

様々な Hele-Shaw 型問題に対する基本解近似解法による 構造保存型数値解法

榊原 航也

京都大学 理学研究科 & 理化学研究所 数理創造プログラム

ksakaki@math.kyoto-u.ac.jp

概要

本論文では、Hele-Shaw 問題に対する構造保存型数値解法の構築方法について解説する。ここでいう構造保存とは、例えば、古典的 Hele-Shaw 問題においては、周長減少、面積保存、重心不変といった幾何学的変分構造を意味する。鍵となるアイデアは、基本解近似解法においてある重み付き平均条件を課すところである。

1 導入

Hele-Shaw 問題とは、図 1 (a) に示されたように、狭い間隙を持つ 2 枚の平行平板の間に挟まれた粘性流体の運動を記述するものであり、[6] で初めて提唱された。Hele-Shaw は、着色水を用いた実験により流線を可視化し、その結果が完全流体のそれと非常に似ていることを発見した (図 1(b) を参照されたい)。つまり、Hele-Shaw 問題は、実験が非常に困難な完全流体の性質を粘性流体により調べるための、最もシンプルなモデルと言える。また、Hele-Shaw 問題は、指状不安定性 (Saffman-Taylor 不安定性) のメカニズムを解明するための最もシンプルなモデルとしても知られており、今日に至るまで、数学のみならず物理、工学の立場からも盛んに研究されてきた。

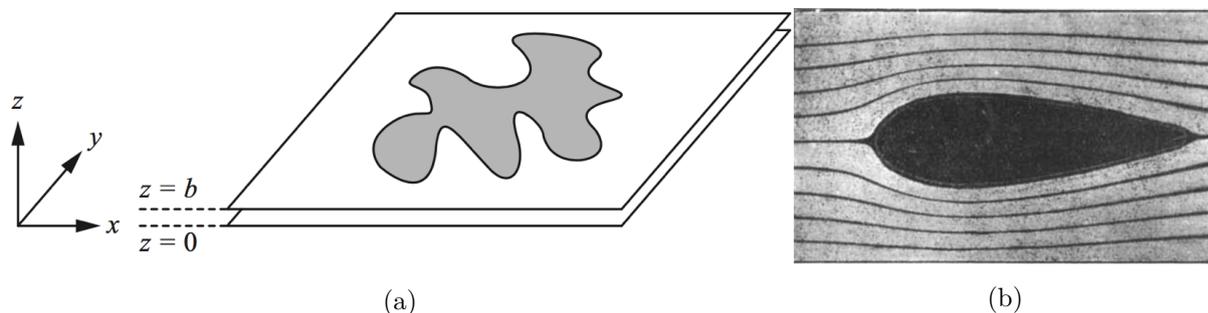


図 1 Hele-Shaw 問題 : (a) Hele-Shaw セル ; (b) Hele-Shaw による実験画像 [6, Fig. 10]

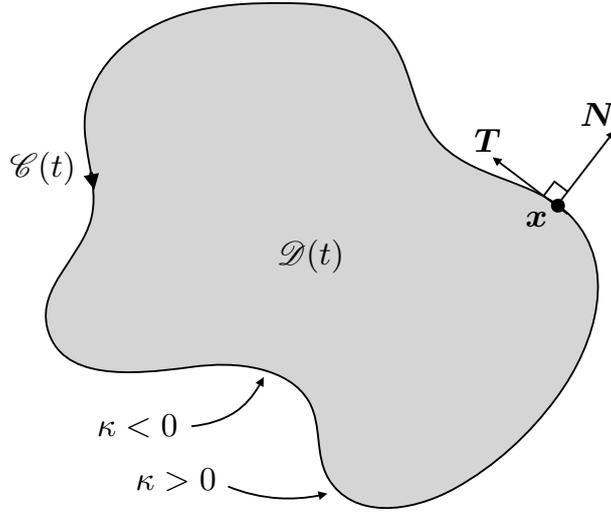


図2 古典的 Hele-Shaw 問題のセッティング

数理モデル

その中でも、最も基本的である、古典的（一相内部）Hele-Shaw 問題は、次のように定式化される [9, 5] :

$$\begin{cases} \Delta p(\cdot, t) = 0 & \text{in } \mathcal{D}(t), t \in (0, T) \\ p(\cdot, t) = \gamma \kappa(\cdot, t) & \text{on } \mathcal{C}(t), t \in (0, T) \\ V(\cdot, t) = -\nabla p(\cdot, t) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) & \text{on } \mathcal{C}(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $\mathcal{D}(t) \subset \mathbb{R}^2$ は流体の占める（有界な）Jordan 領域、 $\mathcal{C}(t) = \partial \mathcal{D}(t)$ は $\mathcal{D}(t)$ の境界を表す（正に向きづけられた）Jordan 曲線、 p は圧力関数、 $\kappa(\cdot, t)$ は $\mathcal{C}(t)$ の曲率（ $\mathcal{C}(t)$ が円の時に正の符号を取る）、 $\gamma (> 0)$ は表面張力定数、 $V(\cdot, t)$ は $\mathcal{C}(t)$ の法線速度、 $\mathbf{N}(\cdot, t)$ は $\mathcal{C}(t)$ の外向き単位法ベクトルを表す（図2を参照せよ）。(1.1)の第1式は、速度ベクトル \mathbf{u} と圧力勾配との間に成り立つ Darcy 則 $\mathbf{u} = -\nabla p$ および非圧縮性条件 $\text{div } \mathbf{u} = 0$ から従う。第2式は、いわゆる Young-Laplace の関係式であり、第3式は質量保存則から従うものである。

幾何学的変分構造

Hele-Shaw 問題に限らず、一般に、平面内の閉曲線の運動は、次の発展法則により記述される :

$$\partial_t \mathbf{x}(u, t) = V(u, t) \mathbf{N}(u, t) + W(u, t) \mathbf{T}(u, t), \quad u \in [0, 1], t \in (0, T). \quad (1.2)$$

ただし、 $\mathbf{x}(\cdot, t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は平面内の Jordan 曲線 $\mathcal{C}(t)$ のパラメータ付け、 $\mathbf{T}(\cdot, t)$ は $\mathcal{C}(t)$ の単位接ベクトル、 $W(\cdot, t)$ は $\mathcal{C}(t)$ の接線速度を表す。 $\mathcal{C}(t)$ の時間発展に伴って着目する幾何学的対象として、通常、周長 $\mathcal{L}(t) = |\mathcal{C}(t)|$ 、 $\mathcal{C}(t)$ により囲まれる領域 $\mathcal{D}(t)$ の面積 $\mathcal{A}(t) = |\mathcal{D}(t)|$ 、および $\mathcal{D}(t)$ の重心 $\mathbf{G}(t)$ が挙げられる :

$$\mathcal{L}(t) = \int_{\mathcal{C}(t)} ds, \quad \mathcal{A}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} dS, \quad \mathbf{G}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \mathbf{x} dS.$$

ただし、 ds は $\mathcal{C}(t)$ の線素、 dS は $\mathcal{D}(t)$ の面積要素を表す。この時、 $\mathcal{L}(t)$ 、 $\mathcal{A}(t)$ 、 $\mathbf{G}(t)$ の時間微分について、次の公式が成り立つことが知られている ([4, (2E) Transport theorem for area and total length], [7, Theorem 6.4]).

