感染症モデルにおける進行波解について

江夏　洋一

東京理科大学理学部第一部応用数学科

Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2018

2018年11月17日(土), 10:15-11:10@B210教室

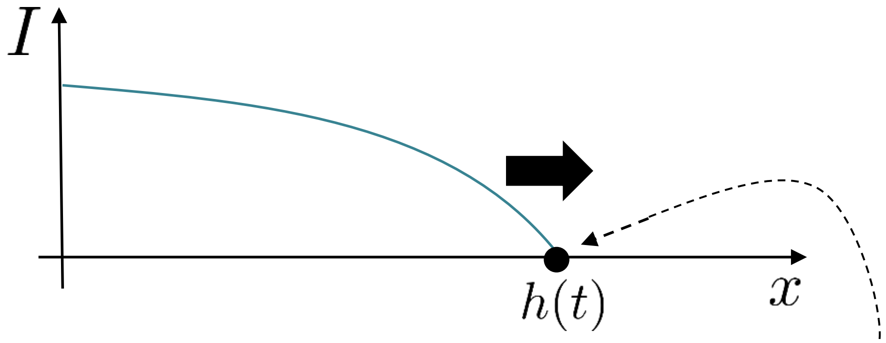
Existence of a traveling wave

$$S(x,t) = g(z),$$
$$I(x,t) = f(z),\ z = x - ct$$

SIR model with a free boundary

$$(\mathrm{FBP}) \begin{cases} S_t = dS_{xx} - SI, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ I_t = I_{xx} + SI - \gamma I, & x < h(t),\ t > 0, \\ S_x(t,0) = I_x(t,0) = 0, & t > 0, \\ 0 = I(h(t),t), & t > 0, \\ h'(t) = -\mu I_x(h(t),t) & t > 0, \\ h(0) = h_0. & \end{cases}$$

Stefan-like condition (cf. Du, Lin [1])

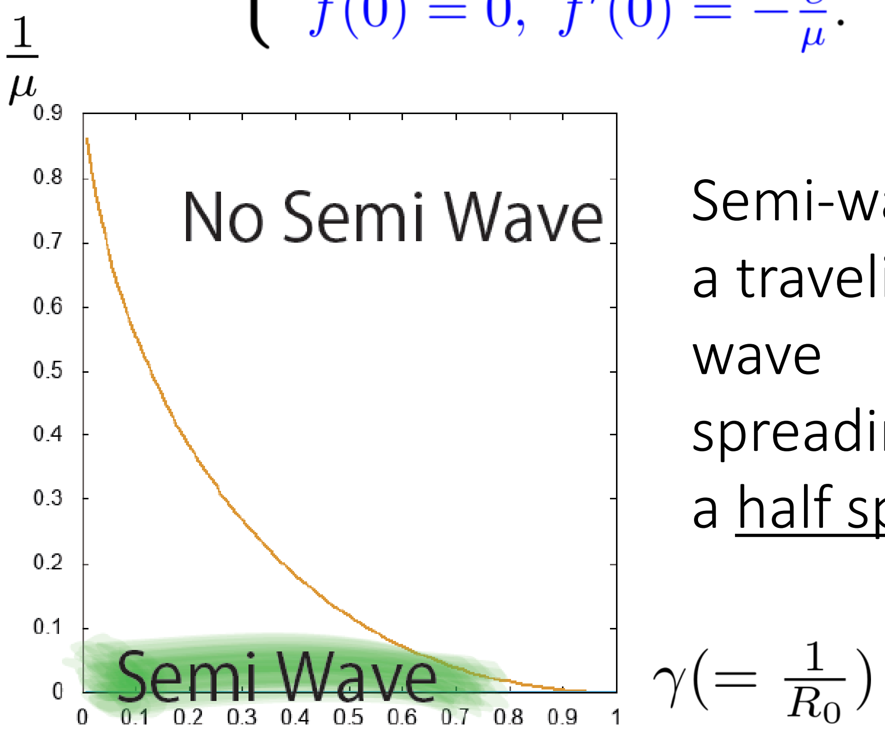


$$h'(t) > 0\ (\because I_x(h(t),t) < 0)$$

[1] Du, Lin, J. Eur. Math. Soc. **17** (2010) 2673-2724.

