

Phase field method for mean curvature flow with dynamic boundary condition

高棹 圭介 (京都大学 数学教室/白眉センター)

email: k.takasao@math.kyoto-u.ac.jp

概要

動的境界条件を持つ Allen-Cahn 方程式の解の特異極限問題を考える。全空間における Allen-Cahn 方程式の解の特異極限として平均曲率流が得られることはよく知られている。本報告では、まず動的境界条件を持つ平均曲率流の弱解を定義し、さらに適切な仮定の下ではその弱解が動的境界条件を持つ Allen-Cahn 方程式の解の特異極限から得られることを示す。本報告の内容は、儀我美一氏 (東京大学) および尾上文彦氏 (Scuola Normale Superiore/東京大学) との共同研究に基づく。

1 導入

以下の動的境界条件を持つ Allen-Cahn 方程式の解の特異極限問題を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2}, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \Gamma \times (0, \infty), \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\varepsilon > 0$, $d \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は滑らかな境界 Γ を持つ有界領域, $W(s) := (1 - s^2)^2/2$, ν は Γ の外向き単位法線ベクトルである。 $\varepsilon \downarrow 0$ としたとき、 Ω の内部では (1) の解の特異極限が平均曲率流方程式の弱解になることが知られており (例えば [2, 3, 9] を参照), Neumann 境界条件に関しては、解の特異極限が Neumann 境界条件を持つ平均曲率流方程式の Brakke 解 [1] に収束することが [10, 13] によって示されている。また、動的境界条件に対する境界値問題については、様々な方程式に関して多くの研究がなされている (例えば [4, 5, 8, 11] を参照)。本研究では、適切な仮定の下で (1) の解の特異極限が次の動的境界条件を持つ平均曲率流方程式の Brakke 解に収束することを示す：

$$\begin{cases} v = h, & \text{on } M_t, t > 0, \\ v_b = \frac{1}{\tan \theta} n_b, & \text{on } M_t \cap \Gamma, t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $M_t \subset \Omega$ は向き付け可能な超曲面, v, h はそれぞれ M_t の法線速度ベクトルと平均曲率ベクトル, v_b と n_b はそれぞれ Γ における ∂M_t の法線速度ベクトルと内向き単位法線ベクトル (v_b と n_b は Γ に接しているこ

本研究は科研費 (課題番号: 26220702, 17H01091, 16H03948, 16K17622, 18H03670) 及び科学技術人材育成費補助金 (卓越研究員事業, 代表:高棹圭介), 文部科学省 博士課程教育リーディングプログラム (東京大学 尾上文彦) の助成を受けたものである。

とに注意), そして θ は M_t と n_b のなす角である. 特に, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときは $\frac{1}{\tan \theta} = 0$ と定義する. 例えば (Ω が有界ではないものの), $d = 2$, $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ (上半平面), M_t を, Γ と 2 点で接する曲線としたとき, 図 1 のようになる. (2) に対する先行研究として, [6] が粘性解の存在及び一意性をレベルセット法によって示している.

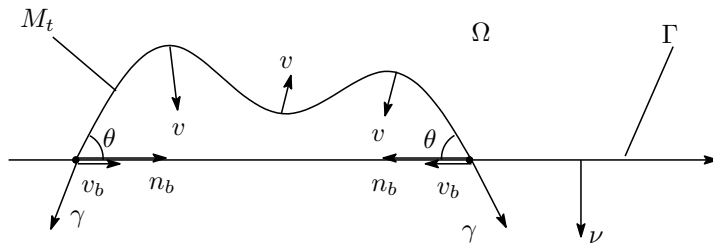


図 1

Remark 1. 図 2 のように, 上半平面 Ω と中心との距離が 1 であり半径が $R > 1$ の円を初期値とする \mathbb{R}^2 内の曲率流を N_t とすると, 円弧 $M_t = N_t \cap \Omega$ は (2) の解になっている [7]. これを確かめてみよう.

まず, N_t が半径 $R > 1$ の円を初期値とする曲率流であることから, $r(t) := \sqrt{R^2 - 2t}$ とすると, $N_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - (0, -1)| = r(t)\}$ とかける. ここで $\frac{dr}{dt}(t) = \frac{-1}{r(t)}$ であることに注意. これは円の縮む速さがちょうど曲率と一致していることに他ならない. θ の定義から, $\frac{1}{r(t)} = \cos \theta$ である. さらに, $\frac{|v|}{|v_b|} = \sin \theta$ であることに注意すると, 境界条件 $v_b = \frac{1}{\tan \theta} n_b$ が得られる. 以上から, 円弧 $M_t = N_t \cap \Omega$ は (2) の解になっていることが示せた.

