

研究集会 「数学と現象：

Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2019」

日時：令和元年11月15日(金)～11月16日(土)

場所：宮崎大学工学部 B棟2階B210教室

URL：<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/mpm2019/>

講演  
アブストラクト

# 研究集会 「数学と現象： Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2019 (略称：MPM2019)」

日時： 2019年11月15日（金）～11月16日（土）

会場： 宮崎大学工学部B棟2階B210教室

案内： <http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/mpm/mpm2019/>

## プログラム

### 11月15日（金）

#### 午後の部

14:00-14:55 國谷 紀良（神戸大学）

「拡散方程式と格子モデルによる感染症の  
伝播強度と空間領域の形状の関係の考察」

15:15-16:10 山崎 陽平（広島大学）

「Center stable manifolds around line solitary waves  
of the Zakharov-Kuznetsov equation with critical speed」

16:30-17:25 牧野 哲（山口大学名誉教授）

「球対称気体星の非動径的断熱振動の方程式の  
線型化スペクトル解析に関する未解決問題について」

### 11月16日（土）

#### 午前の部 << MPM2019 特別実験講座 >>

10:15-12:15 田崎 創平（京都大学）

「細菌集団のライフサイクル」

注 宮交バス「橋通り3丁目→宮崎大学（木花キャンパス）」の土曜日の朝の時刻表：

8:21 → 8:54, 8:41 → 9:18, 9:11 → 9:52, 9:21 → 9:54, 9:41 → 10:18（遅刻！）

午後の部

14:00-14:55 川上 竜樹 (龍谷大学)

「動的境界条件付き熱方程式の拡散極限」

15:15-16:10 西 慧 (京都産業大学)

「非一様性をもつ双安定反応拡散系におけるパルスダイナミクス」

16:30-17:25 内藤 雄基 (愛媛大学)

「Blow-up criteria for the parabolic-elliptic  
Keller-Segel system in higher dimensions」

---

本研究集会は、次の科学研究費補助金の援助を受けています。

課題番号	種目	代表者	課題名
17K05334	基盤 C	辻川 亨	非線形拡散反応系における漸近展開法の開発とその応用
16K05279	基盤 C	今 隆助	常微分方程式で近似できる構造化生態系モデルの数理的研究
17K14237	若手 B	出原浩史	燃焼モデルに現れるパターンの計算機支援解析
17K14220	若手 B	平山浩之	複雑な共鳴構造を持つ非線形分散型方程式の可解性について

世話人： 辻川亨, 飯田雅人, 今隆助, 梅原守道, 出原浩史, 平山浩之, 伊藤翼 (宮崎大学)

連絡先： 伊藤 翼 (Tsubasa Itoh)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部工学基礎教育センター

E-mail : tsubasa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7370, FAX : 0985-58-7289

作成日：平成 31 年 10 月 11 日

# 拡散方程式と格子モデルによる感染症の伝播強度と 空間領域の形状の関係の考察

國谷 紀良\*

神戸大学大学院システム情報学研究科

〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  は滑らかな境界をもつ有界領域とする．本講演では，次のような拡散方程式系の SIR 感染症モデルを考える．

$$\begin{cases} \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = d_1 \Delta S(t, x) + b - \beta S(t, x)I(t, x) - \mu S(t, x), \\ \frac{\partial I(t, x)}{\partial t} = d_2 \Delta I(t, x) + \beta S(t, x)I(t, x) - (\mu + \gamma)I(t, x), \\ \frac{\partial R(t, x)}{\partial t} = d_3 \Delta R(t, x) + \gamma I(t, x) - \mu R(t, x), \end{cases} \quad t > 0, x \in \Omega. \quad (1)$$

ここで  $t \geq 0$  は時間， $x \in \bar{\Omega}$  は位置を表し， $S$  は感受性（未感染）人口， $I$  は感染人口， $R$  は回復人口を表す．また  $b > 0$  は出生率， $\beta > 0$  は感染率， $\mu > 0$  は死亡率， $\gamma > 0$  は回復率， $d_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は各人口の拡散に関する拡散係数を表す． $\alpha \in \{0, 1\}$  に対して，境界条件を次のように定める．

$$\begin{aligned} \alpha S(t, x) + (1 - \alpha) \frac{\partial S(t, x)}{\partial \mathbf{n}} &= 0, & \alpha I(t, x) + (1 - \alpha) \frac{\partial I(t, x)}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \\ \alpha R(t, x) + (1 - \alpha) \frac{\partial R(t, x)}{\partial \mathbf{n}} &= 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