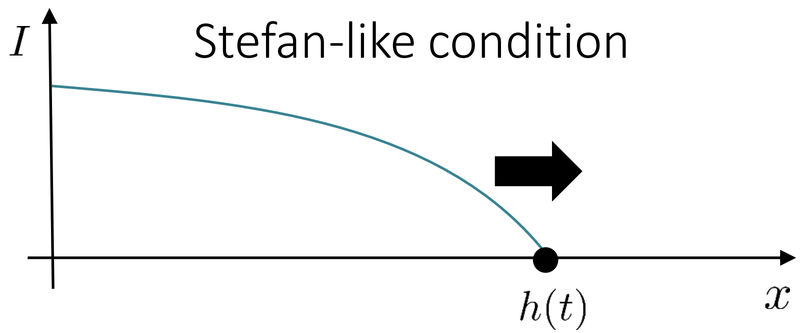
[2] E., Ushijima, Ishiwata, submitted.

$$(\mathrm{SW}) \begin{cases} dg'' + cg' - fg = 0, \\ f'' + cf' + fg - \gamma f = 0, \\ g(-\infty) = a,\ g'(-\infty) = 0, \\ g(+\infty) = 1,\ g'(+\infty) = 0, \\ f(-\infty) = f'(-\infty) = 0, \\ f(0) = 0,\ f'(0) = -\frac{c}{\mu}. \end{cases}$$

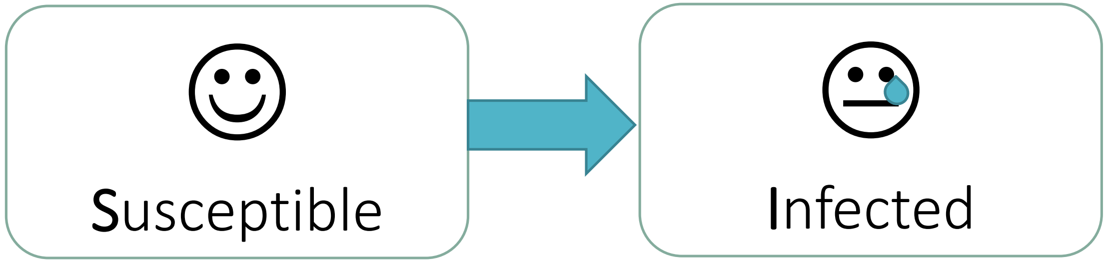


Semi-wave: a traveling wave spreading in a half space.

自由境界をもつ感染症モデル



$$
(\mathrm{FBP})\quad
\begin{cases}
S_t = dS_{xx} - SI, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\
I_t = I_{xx} + SI - \gamma I, & x < h(t),\ t > 0, \\
S_x(t,0) = I_x(t,0) = 0, & t > 0, \\
0 = I(h(t),t), & t > 0, \\
h'(t) = -\mu I_x(h(t),t), h(0) = h_0, & t > 0, \\
S(x,0) = S_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\
I(x,0) = I_0(x), & x < h(t).
\end{cases}
$$