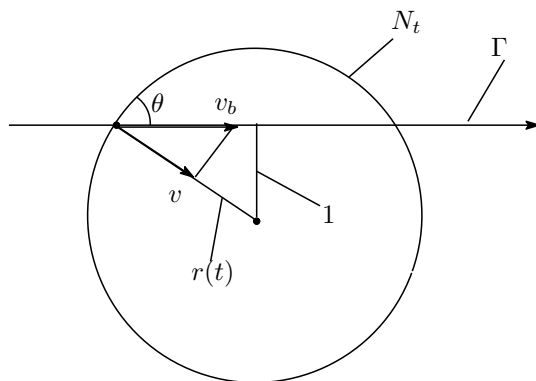


図 2

2 動的境界条件付き平均曲率流方程式 (2) の形式的な導出

次に, (1) から (2) が形式的に得られることを確かめてみよう. まずは (2) の第 1 式を導く. Allen-Cahn 方程式の性質から, Ω は $\{x \in \mathbb{R}^d : u^\varepsilon(x, t) \approx +1\}$ と $\{x \in \mathbb{R}^d : u^\varepsilon(x, t) \approx -1\}$ の 2 相に分けられる (図 3). その境界を $M_t^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : u^\varepsilon(x, t) = 0\}$ とする. M_t^ε が平均曲率流の近似であることを示せばよい. $q^\varepsilon(r) := \tanh(r/\varepsilon)$ とおく. すると q^ε は以下を満たす:

$$\frac{\varepsilon(q_r^\varepsilon)^2}{2} = \frac{W(q^\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad q^\varepsilon(\pm\infty) = \pm 1, \quad q^\varepsilon(0) = 0, \quad \text{and} \quad q_r^\varepsilon(r) > 0, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

さらに, 関数 r^ε を, $r^\varepsilon(x, t) := (q^\varepsilon)^{-1}(u^\varepsilon(x, t))$ で定める ($(q^\varepsilon)^{-1}$ は q^ε の逆関数). r^ε は, 曲面 M_t^ε に対する符号付き距離関数の近似とみなせることが知られている. $g(q) := \sqrt{2W(q)}$ とおく. (3) より

$$q_r^\varepsilon = \frac{g(q^\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad q_{rr}^\varepsilon = \frac{(g(q^\varepsilon))_r}{\varepsilon} = \frac{g_q(q^\varepsilon)}{\varepsilon} q_r^\varepsilon \quad (4)$$

が成り立つ. (1), (3), (4) を用いると

$$\begin{aligned} q_r^\varepsilon r_t^\varepsilon &= q_r^\varepsilon \Delta r^\varepsilon + q_{rr}^\varepsilon |\nabla r^\varepsilon|^2 - q_{rr}^\varepsilon \\ &= q_r^\varepsilon \Delta r^\varepsilon + q_r^\varepsilon \frac{g_q}{\varepsilon} (|\nabla r^\varepsilon|^2 - 1) \end{aligned}$$

であることから

$$r_t^\varepsilon = \Delta r^\varepsilon + \frac{g_q}{\varepsilon} (|\nabla r^\varepsilon|^2 - 1) \quad (5)$$

を得る. ここで, r^ε が M_t^ε の符号付き距離関数の近似であることから, $|\nabla r^\varepsilon| \approx 1$ であると仮定すると $r_t^\varepsilon \approx \Delta r^\varepsilon$ を得る. これは平均曲率流を符号付き距離関数に関して表現したものに他ならない.

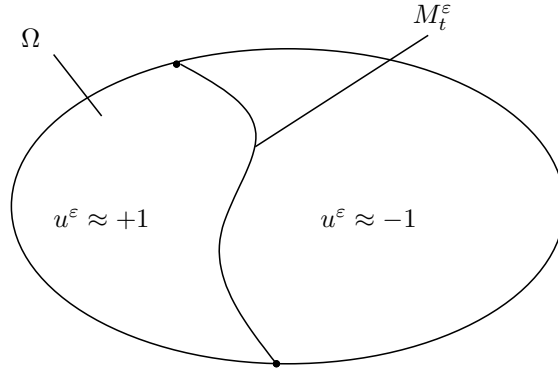


図 3

次に (2) の第 2 式を導出しよう. (1) の境界条件から,

$$\frac{-u_t^\varepsilon}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} = \frac{\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} = \frac{|\nabla u^\varepsilon|}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} \frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|} \cdot \nu$$

を得る. 図 4 のように n_b を決めると, $\frac{-u_t^\varepsilon}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} \approx v_b \cdot n_b$, $\frac{|\nabla u^\varepsilon|}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} \approx \frac{1}{\sin \theta}$, $\frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|} \cdot \nu \approx \cos \theta$ であるので, (2) の動的境界条件が導出された. 以上から形式的に, (1) から (2) を得ることができた.