定理 1.1. 閉曲線 $\mathcal{C}(t)$ は発展法則 (1.2) に従って時間発展するとする。この時、次が成り立つ。

$$\dot{\mathcal{L}}(t) = \int_{\mathcal{C}(t)} \kappa(\cdot, t) V(\cdot, t) ds, \quad \dot{\mathcal{A}}(t) = \int_{\mathcal{C}(t)} V(\cdot, t) ds, \quad \dot{\mathcal{G}}(t) = -\frac{\dot{\mathcal{A}}(t)}{\mathcal{A}(t)} \mathcal{G}(t) + \frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{x} V ds.$$

これに、古典的 Hele-Shaw 問題 (1.1) の解を代入すると、発散定理により次が従う。

系 1.2. 定理 1.1 の仮定に加えて、法線速度は古典的 Hele-Shaw 問題 (1.1) により与えられているとする。この時、次が成り立つ。

$$\dot{\mathcal{L}}(t) = -\frac{1}{\gamma} \|\nabla p\|_{L^2(\mathcal{D}(t))}^2 \leq 0, \quad \dot{\mathcal{A}}(t) = 0, \quad \dot{\mathcal{G}}(t) = \mathbf{0}.$$

つまり、周長減少、面積保存、重心不変の性質が成り立つ（以降、これらをまとめて、幾何学的変分構造と呼ぶことにする）。特に、周長減少の式において等号が成立するためには p が $\mathcal{D}(t)$ 内で定数、つまり $\mathcal{D}(t)$ が円板であることが必要十分である。

この系の結果は非常に重要であるので、ここで証明を与えることにしよう。

Proof. まず、周長に関しては、

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}(t) &= \int_{\mathcal{C}(t)} \frac{p(\cdot, t)}{\gamma} (-\nabla p(\cdot, t) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t)) ds = -\frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{C}(t)} (p(\cdot, t) \nabla p(\cdot, t)) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) ds \\ &= -\frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{D}(t)} \operatorname{div}(p(\cdot, t) \nabla p(\cdot, t)) dS = -\frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{D}(t)} (|\nabla p(\cdot, t)|^2 + p(\cdot, t) \Delta p(\cdot, t)) dS \\ &= -\frac{1}{\gamma} \|\nabla p(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{D}(t))}^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで、3番目の等号では発散定理を、最後の等号では (1.1) の第 1 式を適用した。

次に、面積については、周長の場合と同様にして、

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = - \int_{\mathcal{C}(t)} \nabla p(\cdot, t) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) ds = - \int_{\mathcal{D}(t)} \operatorname{div}(\nabla p(\cdot, t)) dS = - \int_{\mathcal{D}(t)} \Delta p(\cdot, t) dS = 0$$

を得る。

最後に、重心については、少し複雑ではあるが、次のようにして示される。

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{G}}(t) &= \frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{C}(t)} \mathbf{x} (-\nabla p(\cdot, t) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t)) ds = -\frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{C}(t)} \begin{pmatrix} x \nabla p(\cdot, t) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) \\ y \nabla p(\cdot, t) \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) \end{pmatrix} ds \\ &= -\frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{D}(t)} \begin{pmatrix} \operatorname{div}(x \nabla p(\cdot, t)) \\ \operatorname{div}(y \nabla p(\cdot, t)) \end{pmatrix} dS = -\frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{D}(t)} (\nabla p(\cdot, t) + \mathbf{x} \Delta p(\cdot, t)) dS \\ &= -\frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{D}(t)} \begin{pmatrix} \operatorname{div}(p(\cdot, t), 0)^\top \\ \operatorname{div}(0, p(\cdot, t))^\top \end{pmatrix} dS = -\frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{C}(t)} \begin{pmatrix} (p(\cdot, t), 0)^\top \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) \\ (0, p(\cdot, t))^\top \cdot \mathbf{N}(\cdot, t) \end{pmatrix} dS \\ &= -\frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{C}(t)} p(\cdot, t) \mathbf{N}(\cdot, t) ds = -\frac{1}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{C}(t)} \gamma \kappa(\cdot, t) \mathbf{N}(\cdot, t) ds \\ &= \frac{\gamma}{\mathcal{A}(t)} \int_{\mathcal{C}(t)} \partial_s \mathbf{T}(\cdot, t) ds = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad \square$$

厳密解がこれら幾何学的変分構造を満たすので、数値計算スキームを構築するときにも、それらを何らかの意味で離散的に満たすことを要請することは至って自然であろう。このように、元の解が保持している性質を離散化しても保存するような数値解法は、構造保存型数値解法と呼ばれており、国内外で今日に至るまで非

常に盛んに研究されている。しかしながら、先行研究の多くは、Hele-Shaw 問題のような移動境界問題を対象としておらず、先行研究の知見を応用できる可能性も決して高くない。本報告集における本論文の目的は、Hele-Shaw 問題に対して、基本解近似解法、ならびに一様配置法を用いた構造保存型数値解法を構築することにある。

本論文の構成

2 節では、数値計算スキームの詳細を説明し、基本解近似解法、ならびに一様配置法の有用性を示す。3 節では、1 つ、簡単な数値計算の結果を示す。特に、法線速度の計算を境界要素法により行なった場合と結果を比較することで、我々が提案するスキームの有用性を示す。最後に、4 節において、本論文の内容を簡単にまとめる。

2 数値計算スキームの構築・解析

我々の数値計算スキームを構築する第一歩は、境界曲線 $\mathcal{C}(t)$ を多角形曲線 $\Gamma(t)$ により近似し、多角形曲線の運動を考えることである。

$\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i(t)$ を平面内の Jordan n 角形とする。ただし、

$$\Gamma_i(t) = [\mathbf{X}_{i-1}(t), \mathbf{X}_i(t)] = \{(1-\lambda)\mathbf{X}_{i-1}(t) + \lambda\mathbf{X}_i(t) \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

は $\Gamma(t)$ の第 i 辺をあらわし、 $\mathbf{X}_i(t)$ は第 i 頂点を表す。また、表記の簡単のために、次の周期的な表現を用いる：

$$\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{X}_n(t), \quad \mathbf{X}_{n+1}(t) = \mathbf{X}_1(t).$$

以降、特に断ることなく、定義される各量に対して、同様の周期的な表現を用いることにする。このとき、多角形曲線の運動は、次の、多角形版発展法則により支配される：

$$\dot{\mathbf{X}}_i(t) = V_i(t)\mathbf{N}_i(t) + W_i(t)\mathbf{T}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

ただし、 $\mathbf{T}_i(t)$, $\mathbf{N}_i(t)$ は第 i 頂点における $\Gamma(t)$ の単位接ベクトル、外向き単位法ベクトルを表す。もちろん、頂点における単位接ベクトル、外向き単位法ベクトルは一意に決まらず、多くの可能性があるが、本論文では、最も簡単な定め方として、 $\Gamma_i(t)$, $\Gamma_{i+1}(t)$ 上の単位接ベクトルの“中間”を向いている単位ベクトルを、頂点における単位接ベクトルの定義に採用する。詳しくは、2.2 節を参照されたい。

以降、表記の簡単のために、時間変数 t を省略する。

2.1 アルゴリズムの概観

詳しくアルゴリズムを説明する前に、ここで、どのような流れで数値計算を行うのかをまとめておこう。 $\{\mathbf{X}_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ により、第 m 時間ステップ $t^{(m)}$ における頂点集合を表す。

アルゴリズム. (I) 初期頂点の配置 $\{\mathbf{X}_i^{(0)}\}_{i=1}^n$ を、パラメータ等分点など、何らかのルールにより与え、一様配置法 (Step 3 を参照せよ) により、各辺の長さが同じになるように頂点の再配置を行う。こうして得られた頂点集合を同じ記号 $\{\mathbf{X}_i^{(0)}\}_{i=1}^n$ により表す。

(II) 第 m 時間ステップ $t^{(m)}$ における頂点集合 $\{\mathbf{X}_i^{(m)}\}_{i=1}^m$ が与えられたとき、次の時間ステップ $t^{(m+1)}$ で頂点集合を、以下の手順で計算する。

