# Phase field method for mean curvature flow with dynamic boundary condition

高棹 圭介 (京都大学 数学教室/白眉センター)
email: k.takasao@math.kyoto-u.ac.jp

本講演では, 以下の力学的境界条件を持つ Allen-Cahn 方程式の特異極限問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \Delta u^\varepsilon - \dfrac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2}, \ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times (0,\infty), \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0^\varepsilon(x), \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\varepsilon > 0$, $d \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は滑らかな境界 $\Gamma$ を持つ有界領域, $W(s) := (1-s^2)^2/2$, $\nu$ は $\Gamma$ の外向き単位法線ベクトルである. $\varepsilon \downarrow 0$ としたとき, $\Omega$ の内部では (1) の解の特異極限が平均曲率流方程式の弱解になることが知られている (例えば [2] 参照). また, Neumann 境界条件を持つ Allen-Cahn 方程式の解の特異極限が Neumann 境界条件を持つ平均曲率流方程式の Brakke 解に収束することが Mizuno-Tonegawa [3] によって示されている. 本講演では, 適切な仮定の下で (1) の解の特異極限が次の力学的境界条件を持つ平均曲率流方程式の Brakke 解に収束することを示す:

$$\begin{cases} v = h, \ \text{on } M_t, \ t > 0, \\ v_b = \dfrac{1}{\tan\theta} n_b, \ \text{on } M_t \cap \Gamma, \ t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

ここで, $M_t \subset \Omega$ は向き付け可能な超曲面, $v$, $h$ はそれぞれ $M_t$ の法線速度ベクトルと平均曲率ベクトル, $v_b$ と $n_b$ はそれぞれ $\Gamma$ における $\partial M_t$ の法線速度ベクトルと単位法線ベクトル, そして $\theta$ は $M_t$ と $n_b$ のなす角である. $\Omega$ を半平面とし, 中心と $\Omega$ の距離が 1 である円を初期値とする $\mathbb{R}^2$ 内の曲率流を $N_t$ とすると, 円弧 $M_t = N_t \cap \Omega$ は (2) の解になっている [1].

本講演における (2) の弱解を以下で定義する:

**Definition 1** (力学的境界条件付き Brakke の平均曲率流)**.** $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ を, $\overline{\Omega}$ 上の Radon 測度の族とする. $\alpha$ を, $\Gamma \times [0,\infty)$ 上の Radon 測度, $v_b \in (L^2_{loc}(\alpha, \Gamma\times[0,\infty)))^d$ とする. 以下が成り立つとき, $(\{\mu_t\}_{t\geq 0}, \alpha, v_b)$ の 3 つの組を力学的境界条件付き Brakke の平均曲率流とよぶ:

1. 殆ど至る所の $t \geq 0$ に対して, $(d-1)$-次元修正可能集合 $M_t$ と, $M_t$ 上で定義され, $\mathscr{H}^{d-1}$ の意味で可積分な正値関数 $\theta_t$ が存在して, $\mu_t = \theta_t \mathscr{H}^{d-1}\lfloor_{M_t}$ が成り立つ.

2. 任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ と $\nabla\phi \cdot \nu = 0$ on $\Gamma$ を満たす任意の非負関数 $\phi \in C^1_c(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ に対して, 以下の不等式が成り立つ:

$$\int_{\overline{\Omega}} \phi \, d\mu_t \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\overline{\Omega}} \Big( -\phi|h|^2 + \nabla\phi\cdot h + \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big) \, d\mu_t dt - \int_{\Gamma\times(t_1,t_2)} \phi |v_b|^2 \, d\alpha.$$

   ここで $h$ は $\mu_t$ に対する弱い意味での平均曲率ベクトルである.

3. 以下の測度の絶対連続性が成り立つ:

$$\left\| \int_0^\infty \delta V_t \lfloor_\Gamma^\top \, dt + S_{\alpha, v_b} \right\| \ll \mu \quad \text{on } \overline{\Omega}\times[0,\infty).$$

ここで, $d\mu := d\mu_t dt$, $\delta V_t$ は $\mu_t$ から自然に導出される varifold $V_t$ の第 1 変分, $\delta V_t \lfloor_\Gamma^\top (g) := \delta V_t \lfloor_\Gamma (g-(g\cdot\nu)\nu)$ $(g \in (C_c(\overline{\Omega}))^d)$, $\int_0^\infty \delta V_t \lfloor_\Gamma^\top \, dt$ は $g \in (C_c(\overline{\Omega}\times[0,\infty)))^d$ に対して $\int_0^\infty \delta V_t \lfloor_\Gamma^\top (g(\cdot,t))\, dt$ で定義される測度, $S_{\alpha,v_b}(g) := \int_{\Gamma\times[0,\infty)} g\cdot v_b \, d\alpha$ $(g \in (C_c(\overline{\Omega}))^d)$ である.

