Stationary problem of a prey-predator model with population flux by attractive transition

大枝　和浩　(九州産業大学基礎教育センター)

反応拡散方程式で記述される被食者-捕食者モデルについて考える：

$$
\text{(P)} \begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + u(m_1 - u - cv), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v_t = d_2 \Delta v + \alpha \nabla \cdot \left[u^2 \nabla \left(\dfrac{v}{u} \right) \right] + v(m_2 + bu - v), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = v = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \ge 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \ge 0, & x \in \Omega. \end{cases}
$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする．また，d_i, α, m_1, b, c は正定数で, m_2 は実定数とする．(P) において，未知関数 u と v はそれぞれ被食生物と捕食生物の個体数密度を表す．また, (P) の第 2 式の非線形拡散項 $\nabla \cdot [u^2 \nabla (v/u)]$ は，捕食生物の各個体の空間的遷移確率が，到達点における被食生物の個体数によって決まる状況をモデル化したものである (Okubo-Levin [2]).

本報告集では, (P) の定常問題を考える：

$$
\text{(SP)} \begin{cases} d_1 \Delta u + u(m_1 - u - cv) = 0 & \text{in} \ \ \Omega, \\ d_2 \Delta v + \alpha \nabla \cdot \left[u^2 \nabla \left(\dfrac{v}{u} \right) \right] + v(m_2 + bu - v) = 0 & \text{in} \ \ \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega. \end{cases}
$$

特に，$m_2 \in \mathbb{R}$ をパラメーターとした (SP) の正値解集合

$$
\mathcal{S}(\alpha) := \{ \, (u, v, m_2) \in C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \, : \, (u,v) \text{ は (SP) の正値解} \, \}
$$

の大域構造を調べる．そして, $\alpha \to \infty$ のときの $\mathcal{S}(\alpha)$ の漸近挙動について考える．

準備として，次の定常ロジスティック方程式の Dirichlet 問題を考える：

$$
d\Delta u + u(m-u) = 0 \ \ \text{in} \ \ \Omega, \qquad u = 0 \ \ \text{on} \ \ \partial\Omega.
$$

この方程式は $m > d\lambda_1$ のときに限り正値解をもつことが知られている．ただし，λ_1 は Dirichlet 境界条件下の $-\Delta$ の最小固有値である．そこで，その正値解を $\theta_{d,m}(x)$ と表すことにする．(SP) は $m_1 > d_1\lambda_1$ のとき半自明解 $(u,v) = (\theta_{d_1,m_1}, 0)$ をもち，$m_2 > d_2\lambda_1$ のとき半自明解 $(u,v) = (0, \theta_{d_2,m_2})$ をもつことが分かる．

主結果を述べる．

定理 1 ([1]). 任意の $(m_1, \alpha) \in (d_1\lambda_1, \infty) \times \mathbb{R}_+$ に対して，$f(m_1,\alpha)$ および $g(m_1)$ が存在して，$\mathcal{S}(\alpha)$ は $m_2 = f(m_1,\alpha)$ で半自明解 $(\theta_{d_1,m_1}, 0)$ から分岐し，$m_2 = g(m_1)$ で半自明解 $(0, \theta_{d_2,g(m_1)})$ に結合するような有界な連結集合を含む．

定理 2 ([1]). (SP) で $\alpha = \alpha_n \to \infty$ としたときの任意の正値解の列を $\{(u_n, v_n)\}$ とする．このとき，適当な部分列を取ると，次の (i), (ii) のいずれかが成り立つ：

本研究は早稲田大学の久藤衡介教授との共同研究に基づくものである。

(i) $\{\alpha_n \|u_n\|_\infty\}$ が非有界であって，

$$\lim_{n\to\infty}(u_n, v_n) = \left(1-s, \frac{s}{c}\right)\theta_{d_1,m_1} \quad \text{in} \quad C^1(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

ここで，$s \in (0,1)$ は $m_2 = (1-s)\, f(m_1,\infty) + s\, h(m_1)$ をみたす．ただし，

$$m_2 = \frac{d_2}{d_1}\, m_1 - \left(\frac{d_2}{d_1} + b\right)\frac{\|\theta_{d_1,m_1}\|_2^2}{\|\theta_{d_1,m_1}\|_1}\,(= f(m_1,\infty)\,),$$
$$m_2 = \frac{d_2}{d_1}\, m_1 - \left(\frac{d_2}{d_1} - \frac{1}{c}\right)\frac{\|\theta_{d_1,m_1}\|_2^2}{\|\theta_{d_1,m_1}\|_1}\,(=: h(m_1)\,).$$

(ii) $\{\alpha_n \|u_n\|_\infty\}$ が有界であって，ある関数 $(w,v) \in C^2(\overline{\Omega})\times C^2(\overline{\Omega})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n u_n, v_n) = (w,v) \ \ \text{in}\ C^1(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega}).$$

ここで，(w,v) は次の極限系の非負値解である：

$$\begin{cases} d_1\Delta w + w(m_1 - cv) = 0 & \text{in}\ \Omega, \\ d_2\Delta v + \nabla\cdot\left[w^2\,\nabla\left(\dfrac{v}{w}\right)\right] + v(m_2 - v) = 0 & \text{in}\ \Omega, \\ w = v = 0 & \text{on}\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

定理 2 において，(1) の極限関数の集合

$$\mathit{\Gamma}_1 := \left\{(u,v,m_2) = \left((1-s)\theta_{d_1,m_1}, \frac{s}{c}\,\theta_{d_1,m_1}, (1-s)\, f(m_1,\infty) + s\, h(m_1)\right) \,:\, 0 < s < 1\right\}$$

は，(u,v,m_2) 空間において $(\theta_{d_1,m_1}, 0, f(m_1,\infty))$ と $(0, \theta_{d_1,m_1}/c, h(m_1))$ を結ぶ線分を形成している．

定理 3. 任意の $m_1 > d_1\lambda_1$ に対して，$m_2 \in \mathbb{R}$ を分岐パラメーターとした (2) の正値解集合は $m_2 = g(m_1)$ で半自明解 $(w,v) = (0, \theta_{d_2,g(m_1)})$ から分岐する連結集合 $\mathit{\Gamma}_2$ を含む．このとき，$\mathit{\Gamma}_2$ は (v, m_2) 成分に関して有界だが，w 成分に関して非有界である．さらに，任意の非有界列 $\{(w_n, v_n, m_{2,n})\} \subset \mathit{\Gamma}_2$ は $n\to\infty$ で次をみたす：

$$\|w_n\|_\infty \to \infty, \quad v_n \to \frac{1}{c}\theta_{d_1,m_1} \text{ in } C^1(\overline{\Omega}), \quad m_{2,n} \to h(m_1). \tag{3}$$

定理3の (3) より，$\mathit{\Gamma}_2$ の w 成分の爆発点において，(v, m_2) 成分は，線分 $\mathit{\Gamma}_1$ の $s = 1$ の端点に一致することが分かる．この一致は，定理2 の (i) と (ii) のそれぞれで述べた，$\alpha \to \infty$ のときの正値解の 2 種類の漸近挙動が，$m_2 = h(m_1)$ で繋がっていることを示唆する．

参考文献

[1] K. Oeda, K. Kuto, *Positive steady states for a prey-predator model with population flux by attractive transition*, Nonlinear Analysis RWA 44 pp.589–615 (2018).

[2] A. Okubo, S. A. Levin, *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*, Second edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, 14, Springer-Verlag, New York, 2001.