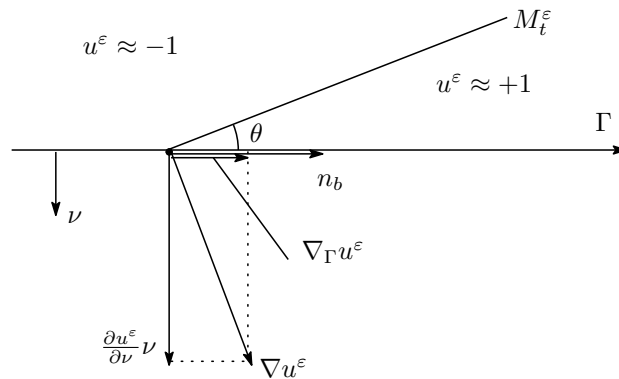


図 4

3 弱解の定義

(2) の弱解を導入する前に、古典解に対して成り立つ事柄を述べる。簡単のため、まずは $\{M_t\}_{t \geq 0}$ を、 \mathbb{R}^d 内の平均曲率流を考える ($\partial M_t = \emptyset$ であることに注意)。任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ と任意の非負関数 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ に対して、部分積分から以下の不等式を得る:

$$\int_{M_t} \phi d\mathcal{H}^{d-1} \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} \left(-\phi|h|^2 + \nabla\phi \cdot h + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) d\mathcal{H}^{d-1} dt. \quad (6)$$

(6) は Brakke の不等式と呼ばれ、明らかに等式で成り立つものであるが、実は平均曲率流を特徴づけるには不等式で十分であることが知られている。即ち、次が成り立つ (証明は [14] 参照):

Proposition 2. $M \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ を滑らかな超曲面とし、 $M_t := \{x \in \mathbb{R}^d : (x, t) \in M\}$ とする。このとき以下は同値である:

1. $\{M_t\}_{t \geq 0}$ は平均曲率流である。
2. 任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ と任意の非負関数 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ に対して (6) が成り立つ。

Remark 3. (6) において不等号を考える理由として、Proposition 2 に加えて、弱解の定義には不等号の方が都合が良いことが挙げられる (Remark 10 参照)。

次に、 $\{M_t\}_{t \geq 0}$ を、 $\partial M_t \subset \Gamma$ を満たす平均曲率流とし、境界条件は課さないとする。先程と同様に、任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ と $\nabla\phi \cdot \nu = 0$ on Γ を満たす任意の非負関数 $\phi \in C_c^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ に対して、以下の不等式を得る:

$$\int_{M_t} \phi d\mathcal{H}^{d-1} \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} \left(-\phi|h|^2 + \nabla\phi \cdot h + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) d\mathcal{H}^{d-1} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial M_t} \phi v_b \cdot \gamma d\mathcal{H}^{d-2} dt.$$

ここで、 γ は ∂M_t の外向き法線ベクトルである (図 1, 図 5 参照)。上式に (2) の境界条件を課すと、図 5 より $v_b \cdot \gamma = -|\cos\theta||v_b|$ であることと、 $|\cos\theta| = |v_b| \sin\theta$ から

$$\int_{M_t} \phi d\mathcal{H}^{d-1} \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} \left(-\phi|h|^2 + \nabla\phi \cdot h + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) d\mathcal{H}^{d-1} dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial M_t} \phi |v_b|^2 \sin\theta d\mathcal{H}^{d-2} dt \quad (7)$$

を得る (v_b は、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なら n_b と同じ向き、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ なら n_b と逆向きになるので、必ず $\gamma \cdot v_b \leq 0$ となることに注意)。以上から、動的境界条件を考える場合には (6) の代わりに (7) を弱解として考えればよいと推測できる。しかし、(7) のみでは境界条件を表現できないため、境界条件に関しては、[13] による Neumann 境界条件の定式化を動的境界条件に置き換えて考察する。Varifold の表記に従って、曲面 M_t の第 1 変分を δV_t で表す。境界を持つ曲面 M_t に対する第 1 変分は、任意の $g \in C_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して

$$\delta V_t(g) = \int_M \operatorname{div}_M g d\mathcal{H}^{d-1} = - \int_{M_t} h \cdot g d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{M_t} \gamma \cdot g d\mathcal{H}^{d-2} \quad (8)$$