次に, この弱解に収束する近似列を定義する.

**Definition 2.** $u^\varepsilon$ を (1) の解とし, $\sigma := \int_{-1}^{+1} \sqrt{2W(s)}\, ds$ とする. $\Omega$ 上の Radon 測度 $\mu_t^\varepsilon$, $\Gamma \times [0,\infty)$ 上の測度 $\alpha^\varepsilon$, $\Gamma\times[0,\infty)$ 上のベクトル値関数 $v_b^\varepsilon$ を以下で定義する:

$$d\mu_t^\varepsilon := \frac{1}{\sigma}\Big(\frac{\varepsilon|\nabla u^\varepsilon(\cdot,t)|^2}{2} + \frac{W(u^\varepsilon(\cdot,t))}{\varepsilon}\Big)dx, \quad d\alpha^\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\sigma}|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|^2 d\mathscr{H}^{d-1}\lfloor_\Gamma dt,$$

$$v_b^\varepsilon := \begin{cases} \dfrac{-u_t^\varepsilon}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|}\dfrac{\nabla_\Gamma u^\varepsilon}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} & \text{if } |\nabla_\Gamma u^\varepsilon| \neq 0, \\ (1,0,\ldots,0), & \text{if } |\nabla_\Gamma u^\varepsilon| = 0. \end{cases}$$

我々は (1) の解の特異極限に対して以下の結果を得た.

**Theorem 3** ([1])**.** $\{u_0^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ を, ある定数 $D>0$ が存在して $\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \mu_0^\varepsilon(\Omega) \le D$ が成り立つ関数の族とする. $u^\varepsilon$ を, $u_0^\varepsilon$ を初期値とする (1) の解とし, $\mu_t^\varepsilon$, $\alpha^\varepsilon$, $v_b^\varepsilon$ を, Definition 2 によって定義される測度及び関数とする. さらに, 殆ど至る所の $t \ge 0$ に対して, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left\| \frac{\varepsilon|\nabla u^\varepsilon(\cdot,t)|^2}{2} - \frac{W(u^\varepsilon(\cdot,t))}{\varepsilon}\right\|_{L^1(\Omega)} = 0$ が成り立つと仮定する. このとき, 以下が成り立つ:

1. ある部分列 $\varepsilon' \to 0$ と Radon 測度の族 $\{\mu_t\}_{t\ge 0}$ が存在して, 任意の $t \ge 0$ に対して

$$\int_\Omega \phi \, d\mu_t^{\varepsilon'} \to \int_\Omega \phi\, d\mu_t, \qquad \forall\, \phi \in C_c(\overline{\Omega})$$

   が成り立つ. さらに, Radon 測度 $\alpha$ とベクトル値関数 $v_b$ が存在して

$$\int_{\Gamma\times[0,\infty)} g\cdot v_b^{\varepsilon'}\, d\alpha^{\varepsilon'} \to \int_{\Gamma\times[0,\infty)} g\cdot v_b\, d\alpha, \qquad \forall g \in (C_c(\Gamma\times[0,\infty)))^d$$

   が成り立つ.

2. $(\{\mu_t\}_{t\ge 0}, \alpha, v_b)$ は力学的境界条件付き Brakke の平均曲率流である.

ディィリクレエネルギーとポテンシャルエネルギーの釣り合いに関する仮定は, 殆ど至る所の $t \ge 0$ について $\mathrm{spt}\,\mu_t \cap \Gamma = \emptyset$ であれば外すことが出来る. 本講演内容は，儀我美一氏（東京大学）および尾上文彦氏（東京大学/Scuola Normale Superiore）との共同研究に基づく.

## 参考文献


[1] Giga, Y., Onoue, F. and Takasao, K., *A varifold formulation of mean curvature flow with Dirichlet or dynamic boundary conditions*, arXiv:1810.09107 [math.AP] (2018).

[2] Ilmanen, T., *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (1993), 417–461.

[3] Mizuno, M. and Tonegawa, Y., *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), 1906–1932.