Step 1: 隣接する2辺のなす角 $\{\varphi_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ を計算し、それを用いて頂点での接ベクトル $\mathbf{T}_i^{(m)}$ を次で与える:

$$\mathbf{T}_i^{(m)} = \frac{\mathbf{t}_i^{(m)} + \mathbf{t}_{i+1}^{(m)}}{2 \cos(\varphi_i^{(m)}/2)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ただし、 $\mathbf{t}_i^{(m)}$ は第 i 辺 $\Gamma_i^{(m)}$ 上での $\Gamma^{(m)}$ の単位接ベクトルを表す。そして、第 i 辺 $\Gamma_i^{(m)}$ 上での離散曲率 $\kappa_i^{(m)}$ を次式により計算する:

$$\kappa_i^{(m)} = \frac{\tan(\varphi_{i-1}^{(m)}/2) + \tan(\varphi_i^{(m)}/2)}{r_i^{(m)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ただし、 $r_i^{(m)} = |\mathbf{X}_i^{(m)} - \mathbf{X}_{i-1}^{(m)}|$ は第 i 辺 $\Gamma_i^{(m)}$ の長さを表す。

Step 2: 法線速度 $\{V_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ を計算するために、次の問題を考える:

$$\begin{cases} \Delta p(\cdot, t^{(m)}) = 0 & \text{in } \Omega^{(m)}, \\ p(\cdot, t^{(m)}) = \gamma \kappa_i^{(m)} & \text{on } \Gamma_i^{(m)}, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

ただし、 $\Omega^{(m)}$ は $\Gamma^{(m)}$ により囲まれた多角形領域をあらわす。この問題の近似解を、基本解近似法 (Method of Fundamental Solutions, MFS) を用いて計算する。MFS により得られた近似解を $P_n^{(m)}$ と書くことにする。このとき、第 i 辺 $\Gamma_i^{(m)}$ の法線速度 $v_i^{(m)}$ を、古典的 Hele-Shaw 問題 (1.1) に基づいて

$$v_i^{(m)} = -\nabla P_n^{(m)}((\mathbf{X}_i^{(m)})^*) \cdot \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ただし、 $(\mathbf{X}_i^{(m)})^*$ は第 i 辺 $\Gamma_i^{(m)}$ の中点をあらわす。そして、 $\{v_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ を用いて、頂点での法線速度を次で与える:

$$V_i^{(m)} = \frac{v_i^{(m)} + v_{i+1}^{(m)}}{2 \cos(\varphi_i^{(m)}/2)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

詳細は 2.3, 2.5 節を参照せよ。

Step 3: 接線速度 $\{W_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ を、一様配置法 (Uniform Distribution Method, UDM) により計算する。詳細は、2.4, 2.6 節を参照せよ。ここで一言だけ述べておくことにすると、接線速度 $\{W_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ は、すでに計算された法線速度 $\{V_i^{(m)}\}_{i=1}^n$ の“線型結合”として表現できることである。すなわち、法線速度を計算しさえすれば、そこから適切な接線速度は自動的に求まる。

Step 4: 多角形版発展法則 (2.1) を、通常の4段4次 Runge-Kutta 法により解き、次の時間ステップ $t^{(m+1)}$ での頂点集合 $\{\mathbf{X}_i^{(m+1)}\}_{i=1}^n$ を得る。

以上が、我々のアルゴリズムの流れになる。以下で、各ステップの詳細を記述していこう。なお、表記の簡単のために、以降、上付き文字 (m) は省略する。

2.2 Step 1: 頂点での単位接ベクトル $\{\mathbf{T}_i\}_{i=1}^n$ と辺上の離散曲率 $\{\kappa_i\}_{i=1}^n$ の計算

$r_i = |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}|$ を第 i 辺 Γ_i の長さとする。このとき、 Γ の Γ_i 上での単位接ベクトル \mathbf{t}_i は、当たり前ではあるが、次で計算される:

$$\mathbf{t}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

θ_i を \mathbf{t}_i の角度としよう。すなわち、 θ_i は、次を満たすものとして決定される：

$$\mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

この θ_i は、次の手順で計算される：

(i) $\mathbf{t}_1 = (t_{11}, t_{12})^T$ より、 θ_1 を次で与える：

$$\theta_1 = \begin{cases} -\arccos(t_{11}) & \text{if } t_{12} < 0, \\ \arccos(t_{11}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(ii) $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、 θ_{i+1} を θ_i を用いて、次で与える：

$$\theta_{i+1} = \theta_i + (\operatorname{sgn} D) \arccos I, \quad \operatorname{sgn} D = \begin{cases} 1 & \text{if } D > 0, \\ 0 & \text{if } D = 0, \\ -1 & \text{if } D = -1. \end{cases}$$

ただし、 $D = \det(\mathbf{t}_i \ \mathbf{t}_{i+1})$, $I = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_{i+1}$ である。

(iii) θ_0 を次で決定する：

$$\theta_0 = \theta_1 - (\theta_{n+1} - \theta_n).$$

これは、 $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$, $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$ が成り立つことから導かれた式である。

Γ_i と Γ_{i+1} の間のなす角を φ_i と書く。つまり、 φ_i は次で定義される：

$$\varphi_i = \theta_{i+1} - \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

以降、次の記号を用いる：

$$\cos_i = \cos \frac{\varphi_i}{2}, \quad \sin_i = \sin \frac{\varphi_i}{2}, \quad \tan_i = \tan \frac{\varphi_i}{2}.$$

このとき、第 i 頂点 \mathbf{X}_i における Γ の単位接ベクトル \mathbf{T}_i は、次で定義される：

$$\mathbf{T}_i = \frac{\mathbf{t}_i + \mathbf{t}_{i+1}}{2\cos_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

そして、外向き単位法ベクトル \mathbf{N}_i は、 \mathbf{T}_i を $-\pi/2$ だけ回転させることにより得られる。次の関係式は非常に初等的なものであるが、のちに有用であるのでここに記しておく：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i &= \cos_i \mathbf{T}_i + \sin_i \mathbf{N}_i, & \mathbf{t}_{i+1} &= \cos_i \mathbf{T}_i - \sin_i \mathbf{N}_i, \\ \mathbf{n}_i &= -\sin_i \mathbf{T}_i + \cos_i \mathbf{N}_i, & \mathbf{n}_{i+1} &= \sin_i \mathbf{T}_i + \cos_i \mathbf{N}_i. \end{aligned}$$

最後に、第 i 辺 Γ_i 上の離散曲率 κ_i は、次で定義する：

$$\kappa_i = \frac{\tan(\varphi_{i-1}/2) + \tan(\varphi_i/2)}{r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

この離散曲率がどのようにして登場したのかを、ここで説明しよう。そのために、この部分だけ、平面内の滑らかな Jordan 曲線 \mathcal{C} を考える。その単位接ベクトル、外向き単位法ベクトルをそれぞれ \mathbf{T} , \mathbf{N} で表すことにすると、曲率 κ とは、次の Frenet の公式を満たすものとして定義されたのであった：

$$\partial_s \mathbf{T} = -\kappa \mathbf{N}.$$

ここで、 ∂_s は弧長微分を表す。よって、この Frenet の公式の何らかの離散化を考えることにより、多角形曲線に対する離散曲率を導けると考えられるかもしれない。実際、そのような考えで導かれた離散曲率も存在するが、ここでは、それらとは別のアプローチにより、離散曲率を導出する。我々は、定理 1.1 で与えられた、周長の時間微分に対する公式の離散化として離散曲率を導く。つまり、定理 1.1 で与えられた式は、“曲率は長さ汎函数の第一変分である”ことを意味しており、幾何学的変分構造を保存する数値計算スキームを導出する、という目的に鑑みれば、この変分構造に着目した曲率を定義すれば、自然な離散曲率を定義できると期待できる。この考えに基づいて、多角形曲線 $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ の長さ $L = \sum_{i=1}^n r_i$ の時間微分を計算してみると、次が得られる：

