動的境界条件付き熱方程式の拡散極限

川上　竜樹　(龍谷大学 理工学部)*

動的境界条件付き熱方程式

$$
(H) \qquad \begin{cases} \varepsilon\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N,\ \ t>0, \\ \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega,\ \ t>0, \\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi_b(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}
$$

について考察する．ただし, $N \geq 2$であり, $\varepsilon \in (0,1)$ とする．ここで, 初期条件は領域内部で φ, 境界上ではφ で与えられていることに注意する．時間微分を含む問題 (H) の境界条件は動的境界条件と呼ばれ, 完全導体との熱接触, 撹拌された液体や蒸気からの溶質の拡散等, 様々な拡散現象を記述する際に現れる．この問題 (H) に対して, Ω が非有界領域の場合, 特に

(i) Ω が半空間 $\mathbb{R}^N_+$ 　　(ii) Ω が単位球の外部領域 $\{x \in \mathbb{R}^N : |x|>1\}$

の場合について, ε に依らない時間局所(または大域)解の構成と拡散極限 $(\varepsilon \to 0)$ による解の挙動を考察する．

まず, 半空間 $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ の場合について考察する．$P = P(x',t)$ を$N-1$ 次元ポアソン核とし, $\mathcal{P}(x', x_N, t) := P(x', x_N + t)$ とすると, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x,t)$ は斉次動的境界条件付きラプラス方程式の基本解であることがわかる．この $\mathcal{P}$ を用いて, $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の可測関数 φ_b に対して,

$$
[S(t)\varphi_b](x) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{P}(x'-y', x_N, t)\varphi_b(y')\,dy' \tag{1}
$$

と定めると, これは問題 (H) において, $\varepsilon = 0$ とした時の解である．ここでは, 動的境界条件付き半線型楕円型方程式の研究 (例えば [1] 参照) におけるアプローチをもとに, 次の方程式系を考察する．

$$
(S) \qquad \begin{cases} \varepsilon\partial_t v_\varepsilon = \Delta v_\varepsilon - \varepsilon F_1[\varphi_b] - \varepsilon F_2[v_\varepsilon], \qquad \Delta w_\varepsilon = 0, & x \in \mathbb{R}^N_+,\ \ t>0, \\ v_\varepsilon = 0, \quad \partial_t w_\varepsilon - \partial_{x_N} w_\varepsilon = \partial_{x_N} v_\varepsilon, & x \in \partial\mathbb{R}^N_+,\ \ t>0, \\ v_\varepsilon(x,0) = \varphi(x) - [S(0)\varphi_b](x), & x \in \mathbb{R}^N_+, \\ w_\varepsilon(x,0) = \varphi_b(x'), & x = (x',0) \in \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&F_1[\varphi_b](x,t) := \partial_t[S(t)\varphi_b](x), \\
&F_2[v](x,t) := \partial_t \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{P}(x'-y', x_N, t-s)\partial_{x_N} v(y',0,s)\,dy'\,ds
\end{aligned}
$$

である．このとき, v_ε に関する方程式がv_ε について閉じていることに注意する．v_ε を半空間における熱核を用いて積分方程式として記述することにより次の結果が得られる．

* e-mail: kawakami@math.ryukoku.ac.jp

定理 1 ([2]) $N \geq 2$, $\varepsilon \in (0,1)$, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$, $\varphi_b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$ とする．このとき, 問題 (S) の一意な時間大域解 $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ が存在し, 任意の $T > 0$ に対して,

$$\sup_{0<t<T} \left[\|v_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} + (\varepsilon^{-1}t)^{\frac{1}{2}} \|\partial_{x_N} v_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} + \|w_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \right] < \infty$$

が成立する．さらに, $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ は問題 (H) の古典解であり, 任意の $L > 0$ と $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ に対して,

$$\sup_{\tau_1<t<\tau_2} \|u_\varepsilon(t) - S(t)\varphi_b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}\times(0,L))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

が成立する．

定理 1 から, 拡散極限を考えると, 問題 (H) の解 u_ε は動的境界条件付きラプラス方程式の解 (1) に収束することがわかる．このとき, 領域内部における初期値 φ の情報が失われていることに注意する．また, ε に関する収束の速さ (2) は最適である．([3] 参照.)

次に, 単位球の外部領域$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$ の場合について考察する．ここでは $N > 2$ とする．この場合, 半空間の場合とは異なり, フーリエ変換と調和拡張を用いて基本解を得ることはできないが, 単位球におけるポアソン核を元に, 本問題の基本解を構成することができる．実際, $P = P(x,y)$ を単位球におけるポアソン核, $K = K(x,y)$ を P の x に関する Kelvin 変換とする．この K に対して, $\mathcal{K}(x,y,t) := K(e^t x, y)$ とおくと, $\mathcal{K}$ は Ω における動的境界条件付きラプラス方程式の基本解となる．よって, この基本解と Ω における斉次ディリクレ境界条件下での熱核を用いることにより, 半空間の場合と同様に問題 (H) の解を積分方程式として定義することができる．

定理 2 ([4]) $N \geq 3$, $\varepsilon \in (0,1)$ とする．ある $\theta \in (0,1)$ に対して, $\varphi_b \in C^{1,\theta}(\partial\Omega)$ であり, $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ は $\sup_{x\in\Omega} |x|^{N-2}\varphi(x) < \infty$ を満たすとする．このとき, ある定数$T > 0$が存在して, $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ は問題 (S) の $\Omega \times (0,T)$ 上の一意解であり,

$$\sup_{0<t<T} \left[\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + (\varepsilon^{-1}t)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \right] < \infty$$

を満たす．さらに, さらに, $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ は問題 (H) の古典解であり, 任意の $0 < \tau < T$ に対して,

$$\sup_{\tau<t<T} \|u_\varepsilon(t) - S(t)\varphi_b\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$$

が成立する．ここで, α は $\alpha = 1$ $(N = 3)$, $\alpha \in (1,2)$ $(N \geq 4)$ を満たす定数である．

本講演は Marek Fila 氏 (Comenius 大学), 石毛 和弘氏 (東京大学), Johanes Lankeit 氏 (Comenius 大学) との一連の共同研究 [2, 3, 4] に基づく．

参考文献

[1] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, J. Math. Pures Appl. 105 (2016), 788–809.

[2] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition, submitted.

[3] M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami and J. Lankeit, Rate of convergence in the large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition, Asymptot. Anal. **114** (2019), 37–57.

[4] M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami and J. Lankeit, The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition in the exterior of unit ball, preprint.