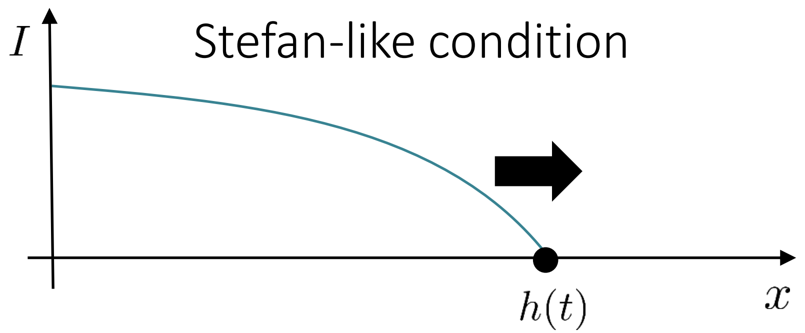


$d > 0$ 拡散係数　$\gamma > 0$ 回復率

$h_0 > 0$ 時刻 $t = 0$ における感染個体 I の生息域の境界

$\mu > 0$ 自由境界の移動係数

自由境界をもつ感染症モデル



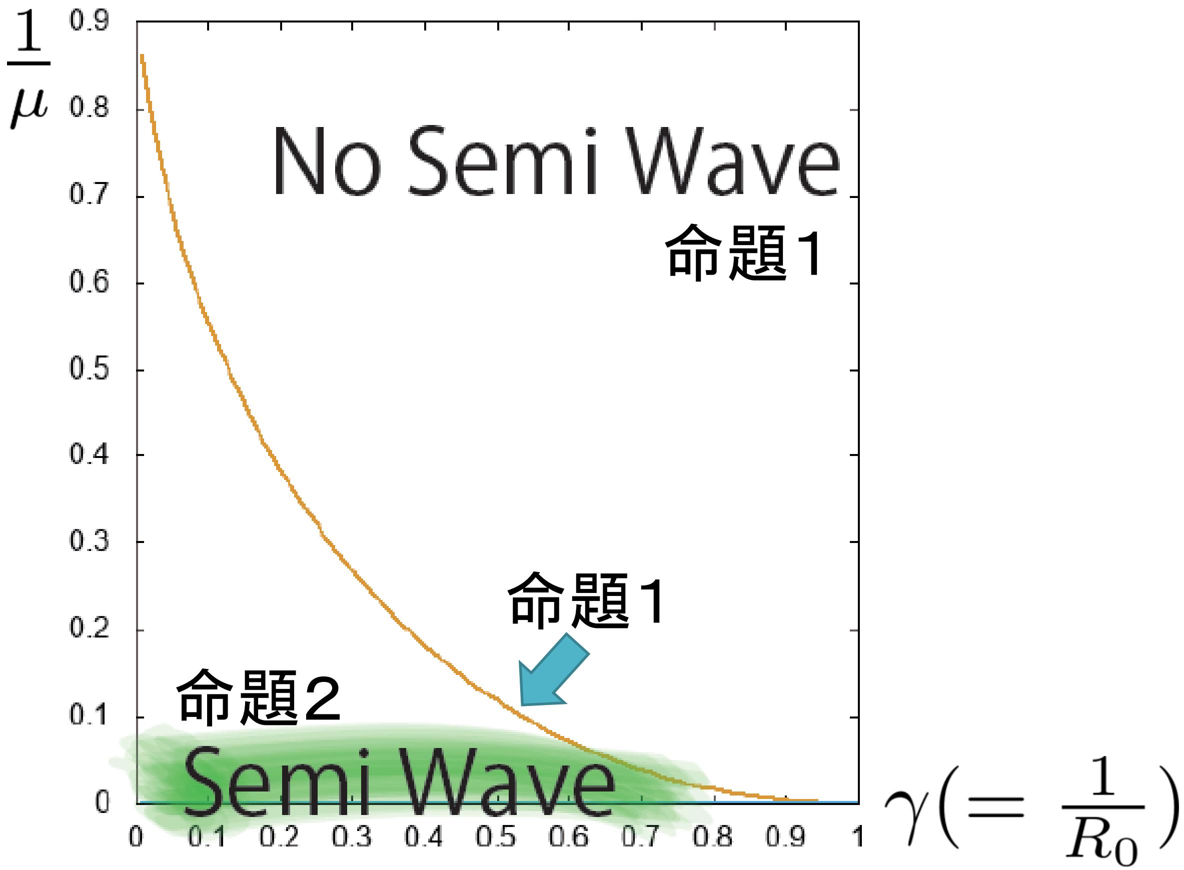
$$
\text{(FBP)} \begin{cases} S_t = dS_{xx} - SI, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ I_t = I_{xx} + SI - \gamma I, & x < h(t),\ t > 0, \\ S_x(t,0) = I_x(t,0) = 0, & t > 0, \\ 0 = I(h(t),t), & t > 0, \\ h'(t) = -\mu I_x(h(t),t), h(0) = h_0, & t > 0, \\ S(x,0) = S_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ I(x,0) = I_0(x), & x < h(t). \end{cases}
$$