で与えられることに注意すると、 $\delta V_t|_{\Gamma}(g) = \int_{M_t} \gamma \cdot g d\mathcal{H}^{d-2}$ である。これと動的境界条件から

$$\begin{aligned} \delta V_t|_{\Gamma}(g - (g \cdot \nu)\nu) &= \int_{M_t} \gamma \cdot (g - (g \cdot \nu)\nu) d\mathcal{H}^{d-2} = \int_{M_t} (\gamma \cdot n_b) n_b \cdot (g - (g \cdot \nu)\nu) d\mathcal{H}^{d-2} \\ &= \int_{M_t} (-\cos\theta) n_b \cdot g d\mathcal{H}^{d-2} = - \int_{M_t} v_b \cdot g \sin\theta d\mathcal{H}^{d-2}, \end{aligned}$$

即ち

$$\delta V_t|_{\Gamma}(g - (g \cdot \nu)\nu) = - \int_{M_t} v_b \cdot g \sin \theta d\mathcal{H}^{d-2} \quad (9)$$

を得る。(9) は動的境界条件とみなすことができる。

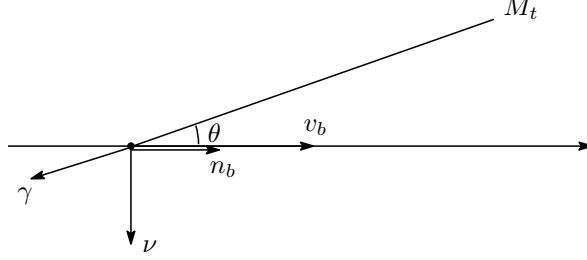


図 5

varifold の第 1 変分を以下で定める。

Definition 4. d 次正方行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ について $A : B = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}b_{ij}$ とする。 $M \subset \bar{\Omega}$ を $(d-1)$ -次元修正可能集合とし, θ を M 上可積分な正值関数とする。 Radon 測度 $\mu := \theta \mathcal{H}^{d-1}|_M$ から自然に導出される varifold を V とおく (詳しくは [14] 参照)。 V の第 1 変分を, $g \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ に対して $\delta V(g) := \int_{\bar{\Omega}} T_x \mu : \nabla g d\mu$ で定める。ここで $T_x \mu$ は $x \in \text{spt } \mu$ における概接平面である。

本報告における (2) の弱解を以下で定義する。

Definition 5 (動的境界条件付き Brakke の平均曲率流)。 $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ を, $\bar{\Omega}$ 上の Radon 測度の族とする。 α を, $\Gamma \times [0, \infty)$ 上の Radon 測度, $v_b \in (L^2_{loc}(\alpha, \Gamma \times [0, \infty)))^d$ とする。以下が成り立つとき, $(\{\mu_t\}_{t \geq 0}, \alpha, v_b)$ の 3 つの組を動的境界条件付き Brakke の平均曲率流とよぶ:

1. 殆ど至る所の $t \geq 0$ に対して, $(d-1)$ -次元修正可能集合 M_t と, M_t 上で定義され, \mathcal{H}^{d-1} の意味で可積分な正值関数 θ_t が存在して, $\mu_t = \theta_t \mathcal{H}^{d-1}|_{M_t}$ が成り立つ。
2. 以下の測度の絶対連続性が成り立つ:

$$\left\| \int_0^\infty \delta V_t|_{\Omega} + \delta V_t|_{\Gamma}^\top dt + S_{\alpha, v_b} \right\| \ll \mu \quad \text{on } \bar{\Omega} \times [0, \infty). \quad (10)$$

ここで, $d\mu := d\mu_t dt$, $\delta V_t|_{\Gamma}^\top(g) := \delta V_t|_{\Gamma}(g - (g \cdot \nu)\nu)$ ($g \in (C_c(\bar{\Omega}))^d$), $\int_0^\infty \delta V_t|_{\Gamma}^\top dt$ は $g \in (C_c(\bar{\Omega} \times [0, \infty)))^d$ に対して $\int_0^\infty \delta V_t|_{\Gamma}^\top(g(\cdot, t)) dt$ で定義される測度, $S_{\alpha, v_b}(g) := \int_{\Gamma \times [0, \infty)} g \cdot v_b d\alpha$ ($g \in (C_c(\bar{\Omega}))^d$) である。

3. 任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ と $\nabla \phi \cdot \nu = 0$ on Γ を満たす任意の非負関数 $\phi \in C_c^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ に対して, 以下の不等式が成り立つ:

$$\int_{\bar{\Omega}} \phi d\mu_t \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\bar{\Omega}} \left(-\phi |h|^2 + \nabla \phi \cdot h + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) d\mu_t dt - \int_{\Gamma \times (t_1, t_2)} \phi |v_b|^2 d\alpha. \quad (11)$$

ここで h は,

$$\int_0^\infty \delta V_t|_{\Omega} + \delta V_t|_{\Gamma}^\top dt + S_{\alpha, v_b} = -h\mu \quad (12)$$

で定義されるベクトル値関数である。

Remark 6.

