非一様性をもつ双安定反応拡散系におけるパルスダイナミクス

西　慧 (京都産業大学 理学部)

1　はじめに

反応拡散系は，自然界で見られる様々なパターン形成を記述するモデル方程式として広く用いられているが，なかでもパルス解やスポット解のように空間的に局在化した解は多くの散逸系でみられる普遍的な構造である. このような空間局在解については，その存在や安定性などが古くから調べられているが，最近では現実に環境の温度変化や化学物質の濃度勾配などが存在することを考慮して，非一様をもつ系 (パラメータが時間や空間に依存して変化する系) でのダイナミクスについても調べられており，その分岐理論的なメカニズムが数値計算や解析により明らかになりつつある. これまでは主に興奮性媒質を対象に研究が行われてきたが [1][2]，一方で双安定媒質でも 2 つの界面をもつパルス解が現れ，界面間の相互作用の結果，興奮性のものとは定性的に異なるダイナミクスをみせる.

本講演ではこの双安定媒質に現れるパスル解の非一様媒質中での振る舞いについて得られた結果をご紹介したい. 本研究は寺本敬氏 (旭川医科大学)，および西浦廉政氏 (東北大学) との共同研究にもとづく.

2　主結果

本講演では，以下の 2 成分反応拡散方程式を考える：

$$\begin{cases} \tau\,\epsilon\,u_t = \epsilon^2 u_{xx} + \left(u+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-u\right)\left(u-\dfrac{1}{2}v\right), \\ v_t = Dv_{xx} + u - v + \delta(x). \end{cases} \tag{1}$$

ここで $t>0$，$x\in\mathbf{R}$ とし，各パラメータについては $\tau>0$，$D>0$，$0<\epsilon\ll 1$ であるとする．$\delta(x)$ は x に依存する関数で，空間非一様性を表す．空間一様な場合 ($\delta(x)\equiv\delta_0$)，系 (1) は 2 つの安定な空間一様解 $(u(x),v(x))\equiv(\pm 1/2,\pm 1/2+\delta_0)$ をもつ双安定系であり，2 つの空間一様解をつなぐフロント解が存在することも知られている [3]．さらに，$0<\delta_0<1/2$ では 2 つのフロント解から構成されるパルス解 (図 1a) が存在し，定常解のみならず脈動解，進行解などが安定な解として現れる．

ここではまず $\delta(x)$ がジャンプ型の非一様性をもつとし， 左からパルス解が進行してきたときに，非一様性と相互作用することでどのようなダイナミクスが生じるかについて考える (図 1a)．進行パルス解の速さやジャンプの高さを変えて数値計算を行うと，定性的に異なる 5 つの振る舞いがみられる (図 1b)．

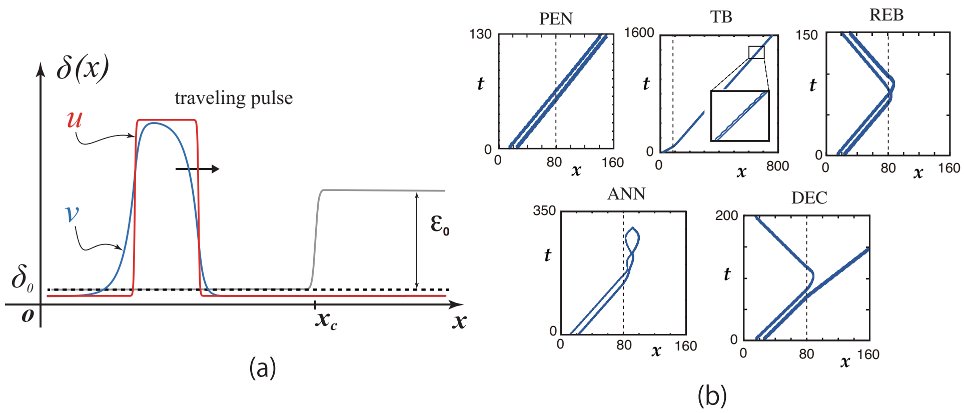

図 1: 式 (1) で数値的にみられる進行パルス解 (a) と，パラメータの値を変えたときにみられるパルス解のダイナミクス (b).