すなわち， $\alpha = 0$  ならば（同次）ノイマン境界条件であり， $\alpha = 1$  ならば（同次）ディリクレ境界条件である．初期条件は次のように定める．

$$S(0, x) = \phi_1(x), \quad I(0, x) = \phi_2(x), \quad R(0, x) = \phi_3(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

モデル (1)-(3) に対し，感染症の無い状況を意味する自明定常解を  $E_0 = (S_0, 0, 0)$  と表す． $S_0 = S_0(x)$  は次の式で与えられる．

$$S_0(x) = b \int_0^{+\infty} e^{-\mu\alpha\tau} \int_{\Omega} \Gamma_1(\tau, x, y) dy d\tau, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

ここで  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は， $d_i \Delta$  および境界条件 (2) に対する拡散方程式の基本解を表す． $E_0$  の周りでの線形化方程式に対して [1] の理論を適用することで，次世代作用素

$$K\varphi(x) := \beta S_0(x) \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\gamma)\sigma} \int_{\Omega} \Gamma_2(\sigma, x, y) \varphi(y) dy d\sigma, \quad \varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}).$$

が得られ，そのスペクトル半径として基本再生産数  $\mathcal{R}_0 := r(K)$  が定義される． $\mathcal{R}_0$  は「感染症の初期侵入時に感染者が 1 人あたり感染する新規感染者数の期待値」という疫学的意味

\*E-mail: tkuniya@port.kobe-u.ac.jp

をもち、「 $\mathcal{R}_0 < 1$  ならば感染症は流行せず、 $\mathcal{R}_0 > 1$  ならば流行する」という判断を可能とする、感染症の伝播強度を表す指標である。モデル (1)-(3) に対する  $\mathcal{R}_0$  の閾值的性質に関して、本研究では以下の諸定理が得られた。

**定理 1**  $\mathcal{R}_0 < 1$  ならば、感染症の無い状況を意味する自明定常解  $E_0$  は大域的に漸近安定である。 $\mathcal{R}_0 > 1$  ならば、 $E_0$  は不安定である。

**定理 2**  $\alpha = 0$  の場合、 $\mathcal{R}_0 > 1$  ならば、感染症の定着を意味する非自明定常解  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ ,  $I^* \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$  が少なくとも一つ存在する。

**定理 3**  $\alpha = 1$  の場合、 $d_1 = d_2 = d_3$  かつ  $\mathcal{R}_0 > 1$  ならば、感染症の定着を意味する非自明定常解  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ ,  $I^* \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$  が少なくとも一つ存在する。

定理 1-3 は、モデル (1)-(3) に対し、基本再生産数  $\mathcal{R}_0$  が感染症の流行の有無を左右する閾値であることを意味する。

本講演では、2次元の面積一定の長方形領域  $\Omega = (0, p) \times (0, 1/p)$ ,  $p > 0$  に対し、 $\mathcal{R}_0$  と  $p$  の関係について考察する。ノイマン境界条件 ( $\alpha = 0$ ) の場合、 $S_0(x) \equiv b/\mu$  となるため、 $\mathcal{R}_0 = \beta(b/\mu)(\mu + \gamma)^{-1}$  となる。この  $\mathcal{R}_0$  は拡散をもたない SIR 感染症モデルの  $\mathcal{R}_0$  [2, Section 5.5.2] と同一であり、 $p$  によらないため、領域  $\Omega$  がどのような形状であっても一定となる。一方、ディリクレ境界条件 ( $\alpha = 1$ ) の場合、 $\mathcal{R}_0$  は  $p = 1$  (領域  $\Omega$  が正方形) のときに最大となり、 $p$  が 1 から離れて領域の形状が細長くなるにつれて減少するという数値例が得られた (図 1)。この例は、個体同士が接触しにくい細長い領域において感染症の伝播強度  $\mathcal{R}_0$