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \sum_{i=1}^n \dot{r}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{X}}_i \cdot (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_{i+1}) = \sum_{i=1}^n (V_i \mathbf{N}_i + W_i \mathbf{T}_i) \cdot (\cos_i \mathbf{T}_i + \sin_i \mathbf{N}_i - (\cos_i \mathbf{T}_i - \sin_i \mathbf{N}_i)) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n V_i \sin_i.\end{aligned}\quad (2.2)$$

ここで、頂点の法線速度 $\{V_i\}_{i=1}^n$ と辺の法線速度 $\{v_i\}_{i=1}^n$ との間に、次の関係式が成り立つことを仮定する：

$$V_i = \frac{v_i + v_{i+1}}{2\cos_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

この関係式は、クリスタライン曲率流の文脈で登場するものであり、ここではその詳細は省略する（詳しくは [17] を参照されたい）。この関係式を (2.2) に代入すると、次を得る：

$$\dot{L} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{v_i + v_{i+1}}{2\cos_i} \sin_i = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\sin_i}{\cos_i} + \frac{\sin_{i-1}}{\cos_{i-1}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\tan_i + \tan_{i-1}}{r_i} v_i r_i. \quad (2.4)$$

この式を (1.1) で与えられた周長の時間微分の式と比較すると、 v_i が V と、 r_i が ds と対応していることがわかる。従って、残りの $(\tan_i + \tan_{i-1})/r_i$ が κ に対応していると考えることができる。よって、この量を第 i 辺 Γ_i の離散曲率 κ_i と定義することにしよう：

$$\kappa_i = \frac{\tan_i + \tan_{i-1}}{r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

この離散曲率の式は、隣接する辺とのなす角 φ_i, φ_{i-1} を用いて定義されており、ある意味で、多角形曲線の曲がり具合を表していると見ることができる。なお、この離散曲率の式はここで初めて登場したわけではない。詳しく言及することは避けるが、この離散曲率は、 Γ がある同値類 (equivalent class) に属する場合は多角形曲率 [2, 8]、 Γ が許容類 (admissible class) に属する場合はクリスタライン曲率として知られている [1, 15]。

このようにして多角形曲率を定義したおかげで、周長の時間微分の式については、滑らかな曲線の場合と多角形曲線の場合とで綺麗な対応付けを与えることができた。それでは、面積および重心についてはどのようになるであろうか。それについては、2.5 節で見ることにした。

2.3 Step 2 : MFS による法線速度 $\{V_i\}_{i=1}^n$ の計算

Step 1 で導入した多角形曲率 κ_i を用いると、我々が解くべき問題は次のように書き下される：

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{in } \Omega, \\ p = \gamma \kappa_i & \text{on } \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

MFS では、この問題に対する近似解 P_n を次の形で与える：

$$P_n(\mathbf{x}) = Q_0 + \sum_{j=1}^n Q_j E_j(\mathbf{x}), \quad E_j(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j) - E(\mathbf{x} - \mathbf{z}_j). \quad (2.5)$$

ここで、 $E(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \log |\mathbf{x}|$ は Laplace 作用素 Δ の基本解、 $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ は特異点と呼ばれる MFS の精度を制御する点、 $\{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ は第 2 特異点と呼ばれる MFS の解のスケール不変性を担保するための点である。

注意 1. 上記の MFS の定式化は、通常のものとは異なる。いわゆる、最もシンプルな MFS の定式化は、次の形で近似解を求めるものである：

$$\sum_{j=1}^n Q_j E(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j).$$

しかし、この場合、元の問題の解が満たすスケール変換不変性を一般には満たさないことが知られている。そこで、[16, 10] において、次の形の“不変”スキームが考案された。

$$Q_0 + \sum_{j=1}^n Q_j E(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j), \quad \sum_{j=1}^n Q_j = 0.$$

このスキームは、“対数関数の線型結合により近似解を構成している”ことを活用することで、スケール変換不変性を満たすようにしているが、係数の和が 0 になるという条件が必要とされていた。そこで、筆者らは、[11] において、(2.5) を修正した形の定式化を与えた。この定式化では、係数の和に関する条件なしにスケール変換不変性が満たされるため、係数を決定するために他の条件を与えることができる。本論文では、後で示すように、重み付き平均条件を課すことで、面積保存を満たすように解を構成している。なお、室田の不変スキーム、ならびに (2.5) は、いずれも対数関数の性質を活用しているため、例えば、重調和方程式など他の方程式に対して不変スキームを作ろうと思った際、このアイデアを適用することはできない。そこで、[12] において、筆者らは、基本解 $E(\mathbf{x})$ が $|\mathbf{x}|$ の関数として与えられることが多いことに着目し、スケール因子を導入した形の MFS を提唱し、かなり広いクラスの問題に対して統一的に不変スキームを構築する方法を提唱した。詳細は、[12] を参照されたい。

さて、(2.5) において係数 $\{Q_j\}_{j=0}^n$ を決定するために、本論文では選点法を採用する。つまり、次の連立一次方程式を解くことにより係数 $\{Q_j\}_{j=0}^n$ を得る：

$$P_n(\mathbf{X}_i^*) = \gamma \kappa_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{j=1}^n Q_j H_j = 0. \quad (2.6)$$

ただし、 $\{H_j\}_{j=1}^n$ は次で与えられる：

$$H_j = - \sum_{i=1}^n \nabla E_j(\mathbf{X}_i^*) \cdot \mathbf{n}_i r_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

この重み付き平均条件は、注意 1 でも述べたように、面積保存を満たすように課した条件であり、詳しいことは、2.5 節を参照されたい。何はともあれ、このようにして得られた近似解 P_n を用いて、第 i 辺の速度 v_i を

$$v_i = -\nabla P_n(\mathbf{X}_i^*) \cdot \mathbf{n}_i = - \sum_{j=1}^n Q_j \nabla E_j(\mathbf{X}_i^*) \cdot \mathbf{n}_i \quad (2.7)$$

と求め、(2.3) により頂点での法線速度 $\{V_i\}_{i=1}^n$ を決定する。ここでのポイントは、 $\{v_i\}_{i=1}^n$ を計算する際に、勾配 ∇P_n を厳密に計算できることである。これは、他の多くの数値解法と異なる点である。

2.4 Step 3 : UDM による接線速度 $\{W_i\}_{i=1}^n$ の計算

頂点の分布が密になりすぎたり疎になりすぎたりするのを防ぐために、接線速度を一様配置法 (Uniform Distribution Method, UDM) により与える。結果として、接線速度 $\{W_i\}_{i=1}^n$ は、次で与えられる：

$$W_1 = \frac{W_1 \cos_1 + \Psi_i}{\cos_i}, \quad \Psi_i = \sum_{l=2}^i \psi_l, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$\psi_j = -V_j \sin_j - V_{j-1} \sin_{j-1} + \frac{\dot{L}}{n} + \left(\frac{L}{n} - r_j \right) \omega, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

$$W_1 = -\frac{\sum_{i=2}^n \Psi_i / \cos_i}{\cos_1 \sum_{j=1}^n (\cos_j)^{-1}}.$$

ただし、 $\omega = \omega(n, t)$ は緩和項であり、 $\omega(n, t) = \partial_t f(n, t)$ と定義される。もし $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} f(n, t) = \infty$ が満たされるならば、 $\int_0^{T_{\max}} \omega(n, t) = \infty$ が成り立つ。ただし、 T_{\max} は最終計算時刻を表す。もし $T_{\max} = \infty$ ならば、 ω として定数をとれば良い。実際、後に示す数値実験では、 $f(n, t) = 10nt$ 、すなわち $\omega = 10n$ と取っている (第3節を参照されたい)。