これらの振る舞いが起きるメカニズムを分岐理論の観点から明らかにすることが，本研究の目的となる．解析をしやすくするために，まず元の方程式 (1) において $\epsilon \to 0$ の特異極限をとり，u 成分の方程式を 2 つの界面の運動方程式で置き換える (以下，$\dot{\ } := d/dt$ とする):

$$\begin{cases} \dot{l}_2 = -\dfrac{v(l_2)}{\sqrt{2}\tau}, \quad \dot{l}_1 = \dfrac{v(l_1)}{\sqrt{2}\tau}, \\ v_t = Dv_{xx} + u(x; l_2, l_1) - v + \delta(x). \end{cases} \tag{2}$$

ここで $x = l_2(t), l_1(t)$ $(l_2 > l_1)$ は 2 つの界面の位置とし，第 2 式の $u(x; l_2, l_1)$ は，区分定数関数 $F(x) = 1/2\ (x \leq 0),\quad -1/2\ (x > 0)$ を用いて $u(x; l_2, l_1) := F(x - l_1) - F(x - l_2) - 1/2$ で与えられる．この ODE と PDE からなる系 (2) は，系 (1) のパルスダイナミクスを定性的に非常に良く再現する．また，u 成分の非線形項がなくなり，v に関しては線形となるため，元の系に比べて定常解の存在や安定性を調べることも容易となる．その結果，一部の振る舞いについてはそのメカニズムを解析的に調べることができるが [4]，PDE を含むため周期解や複雑な界面の運動の時間発展を追うことは難しい．そこで，2 つの界面が十分離れ，かつ各々ゆっくりと運動するという仮定の下でさらに縮約を行い，系 (2) でみられる界面の運動を記述する以下の 4 次元の ODE を導出する [5]:

$$\begin{cases} \dot{l}_2 = r_2, \quad \dot{l}_1 = r_1, \\ m_0\ \dot{r}_2 = \sqrt{2}(\tau_c - \tau)\ r_2 - g_3\ r_2^3 + (G_0 - G_1 r_1)\, e^{-\frac{r_1 + \phi(r_1)}{2D}h} - \Delta_0(l_2), \\ m_0\ \dot{r}_1 = \sqrt{2}(\tau_c - \tau)\ r_1 - g_3\ r_1^3 - (G_0 + G_1 r_2)\, e^{-\frac{-r_2 + \phi(r_2)}{2D}h} + \Delta_0(l_1). \end{cases} \tag{3}$$

ここで $h := l_2 - l_1$ および $r_2(t)$，$r_1(t)$ はそれぞれ 2 つの界面間の距離と速度を表す変数で，$\phi(r) = \sqrt{r^2 + 4D}$ である．また $\Delta_0(x)$ は式 (2) の関数 $\delta(x)$ に由来する項で，$\left(Dd^2/dx^2 - 1\right)\Delta_0(x) + \delta(x) = 0$ を解くことで得られる．この 4 次元 ODE は式 (1) や式 (2) でみられるパルスダイナミクスを定性的に良く再現し，とりわけ少数自由度の系なので，分岐解析ソフト AUTO を援用することで解の大域的な分岐構造を調べたり，解析を行うといったことが容易になる．さらには，非一様項 $\delta(x)$ の関数形を様々に変えて，効率的にパルスダイナミクスを探索することも可能となる (図 2)．本講演では式 (2)，式 (3) の導出や解析結果を中心に報告し，時間が許せば系 (1) を拡張した 3 変数系でのダイナミクスや解析結果についてもご紹介したい．

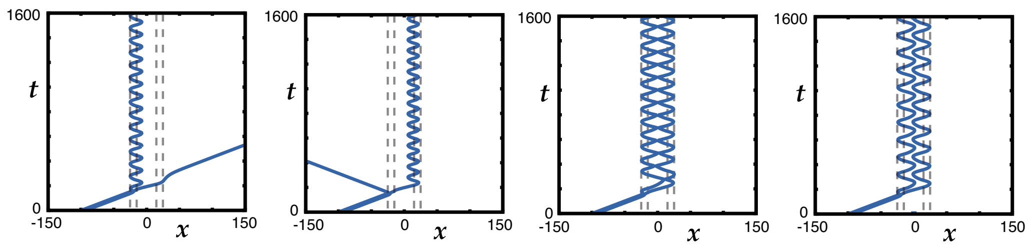

図 2: 非一様項 $\delta(x)$ が井戸型の場合に式 (3) でみられるパルス界面の運動．

参考文献

[1] Y. Nishiura, T. Teramoto, X. Yuan, K.-I. Ueda, *Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media*, Chaos **17** (2007) 037104-1–21.

[2] Y. Nishiura, T. Teramoto, X. Yuan, *Heterogeneity-induced spot dynamics for a three-component reaction-diffusion system*, Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012) 307–338.

[3] S.-I. Ei, H. Ikeda, and T. Kawana, *Dynamics of front solutions in a specific reaction-diffusion system in one dimension*, Japan J. Indust. Appl. Math., **25** (2008), 117–147.

[4] K. Nishi, Y. Nishiura, and T. Teramoto, *Dynamics of two interfaces in a hybrid system with jump-type heterogeneity*, Jpn. J. Ind. App. Math., **30** (2013), 351–395.

[5] K. Nishi, Y. Nishiura, and T. Teramoto, *Reduction approach to the dynamics of two interacting front solutions in a bistable reaction-diffusion system and its application to heterogeneous media*, Physica D, **398** (2019), 183–207.