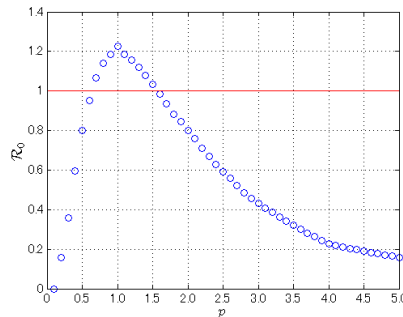


図 1: ディリクレ境界条件 ( $\alpha = 1$ ) の場合の  $\mathcal{R}_0$  と  $p \in (0, 5]$  の関係の数値例。

が小さくなるという意味で直感に合致すると考えられ、拡散を伴う感染症の数理モデリングにおいてディリクレ境界条件を仮定することの重要性を示唆するものである。本講演ではさらに、ある確率的な 2次元の格子モデルを用いて、基本再生産数  $\mathcal{R}_0$  と空間領域の形状に関して図 1 と同様の結果が得られることを確認する。

## 参考文献

- [1] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, J.A.J. Metz, On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations, J. Math. Biol. 28 (1990) 365–382.
- [2] H. Inaba, Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology, Springer, 2017.

# Center stable manifolds around line solitary waves of the Zakharov–Kuznetsov equation with critical speed

広島大学理学研究科 学術振興会特別研究員 PD 山崎陽平

磁場化プラズマ中のイオン音波の伝搬を記述するモデル方程式である Zakharov–Kuznetsov 方程式

$$(ZK) \quad u_t + \partial_x(\Delta u + u^2) = 0, \quad u(t, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L \rightarrow \mathbb{R}$$

を考える. ここで,  $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi LZ$  である.  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  上の (ZK) の初期値問題について, Molinet–Pilod [2] により, エネルギー空間  $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L)$  での大域的適切性が示されている. (ZK) は線状進行波 (KdV ソリトン) と呼ばれる次の進行波  $Q_c$  を解として持つ.

$$Q_c(x - ct) = \frac{3c}{2} \cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{c}(x - ct)}{2}\right), \quad c > 0.$$

(ZK) などの非線形分散型方程式で観測される多くの波動現象は初期摂動に対して安定な進行波によって記述されると考えられており, 進行波の存在とその安定性を調べることは 1 つの研究対象である.

ここで,  $Q_c(x - ct)$  が軌道安定であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, ある  $\delta > 0$  が存在して,  $\|u(0) - Q_c\|_{H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L)} < \delta$  となる (ZK) の解  $u(t)$  が

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L} \|u(t, \cdot, \cdot) - Q(\cdot - x, \cdot - y)\|_{H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L)} < \varepsilon$$

を満たすといひ, 軌道安定でないとき軌道不安定であるという.

進行波  $Q_c(x - ct)$  は (ZK) の 1 次元版の方程式である KdV 方程式

$$u_t + \partial_x(\partial_x^2 u + u^2) = 0$$

の進行波として, 任意の進行速度  $c > 0$  に対して, 安定であることが示されている [1]. 一方, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  の安定性については,  $\mathbb{R}^2$  上の ZK 方程式の解としてすべての  $c > 0$  について, Rousset–Tzvetkov [3] により, 軌道不安定性が示されており,  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  上の ZK 方程式の解としては  $0 < c \leq 4/5L^2$  のとき軌道安定かつ漸近安定,  $c > 4/5L^2$  のとき軌道不安定であることが示されている [4].

本講演では, 軌道不安定な線状進行波の周りの解の挙動を調べるために, 以下で定義される中心安定多様体について考察する.