2.5 Note for Step 2

ここでは、多角形領域の周長 $L = |\Gamma|$ 、面積 $A = |\Omega|$ 、重心 \mathbf{G} の時間発展の式を導出し、そこから、(2.6) の第2式に現われる重み付き平均条件の由来を説明する。

まず、 L は明らかに次で定義される：

$$L = \sum_{i=1}^n r_i.$$

次に、 A は次で与えられる：

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{n}_i) r_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{i-1}^\perp \cdot \mathbf{X}_i.$$

これは、基点 (原点) を適当に取り、そこを頂点とした Ω の三角形分割を考え、その三角形の符号付き面積を足し合わせるにより得られるものである (もちろん、面積の定義から計算することで求めることもできる)。最後に、 \mathbf{G} は次で与えられる：

$$\mathbf{G} = \frac{1}{3A} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{i-1}^\perp \cdot \mathbf{X}_i) \mathbf{X}_i^*.$$

これは、重心の定義より、次のように計算できる：

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{A} \int_{\Omega} \mathbf{x} \, dS = \frac{1}{3A} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \operatorname{div}(x\mathbf{x}) \\ \operatorname{div}(y\mathbf{x}) \end{pmatrix} dS = \frac{1}{3A} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \mathbf{X} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n}_i) \, ds = \frac{1}{3A} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_i) r_i \mathbf{X}_i^* \\ &= \frac{1}{3A} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{i-1}^\perp \cdot \mathbf{X}_i) \mathbf{X}_i^*. \end{aligned}$$

それでは、時間微分を計算していこう。まず、周長の時間微分は、(2.2), (2.4) 式に示されたように、次で与えられる：

$$\dot{L} = \sum_{i=1}^n \kappa_i v_i r_i.$$

滑らかな閉曲線の運動の時は

$$\dot{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{C}} \kappa V ds$$

であったことに鑑みると、多角形曲線の周長の時間発展の式は、滑らかな曲線のその離散版に対応していると見ることができる。逆に言えば、この対応が成り立つように、離散曲率 κ_i が定義されたのである。次に、面積の時間発展について見てみよう：

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\dot{\mathbf{X}}_{i-1}^\perp \cdot \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_{i-1}^\perp \cdot \dot{\mathbf{X}}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(-\dot{\mathbf{X}}_{i-1} \cdot \mathbf{X}_i^\perp + \mathbf{X}_{i-1}^\perp \cdot \dot{\mathbf{X}}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{i-1} - \mathbf{X}_{i+1})^\perp \cdot \dot{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\mathbf{X}_i - r_i \mathbf{t}_i - (\mathbf{X}_i + r_{i+1} \mathbf{t}_{i+1})] \cdot \dot{\mathbf{X}}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\mathbf{X}_i - r_i (\cos_i \mathbf{T}_i + \sin_i \mathbf{N}_i) - (\mathbf{X}_i + r_{i+1} (\cos_i \mathbf{T}_i - \sin_i \mathbf{N}_i))]^\perp \cdot (V_i \mathbf{N}_i + W_i \mathbf{T}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [-(r_i + r_{i+1}) \cos_i \mathbf{T}_i + (r_{i+1} - r_i) \sin_i \mathbf{N}_i]^\perp \cdot (V_i \mathbf{N}_i + W_i \mathbf{T}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(r_{i+1} - r_i) \sin_i \mathbf{T}_i + (r_i + r_{i+1}) \cos_i \mathbf{N}_i] \cdot \left(\frac{v_i + v_{i+1}}{2 \cos_i} \mathbf{N}_i + W_i \mathbf{T}_i \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (v_i + v_{i+1})(r_i + r_{i+1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i \sin_i (r_{i+1} - r_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i r_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (v_i r_{i+1} + v_{i+1} r_i) + \sum_{i=1}^n W_i \sin_i \frac{r_{i+1} - r_i}{2} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i r_i + \sum_{i=1}^n W_i \sin_i \frac{r_{i+1} - r_i}{2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (v_i r_{i+1} + v_{i+1} r_i) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (v_i r_i + v_{i+1} r_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i r_i + \sum_{i=1}^n W_i \sin_i \frac{r_{i+1} - r_i}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \frac{r_{i+1} - r_i}{2} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i r_i + \sum_{i=1}^n \left(W_i \sin_i - \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \right) \frac{r_{i+1} - r_i}{2}. \end{aligned}$$

滑らかな閉曲線の運動の時は

$$\dot{A} = \int_{\mathcal{C}} V ds$$

であった。したがって、 $\sum_{i=1}^n v_i r_i$ の部分が、上の積分の離散化に対応していると見ることができる。つまり、残りの部分は、滑らかな曲線と多角形曲線との間にできる“誤差”と言える。そこで、この“誤差”の部分を err_A により表そう：

$$\text{err}_A = \sum_{i=1}^n \left(W_i \sin_i - \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \right) \frac{r_{i+1} - r_i}{2}.$$

重心についても同様に丁寧に計算すれば、“誤差”付きの対応物を導出することは可能であるが、その計算はかなり長くなってしまいうので省略することとし、結果だけを次の命題にまとめることにしよう。

命題 2.1. 多角形曲線 $\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i(t)$ は多角形版発展法則 (2.1) にしたがって時間発展するとする。また、 $\Gamma(t)$ により囲まれる内部単連結領域を $\Omega(t)$ により表す。この時、周長 $L = |\Gamma|$ 、面積 $A = |\Omega|$ 、重心 \mathbf{G} の時

間微分は次で与えられる：

$$\dot{L} = \sum_{i=1}^n \kappa_i v_i r_i, \quad \dot{A} = \sum_{i=1}^n v_i r_i + \text{err}_A, \quad \dot{\mathbf{G}} = -\frac{\dot{A}}{A} \mathbf{G} + \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^* v_i r_i + \text{err}_{\mathbf{G}}.$$

ただし、 $\text{err}_A, \text{err}_{\mathbf{G}} := \text{err}_{\mathbf{G}}^1 + \text{err}_{\mathbf{G}}^2$ は次で与えられる誤差項である：

$$\begin{aligned} \text{err}_A &= \sum_{i=1}^n \left(W_i \sin_i - \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \right) \frac{r_{i+1} - r_i}{2}, \\ \text{err}_{\mathbf{G}}^1 &= \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n \left(W_i \sin_i - \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \right) \cos_i (r_i^2 + r_{i+1}^2) \mathbf{T}_i, \\ \text{err}_{\mathbf{G}}^2 &= \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n \left(W_i \sin_i - \frac{v_{i+1} - v_i}{2} \right) \left(3\mathbf{x}_i - 2\sin_i \frac{r_i + r_{i+1}}{2} \mathbf{N}_i \right) (r_{i+1} - r_i). \end{aligned}$$

もし、誤差項 $\text{err}_A, \text{err}_{\mathbf{G}}$ がいずれも 0 であれば、滑らかな曲線において得られた時間発展の式の完全なる多角形曲線バージョンが得られたことになる。この誤差項の振る舞いを制御するために接線速度をうまく定義するのであるが、それについては、次節を参照されたい。ここでは、仮に $\text{err}_A = 0$ が成り立ったとして、そこから面積保存条件のための重み付き平均条件を導出したい。そのために、圧力の近似 P_n が (2.5) の形で与えられ、法線速度 v_i が (2.7) により与えられるとする。この時、

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^n v_i r_i = \sum_{i=1}^n \left(-\sum_{j=1}^n Q_j \nabla E_j(\mathbf{X}_i^*) \cdot \mathbf{n}_i \right) r_i = \sum_{j=1}^n Q_j \left[-\sum_{i=1}^n \nabla E_j(\mathbf{X}_i^*) \cdot \mathbf{n}_i r_i \right] = \sum_{j=1}^n Q_j H_j$$

