球対称気体星の非動径的断熱振動の方程式の線型化スペクトル解析に関する未解決問題について

牧野　哲　（山口大・名誉教授）[1]

自己重力下で断熱運動する気体星の内部構造を規定する Euler-Poisson 方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0, \tag{1a}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial v^j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v^k \frac{\partial v^j}{\partial x^k}\Big) + \frac{\partial P}{\partial x^j} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1b}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v^k \frac{\partial S}{\partial x^k}\Big) = 0, \tag{1c}$$

$$\triangle \Phi = 4\pi \mathsf{G} \rho \tag{1d}$$

を解析する。ここで $t \geq 0, \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3, \rho \geq 0$, G は正の定数。$\rho(t, \cdot)$ は台がコンパクトとし，(1d) を

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -4\pi \mathsf{G} \mathcal{K} \rho(t, \cdot)(\mathbf{x}) = -\mathsf{G} \int \frac{\rho(t, \mathbf{X}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{X}'\|} d\mathbf{x}' \tag{2}$$

で置き換える。また，理想気体の状態方程式

$$P = \rho^\gamma \exp\Big(\frac{S}{\mathsf{C}_V}\Big) \tag{3}$$

を仮定する。ここに，γ, C_V は正の定数で $1 < \gamma < 2$ とする。

半径 R の球対称平衡解 $\rho = \bar{\rho}, P = \bar{P}, S = \bar{S}, \Phi = \bar{\Phi}$ をひとつ固定する。すなわち，$\bar{\rho}$ 等は $r = \|\mathbf{x}\|$ のみの函数であり，$\bar{\rho}(\mathbf{x}) > 0 \Leftrightarrow r = \|\mathbf{x}\| < R$ であって，適当ななめらかさと真空境界での挙動に関する条件をみたすとする。もちろんこの条件は，$\bar{S} =$ 定数，$6/5 < \gamma < 2$ のとき Lane-Emden 函数の与える平衡解がみたす条件である。この平衡解からの Euler 摂動 $\boldsymbol{\xi} = \delta\mathbf{x}, \delta\rho.\delta P, \delta S, \delta\Phi$ の時間発展を規定する方程式を線型近似すると，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + \mathbf{L}\boldsymbol{\xi} = 0, \tag{4}$$

となる。ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \delta P - \frac{\nabla \bar{P}}{\bar{\rho}^2} \delta \rho + \nabla \delta \Phi, \\ \delta \rho &= -(\nabla | \bar{\rho} \boldsymbol{\xi}), \quad \delta \Phi = -4\pi \mathsf{G} \mathcal{K}(\delta \rho). \end{aligned} \tag{5}$$

[1]Supported by KAKENHI JP18K03371, 〒 755-0017 山口県宇部市芝中町 11-45-1105, e-mail: makino@yamagchi-u.ac.jp

であり，$\mathbf{x}$ は Lagrange 座標に流用して $B_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | r = \|\mathbf{x}\| < R\}$ を動くものとしており，摂動の初期条件には Lagrange 摂動について $\Delta\rho = 0, \Delta S = 0$ を仮定した。（Lagrange 摂動 Δ は線型近似下では $\delta + (\boldsymbol{\xi}|\nabla)$ に等しい。）このとき，$\Delta S = 0 \quad \forall t$ だから，

$$\delta P = \frac{\overline{\gamma P}}{\rho}\delta\rho + \mathcal{A}\gamma\bar{P}(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{e}_r)$$

となる。ただし，$\mathbf{e}_r = \dfrac{\partial}{\partial r}, \mathcal{A} := \overline{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dr}} - \overline{\dfrac{1}{\gamma P}\dfrac{dP}{dr}} = -\dfrac{1}{\gamma \mathsf{C}_V}\dfrac{d\bar{S}}{dr}$ であり，$\mathcal{A} \leq 0$ の仮定の下で $\mathcal{N} := \sqrt{-\mathcal{A}d\bar{\Phi}/dr}$ はいわゆる Brunt-Väisälä 振動数である。

線型微分積分作用素 $\mathbf{L}$ を函数空間 $\mathfrak{H} := L^2(B_R, \bar{\rho}d\mathbf{x})$ で考える。

$C_0^\infty(B_R)$ で定義した $\mathbf{L}$ は下に有界な対称作用素であることがわかり，したがって，$\mathfrak{H}$ 内の自己共役作用素（以下同じ $\mathbf{L}$ で表す）へ Friedrichs 拡張できる。そのスペクトルがどうなるかを問題にする。

[2] で証明したように，$\bar{S}$ = 定数のときは，$\mathfrak{H}$ で稠密な空間 $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap \{\boldsymbol{\xi} | (\nabla|\bar{\rho}\boldsymbol{\xi}) \in \mathfrak{G}\}$ （ただし $\mathfrak{G} := L^2(B_R, \overline{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{d\rho}}d\mathbf{x}) \cap \{g | \int g d\mathbf{x} = 0\}$) での $\mathbf{L}$ のスペクトルは $\Sigma = \{0\} \cup \{\lambda_j\}$ となる。ここに，固有値 0 は重複度 ∞ であり，固有値 λ_j は重複度有限，$\lambda_1 < \cdots < \lambda_j \to +\infty$ である。しかし，$\bar{S}$ が定数でないときは，スペクトルはこのように具体的にはわかっていない。尤も，$\bar{S}$ = 定数のときでも，$\mathfrak{F}$ ではなく本来の $\mathfrak{H}$ で考えたときの $\mathbf{L}$ のスペクトルが Σ 以外に連続スペクトルをもつかどうかは未解決である。

さらに $\bar{S} \neq$定数のとき，宇宙物理学の文献（例えば [1], [4]）によると，いわゆる「g-mode」とよばれる 0 に集積する固有値列 $(\lambda_{-n})_n, \lambda_{-1} > \cdots \lambda_{-n} \to +0$ が現れるとされているが，その数学的に厳密な証明も未解決である。

これらの問題について [3] に基づいて球調和函数による展開をもちいたもう少し詳しい状況説明をしたい。

参考文献

[1] J. Cox, Theory of Stellar Pulsations, 1980.

[2] Juhi Jang and T. Makino, arXiv:1810.08294.

[3] T. Makino, arXiv:1902.03675.

[4] W. Unno, Y. Osaki, H. Ando and H. Shibahashi, Nonradial Oscillations of Stars, 1979; 2nd Ed. 1989.