**定義 1.**  $C^1$  級多様体  $\mathcal{M}_{cs}$  が以下を満たすとき,  $Q_c(x - ct)$  の周りの (ZK) の中心安定多様体であるという.

- (1)  $\{\tau_q Q_c : q \in \mathbb{R}\}$ ,
- (2)  $\text{codim} \mathcal{M}_{cs} = \dim\{f \in H^1 : \partial_x \mathbb{L}_c f = \lambda f, \text{Re} \lambda > 0\}$ ,
- (3)  $U(t) \mathcal{M}_{cs} \subset \mathcal{M}_{cs}$  for  $t \geq 0$ ,

(4)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.t.  $U(t)(N_{\delta,c} \cap \mathcal{M}_{cs}) \subset N_{\varepsilon,c} \cap \mathcal{M}_{cs}$  for  $t \geq 0$ ,

(5)  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall u_0 \in N_{\delta,c} \setminus \mathcal{M}_{cs}, \exists t_0 > 0$  s.t.  $U(t_0)u_0 \notin N_{\delta,c}$ .

ここで,  $(\tau_q u)(x, y) = u(x - q, y)$  かつ  $\partial_x \mathbb{L}_c = \partial_x(-\Delta + c - 2Q_c)$  は  $Q_c(x - ct)$  周りの (ZK) の線形化作用素,  $U(t)$  は (ZK) の発展作用素,

$$N_{\delta,c} = \{f \in H^1 : \inf_{q \in \mathbb{R}} \|f - \tau_q Q_c\|_{H^1} < \delta\}.$$

不安定な進行波の周りの多くの解は, 進行波から離れるが, 進行波から離れない解も存在する. 中心安定多様体は線形化作用素の実部が非正なスペクトルに対応する固有空間を接空間とする多様体であり, 中心安定多様体上の解は時間正の方向で進行波から離れない解の集合である. 以下が本講演の主結果である.

**定理 2.**  $c^* > 4/5L^2$  に対し,  $Q_{c^*}(x - ct)$  周りの (ZK) の中心安定多様体  $\mathcal{M}_{cs}(c^*)$  が存在する.

現在投稿中の結果 [5] により, 進行速度  $c$  が  $c > 4/5L^2$  かつ  $c \neq 4n^2/5L^2 (\forall n \in \mathbb{Z})$  の時,  $Q_c(x - ct)$  周りの中心安定多様体の存在を得ていたが,  $c \neq 4n^2/5L^2 (\forall n \in \mathbb{Z})$  の仮定を外すことができた.

正の整数  $n$  に対し, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  は  $c = 4n^2/5L^2$  で, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  と  $\mathbb{T}_L$  方向に一樣でない進行波  $\varphi_{c,n}$  に分岐する.  $n = 1$  のとき, この分岐により,  $c > 4/5L^2$  で不安定な線状進行波  $Q_c(x - ct)$  と, 安定な  $\mathbb{T}_L$  方向に一樣でない進行波  $\varphi_{c,1}$  に分かれることにより, 線状進行波  $Q_c(x - ct)$  の不安定性が起きていた.  $c = 4n^2/5L^2$  では分岐により, 線形作用素  $\partial_x \mathbb{L}_c$  が退化するため, (ZK) の保存量をもとに作られるリャプノフ関数のテーラー展開の 2 次までの項の評価では, 中心安定多様体の候補となる集合上で, 定義 1 の (4) を示せない. さらに, 時間正の方向のみ安定になるので,  $c = 4/5L^2$  の時の安定性の議論を直接適用することができない. そのため,  $c = 4/5L^2$  の時のリャプノフ関数の分岐方向に関する 4 次の評価と, bootstrap argument を用いたリャプノフ関数の残りの 4 次項の評価を用いて,  $c = 4n^2/5L^2$  のときに, (4) を示した.

### 参考文献

- [1] T. B. Benjamin, *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A **328** (1972), 153–183.
- [2] L. Molinet and D. Pilod, *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov-Kuznetsov equation and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **32** (2015), no. 2, 347–371.
- [3] F. Rousset and N. Tzvetkov, *Transverse nonlinear instability of solitary waves for some Hamiltonian PDE's*, J. Math. Pures. Appl. **90** (2008) 550–590.
- [4] Y. Yamazaki, *Stability for line solitary waves of Zakharov-Kuznetsov equation*, J. Differential Equations, **262** (2017), 4336–4389.
- [5] Y. Yamazaki, *Center stable manifolds around line solitary waves of the Zakharov-Kuznetsov equation*, arXiv:1808.07315.