が成り立つ。これより、(2.6) の第 2 式に現れる重み付き平均条件が得られる。

2.6 Note for Step 3

ここでは、接線速度の式の導出について言及したい。その際、一様配置法に限定するのではなく、接線速度のいくつかの候補についてまとめる形で言及したい。

2.6.1 クリスタライン法

誤差項 $\text{err}_A, \text{err}_{\mathbf{G}}^1, \text{err}_{\mathbf{G}}^2$ に注目すると、全てに共通して $W_i \sin_i - (v_{i+1} - v_i)/2$ という項が現れる。よって、接線速度 $\{W_i\}_{i=1}^n$ を

$$W_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{2\sin_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

と定義すれば、

$$\text{err}_A = 0, \quad \text{err}_{\mathbf{G}}^1 = \text{err}_{\mathbf{G}}^2 = \mathbf{0}$$

となり、誤差項は全て消えることになる。このようにして接線速度を定義する方法はクリスタライン法と呼ばれる。由来はその名の通り、この接線速度の定義の下では、多角形曲線の運動はクリスタライン運動に一致するからである。誤差項が全て消えることは大変魅力的であるが、この場合、次のような“問題点”が生じる：

- $\sin_i = 0$ となる点では、接線速度を定義することができない。これは、第 i 辺 Γ_i と第 $i+1$ 辺 Γ_{i+1} が一直線上にあることに対応するが、このような状況に対応できないのは非常に苦しいだろう。実際、Hele-Shaw 問題のように領域が大変形する問題では、上のような状況は容易に起こりうる。逆に言えば、通常のクリスタライン法では、このようなケースは最初から排除していることになる。

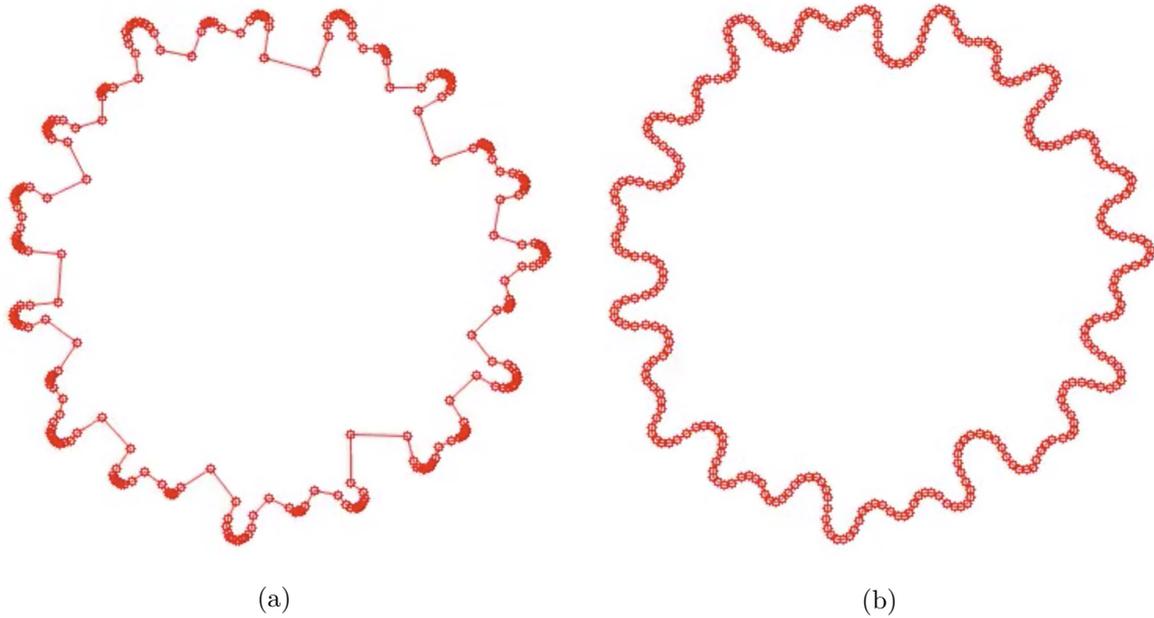


図3 時間に依存する間隙を持つ Hele-Shaw 問題の境界要素法に基づいた数値計算結果：(a) 接線速度を 0 とした場合；(b) 一様配置法により計算した場合。

- 全ての辺の向きが変化しない。より正確に述べれば、次が成り立つ：

$$\dot{t}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

これもクリスタイン法の特徴の 1 つである。しかしながら、上と同様に、この性質は、Hele-Shaw 問題のように領域が大変形するものには必ずしも適しているとは言い難いであろう。

上記の理由により、本論文では、クリスタイン法は採用しないことにする。

2.6.2 一様配置法

誤差項に“のみ”着目すると、クリスタイン法が自然に導かれることがわかったが、それは必ずしも Hele-Shaw 問題の計算に不向きであることがわかった。それでは、“どのような接線速度が適切”なのだろうか。[3]によれば、運動の本質は法線速度にあり、接線速度は境界曲線のパラメータ変換に対応するにすぎない。故に、最もシンプルな方法としては、幾何学的変分構造は無視して、例えば、全ての接線速度を 0 としてしまうことも考えられる。しかしながら、その場合は、計算が短時間で破綻してしまうことが多い。例えば、図 3 に見られるように、接線速度を考慮しないと、多角形曲線の頂点の粗密が激しくなり、計算が短時間で破綻してしまうが、(これから説明する)一様配置法など“適切”な接線速度を用いると、複雑な形状をしているにも関わらず“安定”な計算を行うことができる。つまり、この数値計算結果は、接線速度は数値計算の安定性に影響を与えることを示唆している。それでは、“適切”な接線速度とは、一体なんなのだろうか、という誰しもが思いつく疑問に対して、再び誤差項を見ることにより、ある一定の答えを与えたい。

$W_i \sin_i - (v_{i+1} - v_i)/2$ に着目するのではなく、 err_A と err_G^2 に共通して現れる項 $r_{i+1} - r_i$ に目を向けてみよう。もし、

$$r_i = r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

が成り立てば、 $\text{err}_A = 0$ および $\text{err}_G^2 = \mathbf{0}$ が自動的に従う。これは、各辺の長さが同じであることを意味しており、その意味で、頂点が“一様”に配置されていることになる。これが、一様配置法 (Uniform Distribution Method, UDM) という名前の所以である。もし一様配置法により計算できれば、点の疎密の問題は解消され、安定な数値計算を行うことができると期待できる。そして、それは実際に多くの計算において正しいことが、豊富な先行研究により確かめられている。ところで、実際の数値計算では、数値誤差の影響などもあり、厳密に一様配置を成り立たせるのは困難である。そこで、ここでは、[14] で提案された漸近的一様配置の方法を紹介したい。

アイデアはいたってシンプルであり、次の関係が成り立つことを仮定するのである：

$$r_i(t) - \frac{L(t)}{n} = \eta_i \exp(-f(n, t)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

ただし、 $f(n, t)$ は $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} f(n, t) = \infty$ を満たす関数であり、 $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ は $\sum_{i=1}^n \eta_i = 0$, $|\eta_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を満たす実数である。また、 T_{\max} は最終計算時刻を表す。(2.8) の意味を噛み砕いて説明してみよう。左辺は、一様配置からのズレに対応している。実際、もし一様配置が成り立っているならば、 $r_i = L/n$ となり、左辺は 0 となる。右辺は、“一様配置からのズレが時間について指数的に減衰する”ことを要請する式である。つまり、(2.8) に従えば、最初は必ずしも一様配置でなくとも、指数的な速さで一様配置に近づき、最終計算時刻 $t = T_{\max}$ では完全に一様配置が達成されるように頂点が配置されることになる。

