

拡散方程式と格子モデルによる感染症の伝播強度と 空間領域の形状の関心の考察

國谷 紀良*

神戸大学大学院システム情報学研究科

〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$ は滑らかな境界をもつ有界領域とする．本講演では，次のような拡散方程式系の SIR 感染症モデルを考える．

$$\begin{cases} \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = d_1 \Delta S(t, x) + b - \beta S(t, x)I(t, x) - \mu S(t, x), \\ \frac{\partial I(t, x)}{\partial t} = d_2 \Delta I(t, x) + \beta S(t, x)I(t, x) - (\mu + \gamma)I(t, x), \\ \frac{\partial R(t, x)}{\partial t} = d_3 \Delta R(t, x) + \gamma I(t, x) - \mu R(t, x), \end{cases} \quad t > 0, x \in \Omega. \quad (1)$$

ここで $t \geq 0$ は時間， $x \in \bar{\Omega}$ は位置を表し， S は感受性（未感染）人口， I は感染人口， R は回復人口を表す．また $b > 0$ は出生率， $\beta > 0$ は感染率， $\mu > 0$ は死亡率， $\gamma > 0$ は回復率， $d_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) は各人口の拡散に関する拡散係数を表す． $\alpha \in \{0, 1\}$ に対して，境界条件を次のように定める．

$$\begin{aligned} \alpha S(t, x) + (1 - \alpha) \frac{\partial S(t, x)}{\partial \mathbf{n}} &= 0, & \alpha I(t, x) + (1 - \alpha) \frac{\partial I(t, x)}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \\ \alpha R(t, x) + (1 - \alpha) \frac{\partial R(t, x)}{\partial \mathbf{n}} &= 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

すなわち， $\alpha = 0$ ならば（同次）ノイマン境界条件であり， $\alpha = 1$ ならば（同次）ディリクレ境界条件である．初期条件は次のように定める．

$$S(0, x) = \phi_1(x), \quad I(0, x) = \phi_2(x), \quad R(0, x) = \phi_3(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

モデル (1)-(3) に対し，感染症の無い状況を意味する自明定常解を $E_0 = (S_0, 0, 0)$ と表す． $S_0 = S_0(x)$ は次の式で与えられる．

$$S_0(x) = b \int_0^{+\infty} e^{-\mu\alpha\tau} \int_{\Omega} \Gamma_1(\tau, x, y) dy d\tau, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

ここで Γ_i ($i = 1, 2, 3$) は， $d_i \Delta$ および境界条件 (2) に対する拡散方程式の基本解を表す． E_0 の周りでの線形化方程式に対して [1] の理論を適用することで，次世代作用素

$$K\varphi(x) := \beta S_0(x) \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\gamma)\sigma} \int_{\Omega} \Gamma_2(\sigma, x, y) \varphi(y) dy d\sigma, \quad \varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}).$$

が得られ，そのスペクトル半径として基本再生産数 $\mathcal{R}_0 := r(K)$ が定義される． \mathcal{R}_0 は「感染症の初期侵入時に感染者が 1 人あたり感染する新規感染者数の期待値」という疫学的意味

*E-mail: tkuniya@port.kobe-u.ac.jp

をもち、「 $\mathcal{R}_0 < 1$ ならば感染症は流行せず、 $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば流行する」という判断を可能とする、感染症の伝播強度を表す指標である。モデル (1)-(3) に対する \mathcal{R}_0 の閾值的性質に関して、本研究では以下の諸定理が得られた。

定理 1 $\mathcal{R}_0 < 1$ ならば、感染症の無い状況を意味する自明定常解 E_0 は大域的に漸近安定である。 $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば、 E_0 は不安定である。

定理 2 $\alpha = 0$ の場合、 $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば、感染症の定着を意味する非自明定常解 $E^* = (S^*, I^*, R^*)$, $I^* \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ が少なくとも一つ存在する。

定理 3 $\alpha = 1$ の場合、 $d_1 = d_2 = d_3$ かつ $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば、感染症の定着を意味する非自明定常解 $E^* = (S^*, I^*, R^*)$, $I^* \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ が少なくとも一つ存在する。

定理 1-3 は、モデル (1)-(3) に対し、基本再生産数 \mathcal{R}_0 が感染症の流行の有無を左右する閾値であることを意味する。

本講演では、2次元の面積一定の長方形領域 $\Omega = (0, p) \times (0, 1/p)$, $p > 0$ に対し、 \mathcal{R}_0 と p の関係について考察する。ノイマン境界条件 ($\alpha = 0$) の場合、 $S_0(x) \equiv b/\mu$ となるため、 $\mathcal{R}_0 = \beta(b/\mu)(\mu + \gamma)^{-1}$ となる。この \mathcal{R}_0 は拡散をもたない SIR 感染症モデルの \mathcal{R}_0 [2, Section 5.5.2] と同一であり、 p によらないため、領域 Ω がどのような形状であっても一定となる。一方、ディリクレ境界条件 ($\alpha = 1$) の場合、 \mathcal{R}_0 は $p = 1$ (領域 Ω が正方形) のときに最大となり、 p が 1 から離れて領域の形状が細長くなるにつれて減少するという数値例が得られた (図 1)。この例は、個体同士が接触しにくい細長い領域において感染症の伝播強度 \mathcal{R}_0

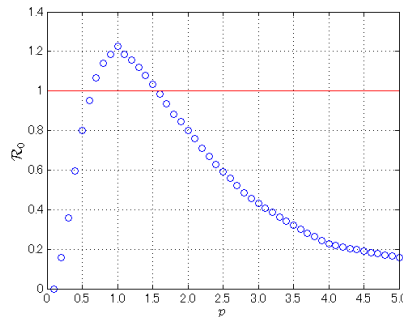


図 1: ディリクレ境界条件 ($\alpha = 1$) の場合の \mathcal{R}_0 と $p \in (0, 5]$ の関係の数値例。

が小さくなるという意味で直感に合致すると考えられ、拡散を伴う感染症の数理モデリングにおいてディリクレ境界条件を仮定することの重要性を示唆するものである。本講演ではさらに、ある確率的な 2次元の格子モデルを用いて、基本再生産数 \mathcal{R}_0 と空間領域の形状に関して図 1 と同様の結果が得られることを確認する。

参考文献

- [1] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, J.A.J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations, J. Math. Biol. 28 (1990) 365–382.
- [2] H. Inaba, Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology, Springer, 2017.