# 球対称気体星の非動径的断熱振動の方程式の線型化スペクトル解析に関する未解決問題について

牧野 哲 (山口大・名誉教授)<sup>1</sup>

自己重力下で断熱運動する気体星の内部構造を規定する Euler-Poisson 方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho v^k) = 0, \quad (1a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v^j}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial P}{\partial x^j} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1b)$$

$$\rho \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial S}{\partial x^k} \right) = 0, \quad (1c)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (1d)$$

を解析する。ここで  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $G$  は正の定数。  $\rho(t, \cdot)$  は台がコンパクトとし, (1d) を

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -4\pi G \mathcal{K} \rho(t, \cdot)(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(t, \mathbf{X}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{X}'\|} d\mathbf{x}' \quad (2)$$

で置き換える。また, 理想気体の状態方程式

$$P = \rho^\gamma \exp\left(\frac{S}{C_V}\right) \quad (3)$$

を仮定する。ここに,  $\gamma, C_V$  は正の定数で  $1 < \gamma < 2$  とする。

半径  $R$  の球対称平衡解  $\rho = \bar{\rho}, P = \bar{P}, S = \bar{S}, \Phi = \bar{\Phi}$  をひとつ固定する。すなわち,  $\bar{\rho}$  等は  $r = \|\mathbf{x}\|$  のみの関数であり,  $\bar{\rho}(\mathbf{x}) > 0 \Leftrightarrow r = \|\mathbf{x}\| < R$  であって, 適当ななめらかさと真空境界での挙動に関する条件をみたすとする。もちろんこの条件は,  $\bar{S} = \text{定数}$ ,  $6/5 < \gamma < 2$  のとき Lane-Emden 関数の与える平衡解がみたす条件である。この平衡解からの Euler 摂動  $\xi = \delta \mathbf{x}, \delta \rho, \delta P, \delta S, \delta \Phi$  の時間発展を規定する方程式を線型近似すると,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mathbf{L} \xi = 0, \quad (4)$$

となる。ここに,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \xi &= \frac{1}{\bar{\rho}} \delta P - \frac{\nabla \bar{P}}{\bar{\rho}^2} \delta \rho + \nabla \delta \Phi, \\ \delta \rho &= -(\nabla | \bar{\rho} \xi), \quad \delta \Phi = -4\pi G \mathcal{K}(\delta \rho). \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>1</sup>Supported by KAKENHI JP18K03371, 冨 755-0017 山口県宇部市芝中町 11-45-1105, e-mail: makino@yamagchi-u.ac.jp



であり,  $\mathbf{x}$  は Lagrange 座標に流用して  $B_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | r = \|\mathbf{x}\| < R\}$  を動くものとしており, 摂動の初期条件には Lagrange 摂動について  $\Delta\rho = 0, \Delta S = 0$  を仮定した。(Lagrange 摂動  $\Delta$  は線型近似下では  $\delta + (\boldsymbol{\xi}|\nabla)$  に等しい。) このとき,  $\Delta S = 0 \quad \forall t$  だから,

$$\delta P = \frac{\overline{\gamma P}}{\rho} \delta\rho + \mathcal{A} \gamma \bar{P} (\boldsymbol{\xi} | \mathbf{e}_r)$$

となる。ただし,  $\mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\mathcal{A} := \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} = -\frac{1}{\gamma C_V} \frac{d\bar{S}}{dr}$  であり,  $\mathcal{A} \leq 0$  の仮定の下で  $\mathcal{N} := \sqrt{-\mathcal{A} d\bar{\Phi}/dr}$  はいわゆる Brunt-Väisälä 振動数である。

線型微分積分作用素  $\mathbf{L}$  を函数空間  $\mathfrak{H} := L^2(B_R, \bar{\rho} d\mathbf{x})$  で考える。

$C_0^\infty(B_R)$  で定義した  $\mathbf{L}$  は下に有界な対称作用素であることがわかり, したがって,  $\mathfrak{H}$  内の自己共役作用素 (以下同じ  $\mathbf{L}$  で表す) へ Friedrichs 拡張できる。そのスペクトルがどうなるかを問題にする。