実際に漸近的一様配置の方法を用いて接線速度を計算するために、 W_i の具体的な表示式を求めよう。(2.8) を t について微分すると、

$$\dot{r}_i(t) - \frac{\dot{L}(t)}{n} = -\partial_t f(n, t) \eta_i \exp(-f(n, t)) = \left(\frac{L(t)}{n} - r_i(t) \right) \omega(n, t) \quad (2.9)$$

を得る。ただし、 $\omega(n, t) = \partial_t f(n, t)$ とおいた。一方で、多角形版発展法則 (2.1) を用いれば、 \dot{r}_i は次のようにも計算できる：

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= (\dot{\mathbf{X}}_i - \dot{\mathbf{X}}_{i-1}) \cdot \mathbf{t}_i \\ &= (V_i \mathbf{N}_i + W_i \mathbf{T}_i) \cdot (\cos_i \mathbf{T}_i + \sin_i \mathbf{N}_i) - (V_{i-1} \mathbf{N}_{i-1} + W_{i-1} \mathbf{T}_{i-1}) \cdot (\cos_{i-1} \mathbf{T}_{i-1} + \sin_{i-1} \mathbf{N}_{i-1}) \\ &= V_i \sin_i + V_{i-1} \sin_{i-1} + W_i \cos_i - W_{i-1} \cos_{i-1}. \end{aligned}$$

これを (2.9) に代入すると、次が得られる：

$$W_i \cos_i - W_{i-1} \cos_{i-1} = -V_i \sin_i - V_{i-1} \sin_{i-1} + \frac{\dot{L}}{n} + \left(\frac{L}{n} - r_i \right) \omega. \quad (2.10)$$

このままだと $\{W_i\}_{i=1}^n$ を一意に決められないので、ここでは次の零平均条件も課すことにする（もちろん、これ以外の条件を課しても構わない）：

$$\sum_{i=1}^n W_i = 0. \quad (2.11)$$

(2.10), (2.11) を $\{W_i\}_{i=1}^n$ について解くことにより、次の表現を得る：

$$W_1 = -\frac{\sum_{i=2}^n \Psi_i / \cos_i}{\cos_1 \sum_{l=1}^n (\cos_l)^{-1}}, \quad W_i = \frac{W_1 \cos_1 + \Psi_i}{\cos_i} \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

ただし、

$$\Psi_i = \sum_{l=2}^i \psi_l \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad \psi_l = -V_l \sin_l - V_{l-1} \sin_{l-1} + \frac{\dot{L}}{n} + \left(\frac{L}{n} - r_l \right) \omega \quad (l = 2, 3, \dots, n).$$

2.6.3 曲率依存型配置法

一様配置法に基づく接線速度を採用すれば、安定かつ長時間の数値計算をできることを述べた。しかしながら、各辺の長さが同じである、という制約の下では、長い曲線を精度よく多角形曲線により近似する際、多くの頂点が必要となる。これは、計算コストの増加につながる問題である。したがって、“より少ない数の点で曲線をよりよく近似できるか”という疑問が生じる。この疑問を解消する1つの方法が、曲率に依存した点配置である。つまり、曲率の絶対値が小さいところは、ほぼ直線に近いので点の数は少なく、曲率の絶対値が大きいところには多くの点を配置するのである。その具体的な式の導出は、例えば [13] を参考にさせていただきたいが、結果として、次の形の接線速度が得られる：

$$W_1 = -\frac{\sum_{i=2}^n \Psi_i r_i^*}{L\varphi(k_1^*)} \quad W_i = \frac{W_1\varphi(k_1^*) + \Psi_i}{\varphi(k_i^*)} \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

ただし、

$$\begin{aligned} \psi_l &= \varphi(k_l)r_l \left[\frac{\langle f \rangle}{\langle \varphi(k) \rangle} - \frac{f_l}{\varphi(k_l)} + \left(\frac{L}{nr_l} \frac{\langle \varphi(k) \rangle}{\varphi(k_l)} - 1 \right) \omega \right] \quad (l = 2, 3, \dots, n), \\ f_l &= \varphi(k_l)k_l v_l - \varphi'(k_l) \left[\frac{1}{r_l} \left(\frac{v_{l+1} - v_l}{r_l^*} - \frac{v_l - v_{l-1}}{r_{l-1}^*} \right) \right] \quad (l = 2, 3, \dots, n), \\ \langle f \rangle &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n f_i r_i, \quad \langle \varphi(k) \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n \varphi(k_i) r_i, \\ r_i^* &= \frac{r_i + r_{i-1}}{2}, \quad k_i^* = \frac{k_i + k_{i-1}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

であり、 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は次の条件を満たす函数 (shape function) である：

$$\varphi(-k) = \varphi(k) (> 0), \quad \varphi \text{ は } (0, \infty) \text{ 上で単調増加.}$$

φ の具体的な定義については、様々な可能性があるが、その選択に応じて、様々な接線速度が得られる。

- $\varphi(k) \equiv 1$ ならば一様配置法.
- $\varphi(k) = |k|$ ならばクリスタライン法.
- $\varphi(k) = \sqrt{1 - \epsilon + \epsilon k^2}$ ($\epsilon \in (0, 1)$)；これはクリスタライン法の正則化に対応する.
- $\varphi(k) = 1 - \epsilon + \epsilon \sqrt{1 - \epsilon + \epsilon k^2}$ ；これは上で挙げたものの線型結合である.

ここまでで、クリスタライン法、一様配置法、曲率依存型配置法を説明したが、いずれにも共通して言えることは、

接線速度の表示式が法線速度の線形関係式として与えられる

ことである。すなわち、法線速度さえ計算できれば、そこから接線速度を求めるのは自動的に行えるという事である。

2.7 幾何学的変分構造

ここまでで構成した数値計算スキームを用いた時に、本論文の目的に述べた、幾何学的変分構造 (周長減少, 面積保存, 重心不変) はどうなるのだろうか。この当初の目的に対する疑問に答える形で、次の定理を、証明無しに紹介することにしよう。

定理 2.2. 接線速度は一樣配置法により計算することにし、また、初期の点配置で一樣配置が満たされていると仮定する。この時、次が成り立つ：

$$\dot{L} \leq -\frac{1}{\gamma} \|\nabla P_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{n}, \quad \dot{A} = 0, \quad |\dot{G}| \leq \frac{C_2}{n}.$$

つまり、面積保存は厳密に満たされ、周長減少ならびに重心不変は $n \rightarrow \infty$ の極限で成立する。この意味で、漸近的周長減少ならびに漸近的重心不変が成り立つ。

3 数値実験

ここでは、簡単な数値計算の結果を報告する。パラメータを

$$n = 100, \quad \gamma = 1, \quad z_j = 1000\mathbf{y}_j, \quad \tau = 1/(10n^2), \quad \omega = 10n, \quad d = n^{-1/2}, \quad T_{\max} = 0.9$$

と取り、初期曲線 $\mathcal{C}(0): [0, 1] \ni u \mapsto \mathbf{X}(u) = (x_1(u), x_2(u))^T \in \mathbb{R}^2$ は次により与えられるとする：

$$\begin{aligned} x_1(u) &= 0.5a_1(u), & x_2(u) &= 0.5a_3(u), \\ a_1(u) &= 1.8 \cos(2\pi u), & a_3(u) &= 0.5 \sin(2\pi u) + \sin a_1(u) + a_2(u) \sin(2\pi u), \\ a_2(u) &= 0.2 + \sin(\pi u) \sin(6\pi u) \sin(2a_1(u)). \end{aligned}$$

