

# Center stable manifolds around line solitary waves of the Zakharov–Kuznetsov equation with critical speed

広島大学理学研究科 学術振興会特別研究員 PD 山崎陽平

磁場化プラズマ中のイオン音波の伝搬を記述するモデル方程式である Zakharov–Kuznetsov 方程式

$$(ZK) \quad u_t + \partial_x(\Delta u + u^2) = 0, \quad u(t, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L \rightarrow \mathbb{R}$$

を考える. ここで,  $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi LZ$  である.  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  上の (ZK) の初期値問題について, Molinet–Pilod [2] により, エネルギー空間  $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L)$  での大域的適切性が示されている. (ZK) は線状進行波 (KdV ソリトン) と呼ばれる次の進行波  $Q_c$  を解として持つ.

$$Q_c(x - ct) = \frac{3c}{2} \cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{c}(x - ct)}{2}\right), \quad c > 0.$$

(ZK) などの非線形分散型方程式で観測される多くの波動現象は初期摂動に対して安定な進行波によって記述されると考えられており, 進行波の存在とその安定性を調べることは 1 つの研究対象である.

ここで,  $Q_c(x - ct)$  が軌道安定であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, ある  $\delta > 0$  が存在して,  $\|u(0) - Q_c\|_{H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L)} < \delta$  となる (ZK) の解  $u(t)$  が

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L} \|u(t, \cdot, \cdot) - Q(\cdot - x, \cdot - y)\|_{H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L)} < \varepsilon$$

を満たすといひ, 軌道安定でないとき軌道不安定であるという.

進行波  $Q_c(x - ct)$  は (ZK) の 1 次元版の方程式である KdV 方程式

$$u_t + \partial_x(\partial_x^2 u + u^2) = 0$$

の進行波として, 任意の進行速度  $c > 0$  に対して, 安定であることが示されている [1]. 一方, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  の安定性については,  $\mathbb{R}^2$  上の ZK 方程式の解としてすべての  $c > 0$  について, Rousset–Tzvetkov [3] により, 軌道不安定性が示されており,  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  上の ZK 方程式の解としては  $0 < c \leq 4/5L^2$  のとき軌道安定かつ漸近安定,  $c > 4/5L^2$  のとき軌道不安定であることが示されている [4].

本講演では, 軌道不安定な線状進行波の周りの解の挙動を調べるために, 以下で定義される中心安定多様体について考察する.

**定義 1.**  $C^1$  級多様体  $\mathcal{M}_{cs}$  が以下を満たすとき,  $Q_c(x - ct)$  の周りの (ZK) の中心安定多様体であるという.

- (1)  $\{\tau_q Q_c : q \in \mathbb{R}\}$ ,
- (2)  $\text{codim} \mathcal{M}_{cs} = \dim\{f \in H^1 : \partial_x \mathbb{L}_c f = \lambda f, \text{Re} \lambda > 0\}$ ,
- (3)  $U(t) \mathcal{M}_{cs} \subset \mathcal{M}_{cs}$  for  $t \geq 0$ ,

(4)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.t.  $U(t)(N_{\delta,c} \cap \mathcal{M}_{cs}) \subset N_{\varepsilon,c} \cap \mathcal{M}_{cs}$  for  $t \geq 0$ ,

(5)  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall u_0 \in N_{\delta,c} \setminus \mathcal{M}_{cs}, \exists t_0 > 0$  s.t.  $U(t_0)u_0 \notin N_{\delta,c}$ .

ここで,  $(\tau_q u)(x, y) = u(x - q, y)$  かつ  $\partial_x \mathbb{L}_c = \partial_x(-\Delta + c - 2Q_c)$  は  $Q_c(x - ct)$  周りの (ZK) の線形化作用素,  $U(t)$  は (ZK) の発展作用素,

$$N_{\delta,c} = \{f \in H^1 : \inf_{q \in \mathbb{R}} \|f - \tau_q Q_c\|_{H^1} < \delta\}.$$

不安定な進行波の周りの多くの解は, 進行波から離れるが, 進行波から離れない解も存在する. 中心安定多様体は線形化作用素の実部が非正なスペクトルに対応する固有空間を接空間とする多様体であり, 中心安定多様体上の解は時間正の方向で進行波から離れない解の集合である. 以下が本講演の主結果である.

**定理 2.**  $c^* > 4/5L^2$  に対し,  $Q_{c^*}(x - ct)$  周りの (ZK) の中心安定多様体  $\mathcal{M}_{cs}(c^*)$  が存在する.

現在投稿中の結果 [5] により, 進行速度  $c$  が  $c > 4/5L^2$  かつ  $c \neq 4n^2/5L^2 (\forall n \in \mathbb{Z})$  の時,  $Q_c(x - ct)$  周りの中心安定多様体の存在を得ていたが,  $c \neq 4n^2/5L^2 (\forall n \in \mathbb{Z})$  の仮定を外すことができた.

正の整数  $n$  に対し, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  は  $c = 4n^2/5L^2$  で, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  と  $\mathbb{T}_L$  方向に一様でない進行波  $\varphi_{c,n}$  に分岐する.  $n = 1$  のとき, この分岐により,  $c > 4/5L^2$  で不安定な線状進行波  $Q_c(x - ct)$  と, 安定な  $\mathbb{T}_L$  方向に一様でない進行波  $\varphi_{c,1}$  に分かれることにより, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  の不安定性が起きていた.  $c = 4n^2/5L^2$  では分岐により, 線形作用素  $\partial_x \mathbb{L}_c$  が退化するため, (ZK) の保存量をもとに作られるリャプノフ関数のテーラー展開の 2 次までの項の評価では, 中心安定多様体の候補となる集合上で, 定義 1 の (4) を示せない. さらに, 時間正の方向のみ安定になるので,  $c = 4/5L^2$  の時の安定性の議論を直接適用することができない. そのため,  $c = 4/5L^2$  の時のリャプノフ関数の分岐方向に関する 4 次の評価と, bootstrap argument を用いたリャプノフ関数の残りの 4 次項の評価を用いて,  $c = 4n^2/5L^2$  のときに, (4) を示した.

### 参考文献

- [1] T. B. Benjamin, *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A **328** (1972), 153–183.
- [2] L. Molinet and D. Pilod, *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov-Kuznetsov equation and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **32** (2015), no. 2, 347–371.
- [3] F. Rousset and N. Tzvetkov, *Transverse nonlinear instability of solitary waves for some Hamiltonian PDE's*, J. Math. Pures. Appl. **90** (2008) 550–590.
- [4] Y. Yamazaki, *Stability for line solitary waves of Zakharov-Kuznetsov equation*, J. Differential Equations, **262** (2017), 4336–4389.
- [5] Y. Yamazaki, *Center stable manifolds around line solitary waves of the Zakharov-Kuznetsov equation*, arXiv:1808.07315.