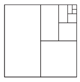
MPM2018 特別実験講座 (2018.11.16)

やさしい実験，ゆたかな数理

矢崎成俊 (明治大学)

等比級数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=1$ はこんな風  に描いても楽しいし，次のような素敵な意味も持っているので「☆お気に入り」である．すなわち，半分失敗しても，次にその半分成功すればよいし，残り半分の失敗は，その次に半分成功して挽回すればよい．こうして最初の 4 項までの和で全体の 93.75%に達する．そして，たった 7 項までの和で 99%を超える．この意味で「七転び八起き」は定量的にも言い得て妙である．さらに，なんと 10 項までの和で 99.9%を超える．つまり，いつも半分しかうまくいかなくても，粘って 10 回つづければ，ほとんど達成できるという算段である．

問 1　第 n 項までの和を $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ とする．本来 $\lim_{n\to\infty} S_n=1$ であるが，倍精度計算で S_n を計算すると有限の n で $S_n\doteqdot 1$ となるか．($\doteqdot$ は倍精度計算における等号．)

解 1　なる．実際，

$$(S_{53})_2=(1.\underbrace{11\cdots1}_{52\text{ 桁}})_2\times 2^{-1}<0.\underbrace{99\cdots9}_{16\text{ 桁}},\quad (S_{54})_2\doteqdot(1.\underbrace{00\cdots0}_{52\text{ 桁}})_2\times 2^{0}=1$$

である．(これ以上，$\frac{1}{2^{55}}$ 以降の項を足しても無駄である．情報落ち．)

数学は無限の果てまでも視野にいれた素敵な学問である．しかし無敵ではない．例えば，漸近挙動の解析は強いが過渡的な表現は苦手である．実際，$S_\infty=1$ はすぐにわかるが，S_{10} の正確な数値を手計算で提示するには時間がかかる．

本講演では，身近な，誰でもできるいくつかの実験を通して，隠された数理，派生する数理，あるいは未解決の数理について紹介したい．比喩的に言えば，誰でもできる簡単な実験は S_4 の値を求めることであり，実験のプロは S_{10} の値を最小限の誤差で提示すること，応用数理の立場は $S_\infty=1$ のモデルから S_{10} を見通すことだろう．本講演には，やさしい実験 S_4 で，プロの実験 S_{10} を感じ取り，$S_\infty=1$ のモデルを解析するという数理的な精神でもって臨みたい．

予定しているトピックスは以下の通りである．(変更の可能性はあります．)

- 0.1 を 100 回足しても 10 にならない理由とその発展版．
- 蜂の巣にみられるような，円から正六角形への変形の自然さと効率の良さについて．
- 平面に円を敷き詰める．未解決問題も含めて．
- 大きなのっぽの古時計は，どれほどの高さであるべきか．微分方程式を使わない考える．
- 風の動きと火の動き．プチ火災旋風．火炎の振動について．