[2] で証明したように,  $\bar{S} = \text{定数}$  のときは,  $\mathfrak{H}$  で稠密な空間  $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap \{\boldsymbol{\xi} | (\nabla | \bar{\rho} \boldsymbol{\xi}) \in \mathfrak{G}\}$  (ただし  $\mathfrak{G} := L^2(B_R, \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} d\mathbf{x}) \cap \{g | \int g d\mathbf{x} = 0\}$ ) での  $\mathbf{L}$  のスペクトルは  $\Sigma = \{0\} \cup \{\lambda_j\}$  となる。ここに, 固有値 0 は重複度  $\infty$  であり, 固有値  $\lambda_j$  は重複度有限,  $\lambda_1 < \dots < \lambda_j \rightarrow +\infty$  である。しかし,  $\bar{S}$  が定数でないときは, スペクトルはこのように具体的にはわかっていない。尤も,  $\bar{S} = \text{定数}$  のときでも,  $\mathfrak{F}$  ではなく本来の  $\mathfrak{H}$  で考えたときの  $\mathbf{L}$  のスペクトルが  $\Sigma$  以外に連続スペクトルをもつかどうかは未解決である。

さらに  $\bar{S} \neq \text{定数}$  のとき, 宇宙物理学の文献 (例えば [1], [4]) によると, いわゆる「g-mode」とよばれる 0 に集積する固有値列  $(\lambda_{-n})_n, \lambda_{-1} > \dots > \lambda_{-n} \rightarrow +0$  が現れるとされているが, その数学的に厳密な証明も未解決である。

これらの問題について [3] に基づいて球調和函数による展開をもちいたもう少し詳しい状況説明をしたい。

## 参考文献

- [1] J. Cox, Theory of Stellar Pulsations, 1980.
- [2] Juhi Jang and T. Makino, arXiv:1810.08294.
- [3] T. Makino, arXiv:1902.03675.
- [4] W. Unno, Y. Osaki, H. Ando and H. Shibahashi, Nonradial Oscillations of Stars, 1979; 2nd Ed. 1989.

# 細菌集団のライフサイクル

田崎 創平

京都大学高等研究院／理化学研究所生命機能科学研究センター

ヒトを含む生き物の個体は、多くのイベントを経て一生を終え、またどこかで新しい個体が生まれる。この過程を円環になぞらえて、ライフサイクルという<sup>1</sup>。今回扱う真正細菌についても他の生き物と多少異なる点はあれど、大枠は同様である。様々なプロセスを経て、細胞が死を遂げたり、休眠したり、またあるときは栄養を摂取して細胞が成長し、細胞分裂により細胞数が増えたりするのである。

さて、これらは個体のライフサイクルであるが、その一方で、集団のライフサイクルというものがある<sup>2</sup>。その中で、真正細菌の細胞集団（以下、細菌集団）のライフサイクル、特に「バイオフィルムのライフサイクル」とよばれているものがある。一細胞にヒトの一個人を当てはめるならば、このサイクルとは繰り返されてきたヒトの移動の歴史である。ある好ましい環境に辿り着いた集団は、そこに住み着き、社会を形成する。その社会は成長・成熟していく（しなかつたりもする）。そして何らかの条件で、集団の一部が新天地に向けて移動を開始する。移民は再び何らかの（別の）条件が満たされたとき、移動をやめて新しい環境に住み着くことになる。このサイクルの繰り返しがヒトの移動の歴史である。細菌集団においてこれに対応するものがバイオフィルムのライフサイクルとよばれているものである。

数多の細菌種において、異なる細胞状態・細胞タイプが存在する。細菌バイオフィルムのライフサイクルとは、運動タイプを主とする細胞群による「移動」のフェーズと、非運動タイプで環境に定着・成長する「成長・成熟」のフェーズの繰り返しのひと回りのことをいう。すなわち、運動タイプの細胞が「移動」のフェーズを経て、ある条件の環境に至ると、非運動タイプに切り替わり、定着する。この非運動タイプの中で最も影響力があるのは基質産生タイプで、細胞分裂により細菌集団は成長し、また細胞外基質により堅牢な構造（バイオフィルム）を作り出す。このとき、細胞密度は上昇していくが、細胞密度の閾値と関連するような何らかの条件を満たすと、再び細菌集団の中から運動タイプの部分集団が現れる。そして他の細胞タイプの力を借りたりもしながら、コロニーの壁を破って出てくる。この移動形態の細胞集団は新しい環境を求めて旅立っていく。本講演では、このような細菌集団のライフサイクルの生成機構を考える。