1. 最初の条件は, Radon 測度 μ_t が θ_t という重み関数付きのほぼ C^1 級の曲面であることを表すものである.
2. $d\mu_t \approx d\mathcal{H}^{d-1}|_{M_t}$, $d\alpha \approx \sin\theta d\mathcal{H}^{d-2}|_{\partial M_t} dt$ とみなせる.
3. (10) の左辺に含まれる測度の台は $\Gamma \times [0, \infty)$, 右辺の μ の台は $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ に含まれるということに注意すると, もし $\mu(\Gamma \times [0, \infty)) = 0$ であれば, $\int_0^\infty \delta V_t|_\Gamma^\top dt = -S_{\alpha, v_b}$, 即ち, 任意の $g \in C_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_0^\infty \int_{\partial M_t} \gamma \cdot (g - (g \cdot \nu)\nu) d\mathcal{H}^{d-2} dt \approx \int_0^\infty \delta V_t|_\Gamma^\top(g) dt = -S_{\alpha, v_b}(g) \approx - \int_0^\infty \int_{\partial M_t} g \cdot v_b \sin\theta d\mathcal{H}^{d-2} dt$$

- であるので, (9) より, (10) は動的境界条件に対応しているといえる. 尚, $\mu(\Gamma \times [0, \infty)) = 0$ という条件は, 古典解でいえば M_t が境界 Γ に張り付かないという主張であるが, これがどのような条件で成立するのかは未解決である. 例えば, Neumann 境界条件の場合は, [12] によって Γ に μ_t の台が張り付くような定常解の例が示されている (定常解であれば, 動的境界条件と Neumann 境界条件は同値である).
4. varifold に対する一般化された平均曲率ベクトル h は通常 (8) の等式を用いて定義されるが, 曲面 M_t は Γ に張り付く場合も考えられるため, 本研究における弱い意味での平均曲率ベクトル h は (12) によって定義している.

4 主結果

まず, 動的境界条件付き Brakke の平均曲率流に収束する近似列を定義する.

Definition 7. u^ε を (1) の解とし, $\sigma := \int_{-1}^{+1} \sqrt{2W(s)} ds$ とする. Ω 上の Radon 測度 μ_t^ε , $\Gamma \times [0, \infty)$ 上の測度 α^ε , $\Gamma \times [0, \infty)$ 上のベクトル値関数 v_b^ε を以下で定義する:

$$d\mu_t^\varepsilon := \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\varepsilon |\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)|^2}{2} + \frac{W(u^\varepsilon(\cdot, t))}{\varepsilon} \right) dx, \quad d\alpha^\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\sigma} |\nabla_\Gamma u^\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^{d-1}|_\Gamma dt,$$

$$v_b^\varepsilon := \begin{cases} \frac{-u_t^\varepsilon}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} \frac{\nabla_\Gamma u^\varepsilon}{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|} & \text{if } |\nabla_\Gamma u^\varepsilon| \neq 0, \\ (1, 0, \dots, 0), & \text{if } |\nabla_\Gamma u^\varepsilon| = 0. \end{cases}$$

我々は (1) の解の特異極限に対して以下の結果を得た.

Theorem 8 ([7]). $\{u_0^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ を, ある定数 $D > 0$ が存在して $\sup_{\varepsilon \in (0,1)} \mu_0^\varepsilon(\Omega) \leq D$ が成り立つ関数の族とする. u^ε を, u_0^ε を初期値とする (1) の解とし, μ_t^ε , α^ε , v_b^ε を, Definition 7 によって定義される測度及び関数とする. さらに, 殆ど至る所の $t \geq 0$ に対して,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\varepsilon |\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)|^2}{2} - \frac{W(u^\varepsilon(\cdot, t))}{\varepsilon} \right\|_{L^1(\Omega)} = 0 \quad (13)$$

が成り立つと仮定する. このとき, 以下が成り立つ:

1. ある部分列 $\varepsilon' \rightarrow 0$ と Radon 測度の族 $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ が存在して, 任意の $t \geq 0$ に対して

$$\int_{\bar{\Omega}} \phi d\mu_t^{\varepsilon'} \rightarrow \int_{\bar{\Omega}} \phi d\mu_t, \quad \forall \phi \in C_c(\bar{\Omega})$$

