}$：上記の γ 全体.

$\rho_m^{k+1}(\omega)$, $\omega \in B$ は，点 (x_m, t_{k+1}) から点 $(x_m + \omega\Delta x, t_k)$ に遷移する遷移確率とみなせる．実際，

$$\sum_{\omega\in B} \rho_m^{k+1}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} (\rho_m^{k+1}(e_i) + \rho_m^{k+1}(-e_i)) = 1.$$

このランダムウォークは，格子上の関数 ξ の与え方によって，動きを制御することができる．各経路 $\gamma \in \Omega_{\tilde{n}}^{l+1,l'}$ の密度を

$$\mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\gamma) := \prod_{l'\le k\le l} \rho^{k+1}_{m(\gamma^{k+1})}(\omega^{k+1})$$

と定義する．ただし $\omega^{k+1} := (\gamma^k - \gamma^{k+1})/\Delta x$ である．各 ξ に対して，重み関数 $\mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\cdot) = \mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\cdot;\xi)$ は $\Omega_{\tilde{n}}^{l+1,l'}$ の確率測度を与える:

$$prob(A) = \sum_{\gamma\in A} \mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\gamma;\xi) \quad \text{for } A \subset \Omega_{\tilde{n}}^{l+1,l'}.$$

この確率測度による平均を $E_{\mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\cdot;\xi)}[\cdot]$ で表す．すなわち，確率変数 $f : \Omega_{\tilde{n}}^{l+1,l'} \to \mathbb{R}$ に対して，

$$E_{\mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\cdot;\xi)}[f(\gamma)] := \sum_{\gamma\in\Omega_{\tilde{n}}^{l+1,l'}} \mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\gamma;\xi) f(\gamma).$$

格子点 $x_{\tilde{n}}$ に対して $m(x_{\tilde{n}}) := \tilde{n}$ と定める．$\bar{v}^k_{m+\mathbf{1}}$ は任意の $\tilde{n}$, l, l' に対して，

$$\bar{v}_{\tilde{n}}^{l+1} = \inf_{\xi} E_{\mu_{\tilde{n}}^{l+1,l'}(\cdot;\xi)}\Big[\sum_{l'<k\le l+1} (L(\gamma^k, t_{k-1}, \xi^k_{m(\gamma^k)}) - c\cdot\xi^k_{m(\gamma^k)} + h_\Delta(c))\Delta t + \bar{v}^{l'}_{m(\gamma^{l'})}\Big]$$

が成り立つ．minimizer ξ^* が存在して，$\xi^{*k+1}_m = H_p(x_m, t_k, c + (D_x\bar{v})^k_m)$ が成り立つ．ある $\Delta \to 0$ に対して v_Δ が (2.1) のある解 v に収束するならば，ξ^* が生成するランダムウォークの連続補間 γ_Δ は v の minimizer γ^* に広義一様確率収束する．以上の事実は，有限差分法の議論に力学系の方法を使うことを可能にするだけでなく，有限差分法そのものの安定性・収束性を保証する重要なアプリオリ評価も与える (特に変分構造によって).

4 選択問題の例

最も簡単な選択問題の例について述べる．$H(x,p) = \frac{1}{2}p^2 - F(x) : \mathbb{R}\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ を考える．ただし，$F \geq 0$, $F(x_1) = F(x_2) = 0$ $(0 \leq x_1 < x_2 < 1)$, $0 < F''(x_1) < F''(x_2)$ を仮定する．$S_\pm$ を $\pm F'$ のグラフ，$c_\pm := \pm\int_0^1 F'(x)dx$ とする．各 $c \in (c_-, c_+)$ に対して，(2.1) の解 v は次のことを満たす: $c + v_x$ のグラフは $S_\pm$ の部分からなり，不連続性は常に S_+ から S_- への jump down のみであり，$\int_0^1 c + v_x(x)dx = c$ となる．逆にこの性質を満たす関数 v は (2.1) の解となる．

以下 $c = 0$ の場合を考察する．v_x のグラフとして，不連続性が 1 つの場合と 2 つの場合があり得る． 2 つの場合は，v の 2 つの不連続点をそれぞれ左右に移動させて $\int_0^1 \tilde{v}_x(x)dx = 0$ を満たすような関数 $\tilde{v}$ が非可算無限個得られる．これらの $\tilde{v}$ は全て $(2.1)|_{c=0}$ の解となる．これは (2.1) の解の定数差以上の非可算無限の多重性である．このような状況において，discount 近似解・粘性近似解・差分近似解はそれぞれ (定数差を除いて) 一意的に存在する．近似の極限において，

- discount 近似解: $v^*(x_1) = v^*(x_2) = 0$ となる v^* に全列収束する．このような v^* は一意的である．また v^*_x のグラフは 2 つの不連続性を有する．
- 粘性近似解: v^{**} に定数差を除いて全列収束する．ただし v^{**}_x のグラフは 1 つの不連続性を有しかつ x_1 において S_- から S_+ に乗り替わる．このような v^{**} は定数差を除いて一意的である．
- 差分近似解: 上記 v^{**} に定数差を除いて全列収束する．

文献

[1] N. Anantharaman, R. Iturriaga, P. Padilla and H. Sanchez-Morgado, Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **5** (2005), No. 3, 513-528.

[2] U. Bessi, Aubry-Mather theory and Hamilton-Jacobi equations, Comm. Math. Phys. **235** (2003), 495-511.

[3] A. Davini, A. Fathi, R. Iturriaga and M. Zavidovique, Convergence of the solutions of the discounted equation, Invent. Math. **206** (2016), No. 1, 29-55.

[4] H. R. Jauslin, H. O. Kreiss and J. Moser, On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions, Proc. Symp. Pure Math. **65** (1999), 133-153.

[5] H. Mitake and H. V. Tran, Selection problems for a discounted degenerate viscous Hamilton-Jacobi equation, Adv. Math. **306** (2017), 684-703.

[6] H. Mitake and K. Soga, Weak KAM theory for discounted Hamilton-Jacobi equations and its application, submitted.

[7] K. Soga, Stochastic and variational approach to the Lax-Friedrichs scheme, Math. Comp. **84** (2015), no. 292, 629-651.

[8] K. Soga, More on stochastic and variational approach to the Lax-Friedrichs scheme, Math. Comp. **85** (2016), no. 301, 2161-2193.

[9] K. Soga, Selection problems of $\mathbf{Z}^2$-periodic entropy solutions and viscosity solutions, Calc. Var. PDEs **56** (2017), no. 4, Article 119, 30 pp.

[10] K. Soga, Stochastic and variational approach to finite difference approximation of Hamilton-Jacobi equations, submitted.