---

<sup>1</sup>近年は「ライフ」サイクルといえど、生物以外の類似の概念にも用いる。例えばウイルスの増殖サイクルをライフサイクルといたり、あるいは製品が市場にいる期間を製品ライフサイクルといたりする。

<sup>2</sup>集団をひとまとめにして個体と思えば大まかには同様である。

この特別実験講座の構成は以下の通りである。実験1では、手形寒天培地を用いた実験を通じて、微生物コロニーとは一体どんなものか、どのような大きさ(空間スケール)の細菌集団がどのような時間スケールで現れるのか、そしてそのコロニーを構成している細胞はどんな大きさで、どれくらいの数があるのか、参加者が体感することを狙いとしている。実験2では、遺伝的には同一の枯草菌について、異なる細胞タイプ(Lopez et al., 2009)を実際に顕微鏡で観察する。これにより、細菌集団のライフサイクルにおいて、異なるフェーズの存在と、各々のフェーズで活躍する細胞タイプとその細胞集団のあり方を、身近に感じてもらえれば幸いである。そして最後に、枯草菌をモデルにした細菌集団のライフサイクルの研究を紹介する(Tasaki et al., 2017)。細胞タイプを制御する遺伝子制御ネットワークとその数理モデルを考え、遺伝子発現解析とコロニー周期成長実験を組み合わせることで、細菌集団のライフサイクルの生成と環境応答のメカニズムを示す。

### 実験1：手形寒天培地で衛生チェック～手のどこに菌がいるか予想してみよう

研究集会の出席者の皆様に任意でご参加いただきます(先着)。手形寒天培地を使用して、どのような微生物が手に付着しているのか調べます。直前にしっかり手洗いをして挑んでいただいてもよし、ありのままの自分を曝け出してもよし、です<sup>3</sup>。培地に手をついた後は、手作り感あふれる培養観察装置<sup>4</sup>で1日培養します。培養前に、手のどこに菌がいて、培養するとどんなコロニーができるか、予想してみましよう。コロニーはある種の高性能スキャナを用いると定量的なデータを取得できます。

### 実験2：細菌集団のライフサイクル～枯草菌の異なる細胞タイプを見てみよう

枯草菌を時間をずらしながら培養したものを小型のデジタル顕微鏡で観察します。運動タイプと基質産生タイプ、そして休眠状態である芽胞を見つけます。環境条件や培養時間に対応する細胞タイプをまとめてみましょう。

### 参考文献

Lopez, D., Vlamakis, H., Kolter, R., 2009. Generation of multiple cell types in *Bacillus subtilis*. *FEMS Microbiol. Rev.* **33** (1), 152–63. doi: 10.1111/j.1574-6976.2008.00148.x.

Tasaki, S., Nakayama, M., Shoji, W., 2017. Morphologies of *Bacillus subtilis* communities responding to environmental variation. *Develop. Growth Differ.* **59** (5), 369–378. doi: 10.1111/dgd.12383.

---

<sup>3</sup>今回使用するのは SCDLP 寒天培地というもので、多くの菌が育つよう工夫がされているタイプですので、いずれの目的にも合いそうです。栄研化学「ハンドペたんチェック II SCDLP 培地」商品コード 8240

<sup>4</sup>基本的には宅急便の段ボール箱です。温度調節器、温度センサー、ヒーターを組み合わせます。ヒーターと温度センサーを段ボール箱内に入れ、箱内温度を摂氏 37 度程度に調整します。箱内にスキャナーを入れ、コンピュータで制御することで、箱を開けることなく途中経過を観察できます。インターバル撮影も可能です。

# 動的境界条件付き熱方程式の拡散極限

川上 竜樹 (龍谷大学 理工学部)\*

動的境界条件付き熱方程式

$$(H) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u_\varepsilon(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x, 0) = \varphi_b(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

