Blow-up criteria for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in higher dimensions

内藤 雄基　（愛媛大学）

空間次元 $N \geq 3$ における次の Cauchy 問題を考える：

$$
(1) \qquad \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0, \\ 0 = \Delta v + u, & x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}
$$

ここで，$u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $u_0 \geq 0$, u_0 は球対称関数とし $|x|$ について非増加とする．この系 (1) は走化性方程式系を単純化したモデルとして知られており，u は走化性粘菌の密度，v は粘菌により分泌される誘因物質の濃度を表している．また、このモデルは天体物理学の分野でも現れることが知られている．

この系 (1) は時間局所的に可解であり，最大存在時刻を $T = T[u_0] \in (0, \infty]$ とすると，(1) は $0 < t < T$ において古典解 (u, v) を一意にもち，$T < \infty$ ならば

$$\lim_{t \to T} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty$$

を満たす．$T < \infty$ のとき解は有限時刻で爆発するといい，$T = \infty$ の場合，解は時間大域的であるという．ここでは，$T < \infty$ あるいは $T = \infty$ であるための u_0 の条件について考える．

この系 (1) においては解 u の L^1-ノルムが保存されることが知られている．すなわち $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$ ならば

$$M = \int_{\mathbf{R}^N} u(x,t)dx = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)dx \quad \text{for all } t \in [0, T)$$

が成立する．空間次元 $N = 2$ の場合は，$M = 8\pi$ が解の時間大域存在と有限時刻爆発の境目になることが知られている．すなわち，$M < 8\pi$ ならば解は時間大域的に存在し，一方 $M > 8\pi$ ならば有限時刻爆発すること，球対称解は原点に 8π の重みをもって集中すること等が知られている．空間次元 $N \geq 3$ の場合には，Biler 等 [1] により $N = 2$ の場合の類推から次の問題が提起されている：

「解の時間大域存在と有限時刻爆発を分ける，初期値 u_0 から決まる量 $\ell = \ell(u_0)$ が存在するか？」

「さらに $\ell(u_0) < c_N$ ならば解は時間大域的であり $\ell(u_0) > C_N$ ならば有限時刻爆発するという定数 $0 < c_N \leq C_N < \infty$ は存在するか？」

これらの問いに対して，［1］では部分的な解答が与えられている．指数 $1 \leq p \leq \infty$ に対して Morrey 空間 $M^p(\mathbf{R}^N)$ は次により定義される：

$$M^p(\mathbf{R}^N) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N) : \|f\|_{M^p} < \infty\},$$

$$\|f\|_{M^p} = \sup_{R>0, x \in \mathbf{R}^N} R^{N(1/p-1)} \int_{|y-x|<R} |u(y)|dy.$$

定理 A [1, Theorem 2.1] ある $p \in (N/2, N)$ に対して $u_0 \in M^{N/2}(\mathbf{R}^N) \cap M^p(\mathbf{R}^N)$ とする．このとき

$$\sup_{R>0} R^{2-N} \int_0^R r^{N-1} u_0(r)dr < 2$$

ならば (1) の解は時間大域的である．

系 (1) の Chandrasekhar 定常特異解と呼ばれる $u_C(x) = \dfrac{2(N-2)}{|x|^2}$ は

$$R^{2-N} \int_0^R r^{N-1} u_C(r)dr = 2 \quad \text{for all } R > 0$$

を満たすことに注意する．

Cauchy 問題 (1) の球対称解 $(u, v) = (u(r, t), v(r, t))$, $r = |x|$ に対して w を

$$w(r, t) = \frac{1}{r^N} \int_0^r s^{N-1} u(s, t)ds \quad \text{for } (r, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$$

と定めることにより，(1) は次の単独の方程式に対する Cauchy 問題

$$\begin{cases} w_t = w_{rr} + \dfrac{N+1}{r} w_r + r w_r w + N w^2 & \text{for } (r, t) \in (0, \infty) \times (0, T), \\ w(r, 0) = w_0(r) & \text{for } r \in (0, \infty), \end{cases} \tag{2}$$

に帰着される．ここで $w = w(r, t)$ を空間 $\mathbf{R}^{N+2}$ における球対称解，すなわち $r = |x|$, $x \in \mathbf{R}^{N+2}$ と見なすことにより (2) における方程式は次のように書けることに注意する．

$$w_t = \Delta w + (x \cdot \nabla w)w + N w^2 \quad \text{for } (x, t) \in \mathbf{R}^{N+2} \times (0, T).$$

本講演では，この単独の方程式およびその球対称定常解の満たす常微分方程式

$$W_{rr} + \frac{N+1}{r} W_r + r W_r W + N W^2 = 0, \quad r \in (0, \infty), \tag{3}$$

を考察することにより (1) の解の爆発のための判定条件を導く．

References

[1] P. Biler, G. Karch and D. Pilarczyk, Global radial solutions in classical Keller-Segel model of chemotaxis, J. Differential Equations 267 (2019) 6352–6369.

[2] P. Biler and J. Zienkiewicz, Blowing up radial solutions in the minimal Keller-Segel model of chemotaxis, J. Evol. Equ. 19 (2019) 71–90.

[3] T. Ogawa and H. Wakui, Non-uniform bound and finite time blow up for solutions to a drift-diffusion equation in higher dimensions, Anal. Appl. (Singap.) 14 (2016) 145–183.

[4] T. Senba, Blowup behavior of radial solutions to Jäger-Luckhaus system in high dimensional domains, Funkcial. Ekvac. 48 (2005) 247–271.