目的

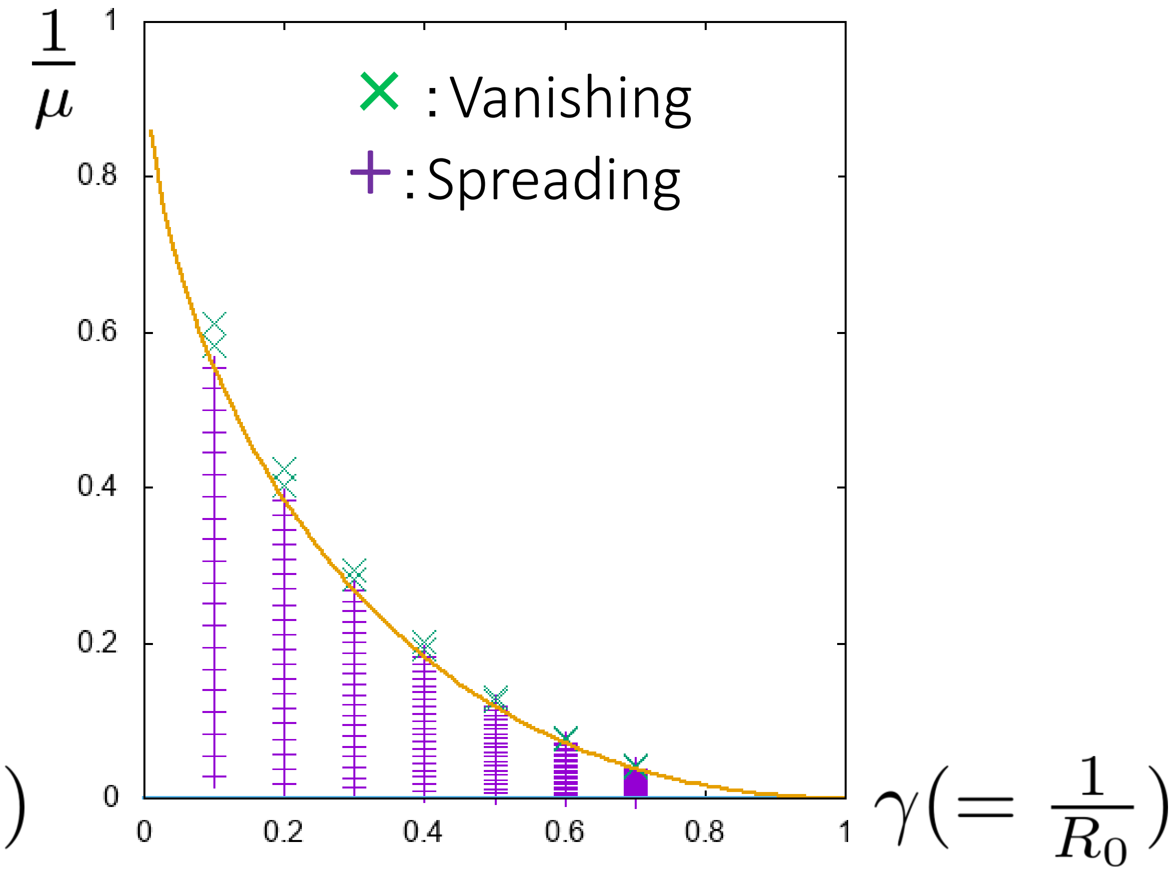
(1) 回復率 $\gamma(=\frac{1}{R_0})$ と移動係数 μ が与える解の挙動への影響