ただし、 τ は、Runge-Kutta 法における時間刻み幅を表す。

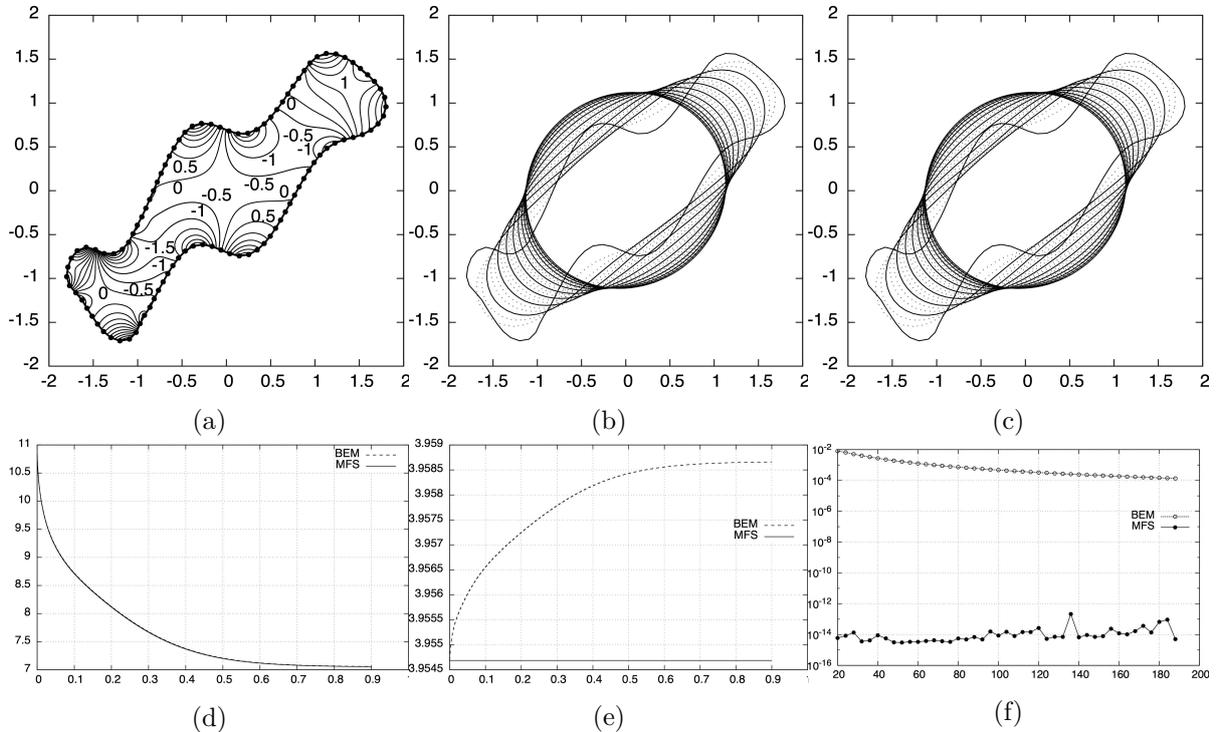


図4 数値計算の結果：(a) 初期曲線；(b) 我々の数値計算スキーム（MFS）で計算した時間発展の結果；(c) 境界要素法（BEM）を基にした数値計算スキームで計算した時間発展の結果；(d) 周長の時間発展；(e) 面積の時間発展；(f) 面積の精度.

図 4 (b), (c) は, それぞれ, 法線速度の計算において, 我々の方法 (基本解近似解法 & 重み付き平均条件) で計算したものと, 境界要素法により計算した結果を表す. 見た目にはその時間発展の様子に違いはなく, 周長の時間発展の様子もほぼ同じであると言ってよいだろう (図 4 (d) を参照せよ). しかしながら, 面積の時間発展において, その差は顕著に見受けられる (図 4 (e) を参照せよ). 実際, 基本解近似解法を用いた場合は, 面積保存が達成されているが, 境界要素法を用いた場合は, 面積が増加してしまっている. また, その相対誤差の振る舞いを, 頂点の数を増やしていった際にどのようなようになるかを計算した結果を図 4 (f) に示しているが, 精度の差は歴然であろう.

4 まとめ

本論文では, Hele-Shaw 問題に対する, 幾何学的変分構造を保存する数値解法の構築を目標に, そのアイデアを丁寧に記述し, 基本解近似解法および一様配置法を用いることで, 簡便であるが, 幾何学的変分構造を漸近的な意味で満たす数値計算スキームを構築した. なお, 本論文のタイトルには, “様々な Hele-Shaw 型問題” と記述したが, 本文中では, 古典的 Hele-Shaw 問題のみ扱った. しかしながら, 本論文の内容が本質的であり, 同じアイデアを応用することで, 古典的 Hele-Shaw 問題以外にも, 二相 Hele-Shaw 問題, 時間に依存する間隙を持つ Hele-Shaw 問題などに対して, 対応する変分構造を満たす数値計算スキームを構築することができる.

謝辞

本研究集会で講演する機会を与えていただきました, 世話人の皆さまに感謝申し上げます. また, 本研究は, 科研費 (No. 18K13455) の助成を受けています.

参考文献

- [1] Sigurd Angenent and Morton E Gurtin. Multiphase thermomechanics with interfacial structure 2. Evolution of an isothermal interface. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 108(3):323–391, 1989.
- [2] Michal Benes, Masato Kimura, and Shigetoshi Yazaki. Second order numerical scheme for motion of polygonal curves with constant area speed. *Interfaces and Free Boundaries*, 11(4):515–536, 2008.
- [3] CL Epstein and Michael Gage. The curve shortening flow. In *Wave motion: theory, modelling, and computation*, pages 15–59. Springer, 1987.
- [4] Morton E Gurtin. Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane. *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane, by Morton E Gurtin, pp. 160. Foreword by Morton E Gurtin. Oxford University Press, Jun 1993. ISBN-10: 0198536941. ISBN-13: 9780198536949, page 160, 1993.*
- [5] Björn Gustafsson and Alexander Vasil’ev. *Conformal and potential analysis in Hele-Shaw cells*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [6] Henry Selby Hele-Shaw. The flow of water, 1898.
- [7] Masato Kimura. Geometry of hypersurfaces and moving hypersurfaces in \mathbb{R}^m for the study of moving

- boundary problems. *Topics in Mathematical Modeling*, 4:39–93, 2008.
- [8] Masato Kimura, Daisuke Tagami, and Shigetoshi Yazaki. Polygonal Hele-Shaw problem with surface tension. *Interfaces and Free Boundaries*, 15(1):77–94, 2013.
 - [9] Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1993.
 - [10] Kazuo Murota. Comparison of conventional and “invariant” schemes of fundamental solutions method for annular domains. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 12(1):61–85, 1995.
 - [11] Koya Sakakibara and Shigetoshi Yazaki. Method of fundamental solutions with weighted average condition and dummy points. *JSIAM Letters*, 9:41–44, 2017.
 - [12] Koya Sakakibara and Shigetoshi Yazaki. On invariance of schemes in the method of fundamental solutions. *Applied Mathematics Letters*, 73:16–21, 2017.
 - [13] Daniel Ševčovič and Shigetoshi Yazaki. Evolution of plane curves with a curvature adjusted tangential velocity. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 28(3):413, 2011.
 - [14] Daniel Ševcovic and Shigetoshi Yazaki. On a gradient flow of plane curves minimizing the anisoperimetric ratio. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 43(3):160–171, 2013.
 - [15] Jean E Taylor. Motion of curves by crystalline curvature, including triple junctions and boundary points. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 54, pages 417–438, 1993.
 - [16] 室田 一雄. 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について. *情報処理学会論文誌*, 34(3):533–535, 1993.
 - [17] 矢崎 成俊. **界面現象と曲線の微積分**. 共立出版, 2016.