感染症モデルにおける解の安定性や進行波解について

江夏　洋一　(東京理科大学)*

1. はじめに

近年，生物の移動や新たな生息領域への侵入を表すモデルにおいて，自由境界を伴った問題が考えられるようになってきている（e.g. Du & Lin [1]）．特に，感染症モデルにおいては，Kim et al. [4] が自由境界をもつ SIR 感染症モデルを考察し，感染症が流行していない領域への感染症の広がりについて調べている．自由境界をもたない拡散型の感染症モデルについては，Hosono & Ilyas [2] や Kaellen [3] が，一定速度で感染症が伝播する様子を表す進行波解の存在・非存在を示している．本講演では，自由境界をもつ拡散型SI感染症モデルについて，semi wave と呼ばれる同じ速度と形状で伝播する解の存在と非存在を示す．数値実験によって，semi wave が存在する場合および存在しない場合で，感染領域が空間無限遠に拡大するかどうか等についても考察する．本研究は東京理科大学の石渡恵美子氏と牛島健夫氏との共同研究に基づく．

2. 主結果

本講演では，SI感染症モデルに対する次の自由境界問題を考える．

$$\begin{cases} S_t = dS_{xx} - SI, & x \in \mathbb{R}, \\ I_t = I_{xx} + SI - \gamma I, & x \in (-\infty, h(t)], \\ S(x,0) = S_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ I(x,0) = I_0(x), & x \in (-\infty, h(0)], \\ I(h(t),t) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu I_x(h(t),t),\ h(0) = h_0, & t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，S は感受性個体の数，I は感染個体の数を表し，γ, μ, h_0 は正のパラメータとする．d は S の拡散係数であり，$h(t)$ は時刻 t における感染個体の移動境界を表す．また，$S_0 \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $I_0 \in C^2([0, h_0])$ とする．ただし，$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ である．

本講演の目的は，(1) 式において $d = 0$ とした場合に，$S(x,t) = g(x - ct), I(x,t) = f(x - ct)$ の形の解，すなわち，$a > 0$ をパラメータとする以下の問題：

$$\begin{cases} g' = \frac{fg}{c}, & -\infty < x < 0, \\ f'' + cf' + fg - \gamma f = 0, & -\infty < x < 0, \\ g(-\infty) = a,\ a \in (0,1),\ g(0) = 1, \\ f(-\infty) = f'(-\infty) = 0,\ f(0) = 0,\ f'(0) = -\frac{c}{\mu} \end{cases} \tag{2}$$

を満たすような (f, g, c) の存在・非存在を考えることである．このとき，$S(x,t), I(x,t)$ は semi wave と呼ばれ，時刻 t を固定するごとに半空間 $\{x \mid x \leq ct\}$ 上で定義される進行波解である．主結果は次の2つの命題である．

* 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　東京理科大学理学部第一部応用数学科
e-mail: yenatsu@rs.tus.ac.jp

命題 2.1 (Semi wave の非存在) $d = 0$ とする．任意の $\gamma \in (0,1)$ に対してある $a^*(\gamma) \in (0,\gamma)$ が存在し，任意の $a \in [a^*(\gamma),\gamma)$ と $\mu > 0$ に対して，(2) を満たす非負の f, g, c は存在しない．このとき，$a - 1 + \frac{\gamma}{2}(\log a)^2 - a\log a = 0$ かつ $a < 1$ を満たすただ一つの解を $\overline{a}(\gamma)$ とおくと，$a^*(\gamma) \leq \overline{a}(\gamma)$ である．