(2) 数値計算によるパラメーター依存性の観測

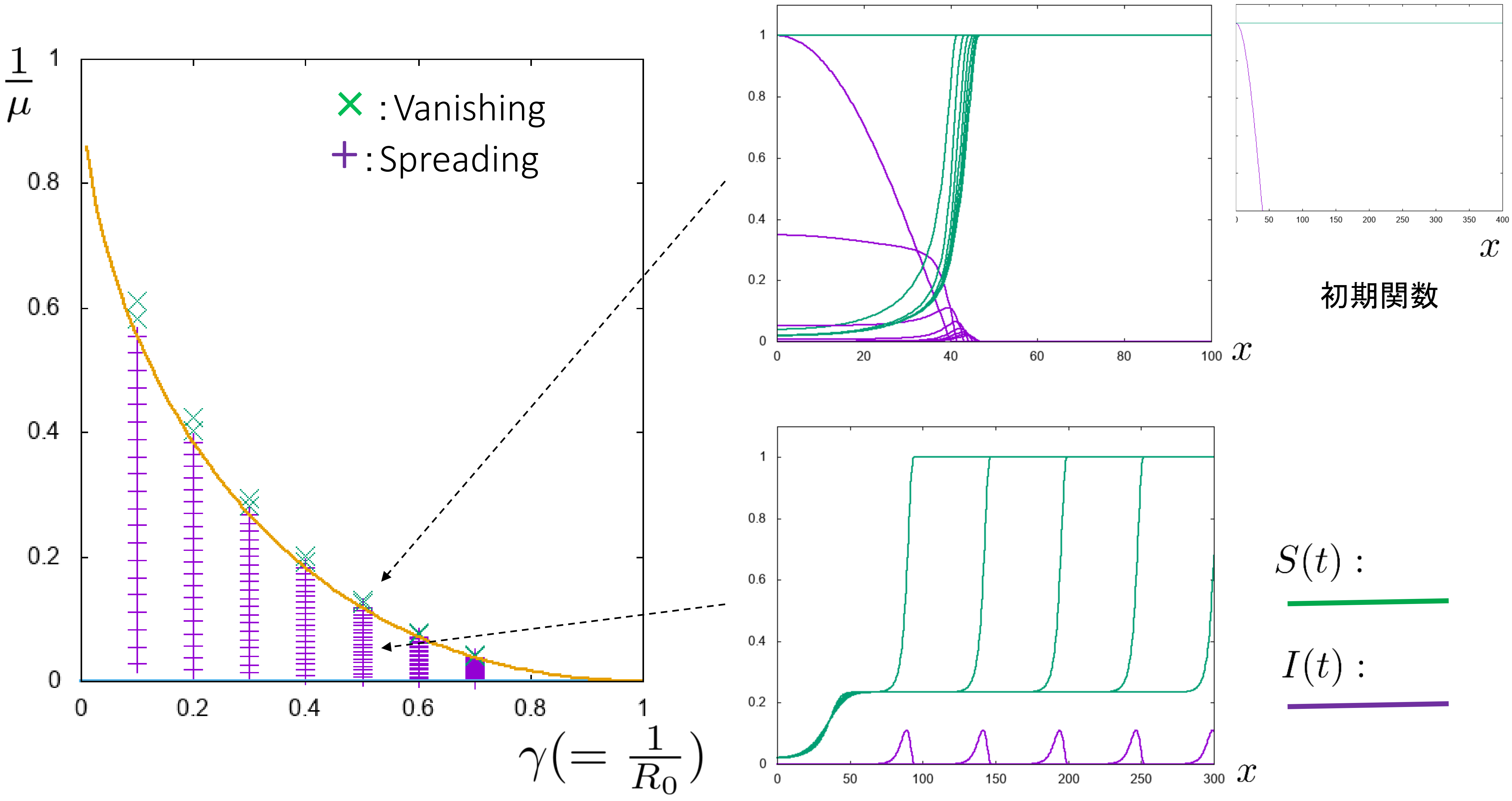
Semi wave の存在・非存在 $(d = 0)$



Semi-wave の存在・非存在領域



Spreading, Vanishing が起こるパラメーター領域



1/μ
:Vanishing
:Spreading
γ(= 1/R0)
初期関数
x
S(t) :
I(t) :

基本再生産数 R_0

Kermack-McKendrick (1927)

$$\begin{cases} S' = -\beta SI, \\ I' = \beta SI - \gamma I, \ t > 0. \end{cases}$$

$R_0 = \dfrac{\beta S(0)}{\gamma}$ とおく.