が成り立つ。さらに、Radon 測度 α とベクトル値関数 v_b が存在して

$$\int_{\Gamma \times [0, \infty)} g \cdot v_b^{\varepsilon'} d\alpha^{\varepsilon'} \rightarrow \int_{\Gamma \times [0, \infty)} g \cdot v_b d\alpha, \quad \forall g \in (C_c(\Gamma \times [0, \infty)))^d$$

が成り立つ。

2. $(\{\mu_t\}_{t \geq 0}, \alpha, v_b)$ は動的境界条件付き Brakke の平均曲率流である。

Remark 9. $\Omega' \subset\subset \Omega$ とすると, $\sup_{\varepsilon \in (0, 1)} \mu_0^\varepsilon(\Omega) \leq D$ であれば, 殆ど至る所の $t \geq 0$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\varepsilon |\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)|^2}{2} - \frac{W(u^\varepsilon(\cdot, t))}{\varepsilon} \right\|_{L^1(\Omega')} = 0 \quad (14)$$

を満たす部分列 $\varepsilon' \rightarrow 0$ を取ることが出来る ([9] の単調性公式を用いた手法による)。故に, 仮定 (13) は, 殆ど至る所の $t \geq 0$ について $\mu_t(\Gamma) = 0$ であれば外すことが出来る。Remark 6 で述べたように, これは古典解に置き換えれば “曲面 M_t が境界 Γ に貼りつかない” ということに対応する。仮定 (13) を取り除くには, 境界 Γ での単調性公式を導けば十分であるが, Neumann 境界条件に関しては [10, 13] によって得られているものの, 動的境界条件に関しては未解決である。

5 Brakke の不等式の証明の概略

最後に, 主結果について, Brakke の不等式 (11) に絞って証明の概略を述べる。まず, 測度 $d\alpha \approx \sin \theta d\mathcal{H}^{d-2}|_{\partial M_t} dt$ がどのように近似できるのかを考察する。 $u^\varepsilon = q^\varepsilon(r^\varepsilon)$ とおいたとき, r^ε が M_t^ε の符号付き距離関数の近似になっていることから, $\{u^\varepsilon \approx +1\}$ と $\{u^\varepsilon \approx -1\}$ の境界層の幅はおおよそ ε オーダーであることがわかる。境界層は角度 θ で Γ に接しているため, Γ 上では境界層の幅が $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sin \theta}$ のオーダーに変化する (図 6 参照)。 $\nabla_\Gamma u^\varepsilon$ は, 境界層では $\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}$ のオーダー, 境界層の外ではほぼ 0 であることから, 適当な定数 σ を用いて $d\mathcal{H}^{d-2}|_{\partial M_t} \approx \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sigma} |\nabla_\Gamma u^\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^{d-1}|_\Gamma$ であることがいえる (実際は $\sigma = \int_{-1}^{+1} \sqrt{2W(s)} ds$ とできる)。これと $\frac{|\nabla_\Gamma u^\varepsilon|}{|\nabla u^\varepsilon|} \approx \sin \theta$ より

$$d\mathcal{H}^{d-2}|_{\partial M_t} \approx \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sigma} |\nabla_\Gamma u^\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^{d-1}|_\Gamma \approx \frac{\varepsilon}{\sigma} |\nabla_\Gamma u^\varepsilon| |\nabla u^\varepsilon| d\mathcal{H}^{d-1}|_\Gamma =: d\beta_t^\varepsilon$$

が成り立ち, さらに同様の議論で

$$\sin \theta d\mathcal{H}^{d-2}|_{\partial M_t} \approx \frac{\varepsilon}{\sigma} |\nabla_\Gamma u^\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^{d-1}|_\Gamma =: d\alpha_t^\varepsilon \quad (15)$$

が得られる。以上より, $d\alpha^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sigma} |\nabla_\Gamma u^\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^{d-1}|_\Gamma dt$ によって定められる α^ε は α の近似になっていることがわかった。

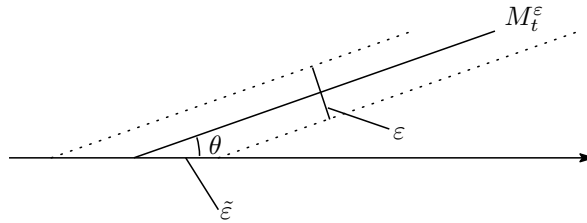


図 6

次に, 平均曲率ベクトルの近似について考察する. $d\tilde{\mu}_t^\varepsilon := \frac{\varepsilon}{\sigma} |\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)|^2 dx$, $d\xi_t^\varepsilon = \sigma^{-1} \left(\frac{\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$ とおく. (13) より,

$$\tilde{\mu}_t^\varepsilon \approx \mu_t^\varepsilon, \quad \xi_t^\varepsilon \approx 0 \quad (16)$$