命題 2.2 (Semi wave の存在) $d = 0$ とする．任意の $\gamma \in (0,1)$ に対して，ある $a_*(\gamma)$ が存在し，任意の $a \in (\underline{a}(\gamma), a_*(\gamma))$ に対して，$\mu = \frac{1}{1-a+\gamma\log a}$ のときに，(2) を満たす非負の f, g, c が存在し，$c < 2\sqrt{\gamma - a'(\gamma)}$ を満たす．ここで，$\underline{a}(\gamma) < 1$ および $a'(\gamma) \geq a$ はそれぞれ $\underline{a}(\gamma) - \gamma\log\underline{a}(\gamma) = 1$ および $a - \gamma\log a = a'(\gamma) - \gamma\log a$ を満たすただ一つの解である．

$d = 0$ の場合の数値計算例を以下に図示する（図 1）．横軸は x を表す．$d = 0$ および $d > 0$ の場合に，パラメータ γ と μ の値に応じた semi wave の存在・非存在および感染症の流行伝播の変化に関する数値計算結果については，講演中に述べる．

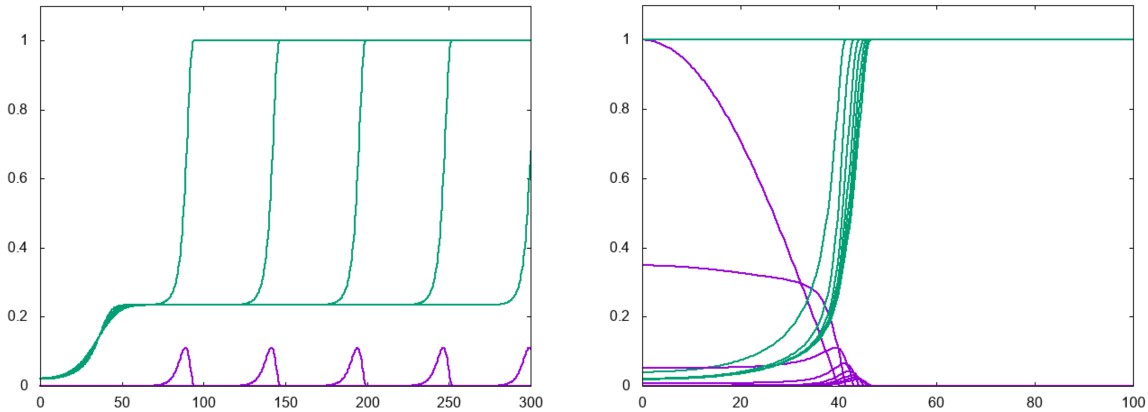

図 1: $\gamma = 0.5, d = 0$ のときの (1) の解の時間発展の様子（左：spreading，右：vanishing）．

また，感染個体が免疫を持つことなく感受性となり流行を繰り返す仮定を考慮した SIS モデルと呼ばれる感染症モデルの平衡解の大域安定性について，Paulhus, Wang (2015) が得た非感染平衡解の安定性条件と組み合わせることで，基本再生産数 R_0 のみで系の大域挙動が決定されることを示した．感染個体が感染症を克服して再感染するような cyclic 構造をもつ感染症モデルでの平衡解の大域安定性に関する完全解析は，遅延微分方程式系においては初の成果であり，関連話題として紹介したい．本研究は東京理科大学の伏見啓氏と石渡恵美子氏との共同研究 [5] に基づく．

参考文献

[1] Y. Du and Z. Lin, Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries, J. Eur. Math. Soc. **17**, 2673–2724 (2010).

[2] Y. Hosono and B. Ilyas, Traveling waves for a simple diffusive epidemilc model, Math. Models Meth. Appl. Sci. **5**, 935–966 (1995).

[3] A, Kaellen, Thresholds and travelling waves in an epidemic model for rabies, Nonlinear Anal. TMA **8**, 851–856 (1984).

[4] K. I. Kim, Z. Lin and Q. Zhang, An SIR epidemic model with free boundary, Nonl. Anal. Real Wold Appl., **14**, 1992–2001 (2013).

[5] K. Fushimi, Y. Enatsu and E. Ishiwata, Global stability of an SIS epidemic model with delays, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **41**, 5345–5354 (2018).