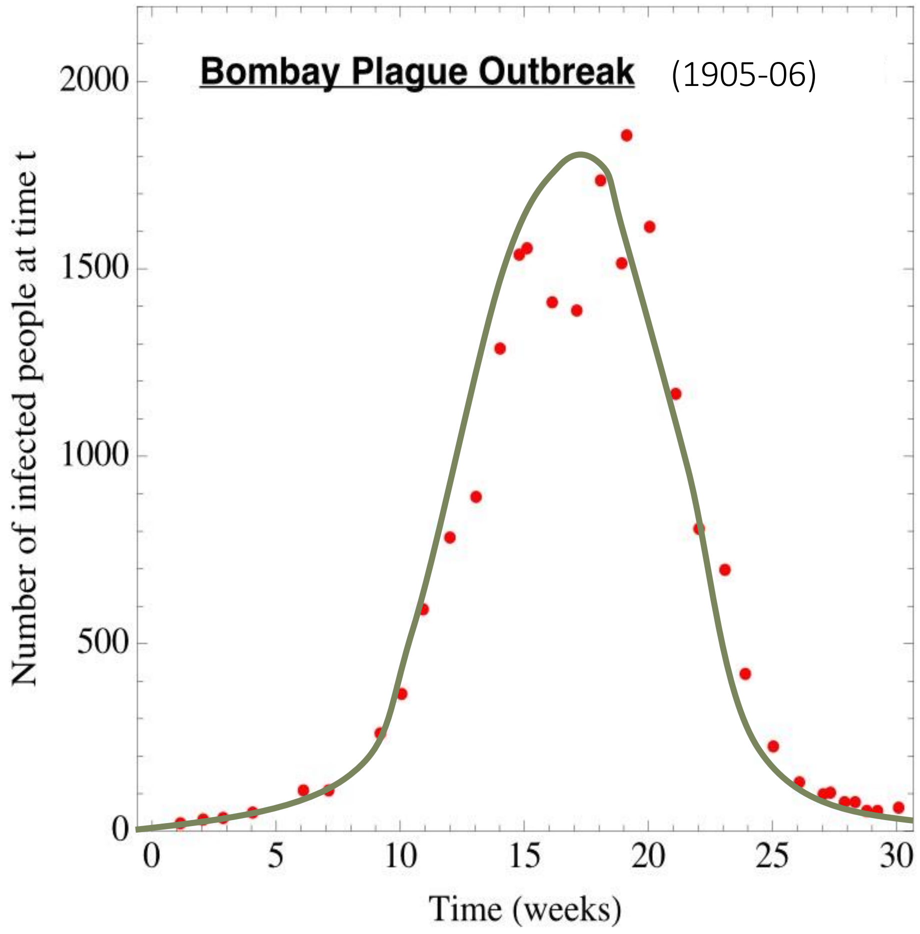
R_0 が 1 より大きくとも流行を抑えられるか？

(1) $R_0 > 1$ のとき

感染個体数 I は**初期時刻からの微小時間では単調増加であり，ある時刻で最大値をとる.** その後，I は単調減少かつ 0 に収束する.

(2) $R_0 \leq 1$ のとき

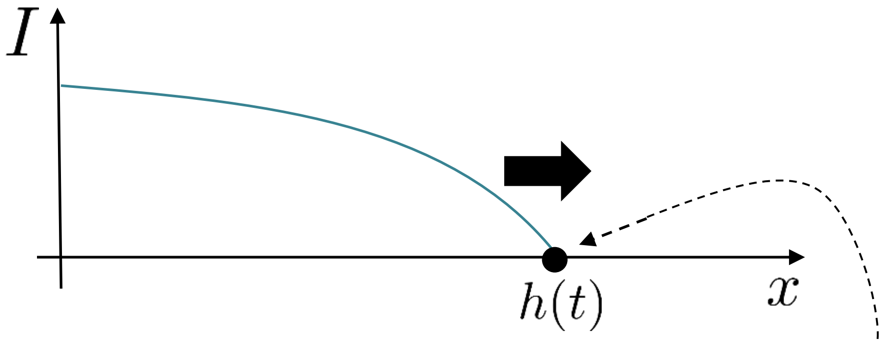
感染個体数 I は単調減少かつ 0 に収束する.



移動境界

$$
\text{(FBP)}\quad
\begin{cases}
S_t = dS_{xx} - SI, & x \in \mathbb{R},\ t > 0,\\
I_t = I_{xx} + SI - \gamma I, & x < h(t),\ t > 0,\\
S_x(t,0) = I_x(t,0) = 0, & t > 0,\\
0 = I(h(t),t), & t > 0,\\
h'(t) = -\mu I_x(h(t),t) & t > 0,\\
h(0) = h_0.
\end{cases}
$$

Stefan-like condition (cf. Du, Lin [1])



$$h'(t) > 0\ (\because I_x(h(t),t) < 0)$$

[1] Du, Lin, J. Eur. Math. Soc. **17** (2010) 2673-2724.

FBP に関する先行研究

Du, Lin (2010), Du, Lou (2015), Du, Matsuzawa, Zhou (2015),

Kaneko, Matsuzawa (2015), Kawai, Yamada (2016)

- Single RD eq. + FBP
- Spreading-Vanishing dichotomy
- Estimate of spreading speed, etc.

一方，自由境界をもつ RD “system” に対する先行研究が
Single RD eq. と比べて少ない.

全空間における先行研究

Kaellen [3], Hosono, Ilyas [2]

$$\begin{cases} S_t = dS_{xx} - SI, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ I_t = I_{xx} + SI - \gamma I, & x \in \mathbb{R},\ t > 0. \end{cases}$$

$c > 0$ を定数として

$$S(x,t) = g(z),\ I(x,t) = f(z),\ z = x - ct$$

を代入すると

$$\text{(TW)} \begin{cases} dg'' + cg' - fg = 0, \\ f'' + cf' + fg - \gamma f = 0, \\ g(-\infty) = a,\ g(+\infty) = 1,\ g'(\pm\infty) = 0, \\ f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = 0. \end{cases}$$

ここで, $a \in (0,1)$ である。

[2] Hosono, Ilyas, Math. Models Meth. Appl. Sci., **5** (1995) 935-966.
[3] Kaellen, Nonlinear Anal. TMA, **8** (1984) 851-856.

TW の存在性

Kaellen [3], Hosono, Ilyas [2]

$$
\text{(TW)} \begin{cases} dg'' + cg' - fg = 0, \\ f'' + cf' + fg - \gamma f = 0, \\ g(-\infty) = a,\ g(+\infty) = 1, g'(\pm\infty) = 0, \\ f(-\infty) = f'(-\infty) = 0, \\ f(+\infty) = f'(+\infty) = 0. \end{cases}
$$

<u>定理 ($d = 0$: Kaellen [3], $d \geq 0$: Hosono, Ilyas [2])</u>

(1) $\gamma < 1$ であることと (TW) の解が存在することは互いに同値である.