であることがわかる. $a^\varepsilon := \frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|}$, I を単位行列とする. 任意の $g = (g^1, g^2, \dots, g^d) \in C_c^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ について, 部分積分により以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (I - a^\varepsilon \otimes a^\varepsilon) : \nabla g \, d\mu_t^\varepsilon &= -\sigma^{-1} \int_{\Omega} (g \cdot \nabla u^\varepsilon) \left(-\varepsilon \Delta u^\varepsilon + \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx + \int_{\Omega \cap \{|\nabla u^\varepsilon| \neq 0\}} \nabla g \cdot (a^\varepsilon \otimes a^\varepsilon) \, d\xi_t^\varepsilon \\ &\quad + \sigma^{-1} \int_{\Gamma} (g \cdot \nu) \left(\frac{\varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) d\mathcal{H}^{d-1} - \sigma^{-1} \int_{\Gamma} \varepsilon (g \cdot \nabla u^\varepsilon) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{d-1} \\ &\quad - \sigma^{-1} \int_{\Omega \cap \{|\nabla u^\varepsilon| = 0\}} \nabla g \cdot I \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon} dx =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned} \quad (17)$$

まず, (16) より, $I_2 \approx 0$, $I_5 \approx 0$ である. I_3, I_4 に関しては以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} I_3 + I_4 &\approx \sigma^{-1} \int_{\Gamma} g \cdot \nu \varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 - \varepsilon g \cdot \nabla u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{d-1} = \sigma^{-1} \int_{\Gamma} (g \cdot \nu - (g \cdot a^\varepsilon)(\nu \cdot a^\varepsilon)) \varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\Gamma} g \cdot \frac{|\nabla u^\varepsilon|}{|\nabla_{\Gamma} u^\varepsilon|} (\nu - (\nu \cdot a^\varepsilon) a^\varepsilon) \, d\beta_t^\varepsilon \approx \int_{\partial M_t} g \cdot \gamma \, d\mathcal{H}^{d-2}. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで $\frac{|\nabla u^\varepsilon|}{|\nabla_{\Gamma} u^\varepsilon|} (\nu - (\nu \cdot a^\varepsilon) a^\varepsilon) \approx \frac{1}{\sin \theta} (\nu - (\nu \cdot a^\varepsilon) a^\varepsilon) \approx \gamma$ であることと (図7参照), $\beta_t^\varepsilon \approx \mathcal{H}^{d-2}|_{\partial M_t}$ を用いた. 以上から, $\operatorname{div}_{M_t^\varepsilon} g = (I - a^\varepsilon \otimes a^\varepsilon) : \nabla g$ であることと, (8), (17), (18) より,

$$\int_{M_t} h \cdot g \, d\mathcal{H}^{d-1} \approx \sigma^{-1} \int_{\Omega} (g \cdot \nabla u^\varepsilon) \left(-\varepsilon \Delta u^\varepsilon + \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx \quad (19)$$

が成り立つ. 特に, $h^\varepsilon := \frac{-\varepsilon \Delta u^\varepsilon + \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon}}{|\nabla u^\varepsilon|} a^\varepsilon$ とおくと,

$$\int_{M_t} h \cdot g \, d\mathcal{H}^{d-1} \approx \int_{\Omega} h^\varepsilon \cdot g \, d\tilde{\mu}_t^\varepsilon \quad (20)$$

とかける.

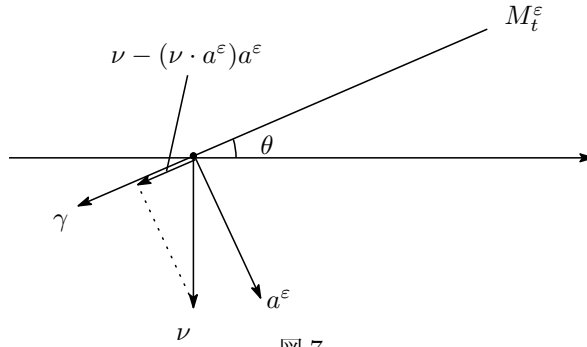


図 7

最後に Brakke の不等式 (11) を示す. $\nabla\phi \cdot \nu = 0$ on Γ を満たす任意の非負関数 $\phi \in C_c^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ に対して, (1) と部分積分により

