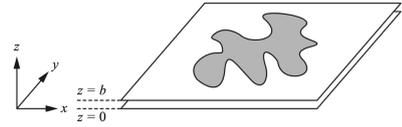


様々な Hele-Shaw 型問題に対する基本解近似解法による 構造保存型数値解法

榊原 航也

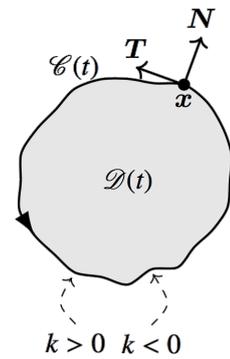
京都大学 大学院理学研究科 & 理化学研究所 数理創造プログラム (iTHEMS)

Hele-Shaw 問題とは, [2] に始まる, 準 2 次元空間における粘性流体の運動を記述するものであり, Saffman-Taylor 不安定性のメカニズムを解明するための, 最もシンプルな数理モデルとして, 今までに様々な研究がなされてきた (右図参照). その中でも, 古典的 Hele-Shaw 問題は, 次で記述される [3, 1] :



$$\begin{cases} \Delta p(\cdot, t) = 0 & \text{in } \mathcal{D}(t), t \in (0, T), \\ p(\cdot, t) = \gamma k(\cdot, t) & \text{on } \mathcal{C}(t), t \in (0, T), \\ V(\cdot, t) = -\nabla p(\cdot, t) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) & \text{on } \mathcal{C}(t), t \in (0, T). \end{cases}$$

ここで, $\mathcal{D}(t) \subset \mathbb{R}^2$ は流体が占める有界領域, $\mathcal{C}(t)$ は $\mathcal{D}(t)$ の境界, $p(\cdot, t)$ は $\mathcal{D}(t)$ 内の圧力, γ は表面張力係数, $k(\mathbf{x}, t)$ は $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(t)$ における $\mathcal{C}(t)$ の曲率を表し, $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ は $\mathcal{C}(t)$ の外向き単位法ベクトル, $V(\mathbf{x}, t)$ は $\mathcal{C}(t)$ の法線速度を表す.



古典的 Hele-Shaw 問題は, 次の 3 つの幾何学的変分構造を持つことが知られている: 周長 $\mathcal{L}(t) = |\mathcal{C}(t)|$ は時間について単調減少し (周長減少), 面積 $\mathcal{A}(t) = |\mathcal{D}(t)|$ は変化せず (面積保存), 重心 $\mathcal{G}(t)$ は動かない (重心不変). 従って, 数値計算スキームを構築する際に, これらの性質を, なんらかの意味で離散的に満たすことを要請するのは至って自然である. これは, 今日で言うところの構造保存型数値解法であり, 非常に多くの先行研究が存在する. しかしながら, 既存の研究は, あくまで通常の常微分方程式や偏微分方程式を対象としているものが多く, Hele-Shaw 問題のような移動境界問題に対する構造保存型数値解法の研究はほとんどなされていない.

本講演では, まず, 古典的 Hele-Shaw 問題に対して, 基本解近似解法を用いた構造保存型数値解法について解説する. そのあとに, 他のタイプの Hele-Shaw 問題にも同様のアイデアで構造保存型数値解法を構築できることを確認する. さらに, 流体の問題とは独立して, 時間逆向き曲率流の安定化に Hele-Shaw 問題を応用できることを数値的に確認する.

本講演の内容は, 矢崎成俊氏 (明治大学) との共同研究に基づくものである.

参考文献

- [1] Gustafsson, B.; Vasil'ev, A. Conformal and potential analysis in Hele-Shaw cells. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhäuser Verlag, Basel*, 2006. x+231 pp. ISBN: 978-3-7643-7703-8; 3-7643-7703-8
- [2] Hele-Shaw, H.S. The flow of water. *Nature* **58** (1898), no. 1489, 34–36.
- [3] Lamb, H. Hydrodynamics. Reprint of the 1932 sixth edition. Cambridge Mathematical Library. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1993. xxvi+738 pp. ISBN: 0-521-45868-4.