(2) $\gamma < 1$ とする. このとき, 任意の $c \geq 2\sqrt{1-\gamma}$ に対して, (TW) はただ一つの解を持つ.

[2] Hosono, Ilyas, Math. Models Meth. Appl. Sci., **5** (1995) 935-966.
[3] Kaellen, Nonlinear Anal. TMA, **8** (1984) 851-856.

主結果

(FBP) における Semi wave が満たす方程式

$$
\text{(SW)} \quad \begin{cases} dg'' + cg' - fg = 0, \\ f'' + cf' + fg - \gamma f = 0, \\ g(-\infty) = a,\ \ g(+\infty) = 1, g'(\pm\infty) = 0, \\ f(-\infty) = f'(-\infty) = 0, \\ f(0) = 0,\ \ f'(0) = -\frac{c}{\mu}. \end{cases}
$$

<u>命題1（非存在）</u> $d = 0$ とする。

任意の $\gamma < 1$ に対して，$\mu < \frac{1}{1-\overline{a}+\gamma \log \overline{a}}$ が成り立つとき，(SW) を満たす f, g, c は存在しない．ここで，$\overline{a} < 1$ は $\overline{a} - 1 + \frac{\gamma}{2}(\log \overline{a})^2 - \overline{a} \log \overline{a} = 0$ を満たすただ一つの解である．

命題1の証明

$$H(g,f,f') := f + g - \gamma \log g + \frac{f'}{c}$$
$$= \text{const.}$$

$$\text{(SW)} \quad \begin{cases} cg' - fg = 0, \\ f'' + cf' + fg - \gamma f = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} cg' - fg = 0, \\ f' = c(b - f - g + \gamma \log g). \end{cases}$$

$$u = f, \ v = \log g - \log a,$$
$$\tau = \frac{z}{c}$$

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = c^2(\gamma v - a(e^v - 1) - u), \\ \frac{dv}{d\tau} = u, \quad -\infty < \tau < 0, \\ u(-\infty) = u(0) = 0, \\ v(-\infty) = 0, \ v(0) = -\log a. \end{cases}$$

$$F(u,v) = \frac{1}{2}u^2 - c^2\left(\frac{\gamma}{2}v^2 - a(e^v - v)\right)$$

とおくと，$\frac{d}{dv}F(u,v) \le 0$ より

$$F(0,0) \ge F(0, -\log a).$$

しかし，　$\mu < \frac{1}{1-\overline{a}+\gamma \log \overline{a}}$ であるため，

$F(0,0) < F(0, -\log a)$ となり矛盾. $\square$

主結果

$$
\text{(SW)} \begin{cases} dg'' + cg' - fg = 0, \\ f'' + cf' + fg - \gamma f = 0, \\ g(-\infty) = a,\ g(+\infty) = 1, g'(\pm\infty) = 0, \\ f(-\infty) = f'(-\infty) = 0, \\ f(0) = 0,\ f'(0) = -\frac{c}{\mu}. \end{cases}
$$

<u>命題2（存在）</u> $d = 0$ とする。

任意の $\gamma < 1$ に対してある $a_*(\gamma)$ が存在し, $\underline{a}(\gamma) \le a < a_*(\gamma)$ を満たす任意の a に対して $\mu = \frac{1}{1-a+\gamma\log a}$ のときに (SW) を満たす**非負の f, g, c が存在する**. このとき, $\underline{a} < 1$ は $\underline{a}(\gamma) - \gamma \log \underline{a}(\gamma) = 0$ を満たすただ一つの解である. また, $c < 2\sqrt{\gamma - a'(\gamma)}$ が成り立つ. ここで, $a'(\gamma) > a$ は