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mu_t^\varepsilon(\phi) &= \sigma^{-1} \int_{\Omega} \phi \left(\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u_t^\varepsilon + \frac{W'}{\varepsilon} u_t^\varepsilon \right) dx + \int_{\Omega} \phi_t d\mu_t^\varepsilon \\
&= \sigma^{-1} \int_{\Omega} \varepsilon \phi \left(-\Delta u^\varepsilon + \frac{W'}{\varepsilon^2} \right) u_t^\varepsilon dx - \sigma^{-1} \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla\phi \cdot \nabla u^\varepsilon) u_t^\varepsilon dx + \sigma^{-1} \int_{\Gamma} \varepsilon \phi (\nabla u^\varepsilon \cdot \nu) u_t^\varepsilon d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\Omega} \phi_t d\mu_t^\varepsilon \\
&= -\sigma^{-1} \int_{\Omega} \phi |h^\varepsilon|^2 \varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \sigma^{-1} \int_{\Omega} (\nabla\phi \cdot h^\varepsilon) \varepsilon |\nabla u^\varepsilon|^2 dx - \sigma^{-1} \int_{\Gamma} \varepsilon \phi (u_t^\varepsilon)^2 d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\Omega} \phi_t d\mu_t^\varepsilon \\
&= -\int_{\Omega} \phi |h^\varepsilon|^2 d\tilde{\mu}_t^\varepsilon + \int_{\Omega} (\nabla\phi \cdot h^\varepsilon) d\tilde{\mu}_t^\varepsilon - \int_{\Gamma} \varepsilon \phi |v_b^\varepsilon|^2 d\alpha_t^\varepsilon + \int_{\Omega} \phi_t d\mu_t^\varepsilon
\end{aligned} \tag{21}$$

が成り立つ. 最後に, $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき, (16), (21) より (11) が得られ, さらに (15), (20) より, 得られた (11) は (7) の一般化であることがわかる.

Remark 10. h^ε は次の意味で h に弱収束している:

$$\int h^\varepsilon \cdot g d\tilde{\mu}_t^\varepsilon \rightarrow \int h \cdot g d\mu_t, \quad \forall g \in C_c(\bar{\Omega} \times [0, \infty); \mathbb{R}^d), \text{ a.e. } t \geq 0.$$

また, このような収束に対して, 以下の不等式が成り立つ ([9] 参照):

$$\int |h|^2 d\mu_t \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |h^\varepsilon|^2 d\tilde{\mu}_t^\varepsilon.$$

ゆえに, (11) を等式で示すのであれば, 上の不等式も等式で示す必要があるが, それは一般には成り立たない.

参考文献

- [1] Brakke, K. A., *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1978).
- [2] Bronsard, L. and Kohn, R. V., *Motion by mean curvature as the singular limit of Ginzburg-Landau dynamics*, J. Differential Equations, **90** (1991), 211–237.
- [3] Chen, X., *Generation and propagation of interfaces for reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations, **96** (1992), 116–141.
- [4] Fila, M., Ishige, K., Kawakami, T., *Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition*, Calc. Var. Partial Differential Equations **54** (2015), 2059–2078.
- [5] Fila, M., Ishige, K., Kawakami, T., *An exterior nonlinear elliptic problem with a dynamical boundary condition*, Rev. Mat. Complut. **30** (2017), 281–312.
- [6] Giga, Y., Hamamuki, N., *On a dynamic boundary condition for a singular degenerate parabolic equations in a half space*, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, 1110: 1-38
- [7] Giga, Y., Onoue, F. and Takasao, K., *A varifold formulation of mean curvature flow with Dirichlet or dynamic boundary conditions*, arXiv:1810.09107 [math.AP] (2018).
- [8] Hintermann, T., *Evolution equations with dynamic boundary conditions*, Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A **113** (1989), 43–60.

- [9] Ilmanen, T., *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (1993), 417–461.
- [10] Kagaya, T., *Convergence of the Allen-Cahn equation with a zero Neumann boundary condition on non-convex domains*, arXiv:1710.00526 [math.AP] (2017).
- [11] Lions, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris (1969).
- [12] Malchiodi, A. and Wei, J., *Boundary interface for the Allen-Cahn equation*, J. Fixed Point Theory Appl., **1** (2007), 305–336.
- [13] Mizuno, M. and Tonegawa, Y., *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal. **47** (2015), 1906–1932.
- [14] 高棹圭介, 応用数学勉強会レクチャーノート フェイズフィールド法による Brakke の平均曲率流の構成, <http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/tisiwata/Workshops/ousuuws2017.html>