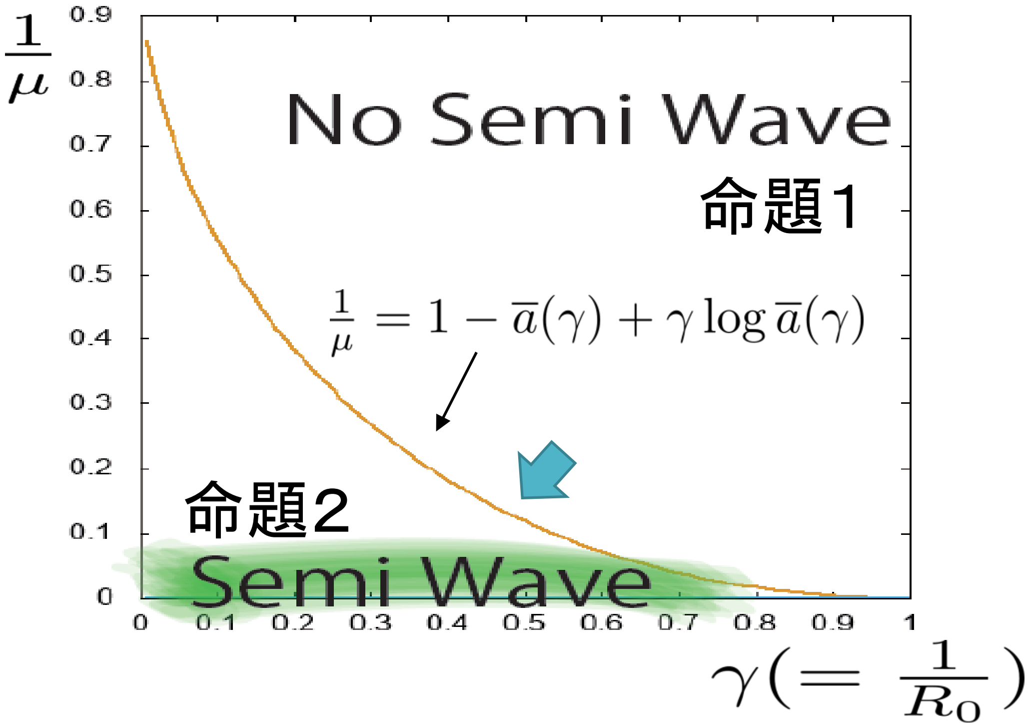
$$
a - \gamma \log a = a'(\gamma) - \gamma \log a'(\gamma)
$$

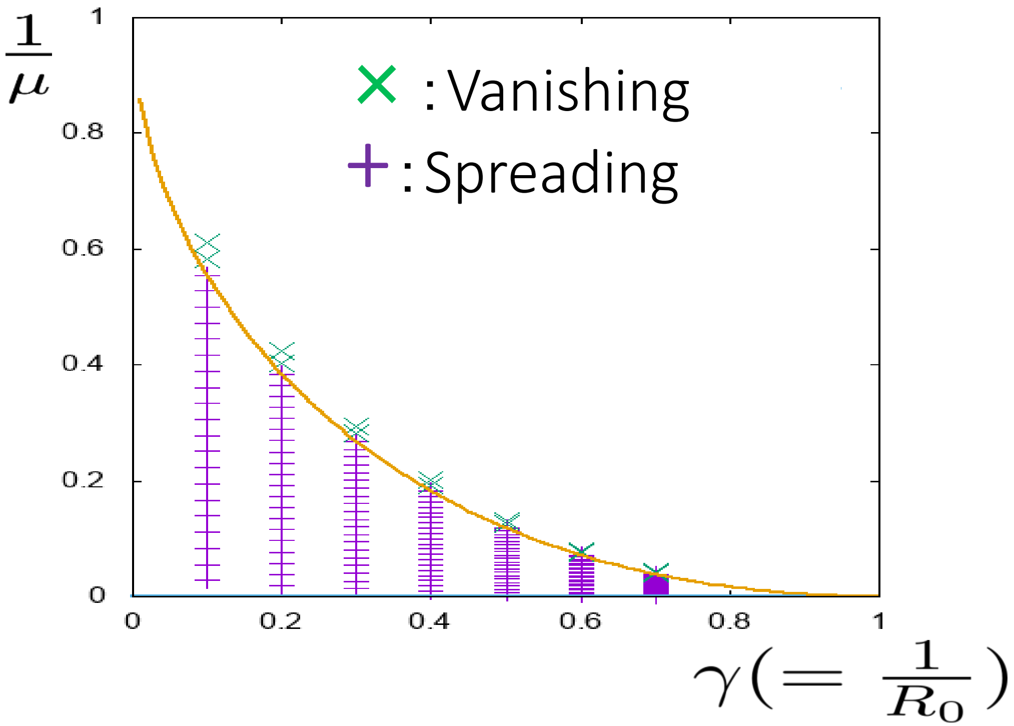
を満たすただ一つの解である。

結論

・ $d=0$ の場合に，自由境界をもつ感染症モデル (FBP) が満たす Semi wave の存在条件および非存在条件を得た.

・Semi wave の存在・非存在を分ける領域内のパラメーターにより，解の Spreading, Vanishing を数値計算により調べた.





今後の課題

- $d > 0$ の場合のsemi wave の存在条件と非存在条件
- 出生率や自然死亡率を含めた場合
- Spreading speed の評価