について考察する。ただし、 $N \geq 2$  であり、 $\varepsilon \in (0, 1)$  とする。ここで、初期条件は領域内部で  $\varphi$ 、境界上では  $\varphi$  で与えられていることに注意する。時間微分を含む問題 (H) の境界条件は動的境界条件と呼ばれ、完全導体との熱接触、攪拌された液体や蒸気からの溶質の拡散等、様々な拡散現象を記述する際に現れる。この問題 (H) に対して、 $\Omega$  が非有界領域の場合、特に

(i)  $\Omega$  が半空間  $\mathbb{R}_+^N$       (ii)  $\Omega$  が単位球の外部領域  $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$

の場合について、 $\varepsilon$  に依らない時間局所 (または大域) 解の構成と拡散極限 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) による解の挙動を考察する。

まず、半空間  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$  の場合について考察する。 $P = P(x', t)$  を  $N-1$  次元ポアソン核とし、 $\mathcal{P}(x', x_N, t) := P(x', x_N + t)$  とすると、 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x, t)$  は斉次動的境界条件付きラプラス方程式の基本解であることがわかる。この  $\mathcal{P}$  を用いて、 $\mathbb{R}^{N-1}$  上の可測関数  $\varphi_b$  に対して、

$$[S(t)\varphi_b](x) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{P}(x' - y', x_N, t) \varphi_b(y') dy' \quad (1)$$

と定めると、これは問題 (H) において、 $\varepsilon = 0$  とした時の解である。ここでは、動的境界条件付き半線型楕円型方程式の研究 (例えば [1] 参照) におけるアプローチをもとに、次の方程式系を考察する。

$$(S) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t v_\varepsilon = \Delta v_\varepsilon - \varepsilon F_1[\varphi_b] - \varepsilon F_2[v_\varepsilon], & \Delta w_\varepsilon = 0, & x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \\ v_\varepsilon = 0, \quad \partial_t w_\varepsilon - \partial_{x_N} w_\varepsilon = \partial_{x_N} v_\varepsilon, & & x \in \partial\mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \\ v_\varepsilon(x, 0) = \varphi(x) - [S(0)\varphi_b](x), & & x \in \mathbb{R}_+^N, \\ w_\varepsilon(x, 0) = \varphi_b(x'), & & x = (x', 0) \in \partial\mathbb{R}_+^N. \end{cases}$$

ここで、

$$F_1[\varphi_b](x, t) := \partial_t [S(t)\varphi_b](x),$$

$$F_2[v](x, t) := \partial_t \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{P}(x' - y', x_N, t-s) \partial_{x_N} v(y', 0, s) dy' ds$$

である。このとき、 $v_\varepsilon$  に関する方程式が  $v_\varepsilon$  について閉じていることに注意する。 $v_\varepsilon$  を半空間における熱核を用いて積分方程式として記述することにより次の結果が得られる。

\* e-mail: kawakami@math.ryukoku.ac.jp

定理 1 ([2])  $N \geq 2$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ ,  $\varphi_b \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$  とする. このとき, 問題 (S) の一意な時間大域解  $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$  が存在し, 任意の  $T > 0$  に対して,

$$\sup_{0 < t < T} \left[ \|v_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} + (\varepsilon^{-1}t)^{\frac{1}{2}} \|\partial_{x_N} v_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} + \|w_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \right] < \infty$$

が成立する. さらに,  $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$  は問題 (H) の古典解であり, 任意の  $L > 0$  と  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$  に対して,

$$\sup_{\tau_1 < t < \tau_2} \|u_\varepsilon(t) - S(t)\varphi_b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times (0, L))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

が成立する.

定理 1 から, 拡散極限を考えると, 問題 (H) の解  $u_\varepsilon$  は動的境界条件付きラプラス方程式の解 (1) に収束することがわかる. このとき, 領域内部における初期値  $\varphi$  の情報が失われていることに注意する. また,  $\varepsilon$  に関する収束の速さ (2) は最適である. ([3] 参照.)

次に, 単位球の外部領域  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$  の場合について考察する. ここでは  $N > 2$  とする. この場合, 半空間の場合とは異なり, フーリエ変換と調和拡張を用いて基本解を得ることはできないが, 単位球におけるポアソン核を元に, 本問題の基本解を構成することができる. 実際,  $P = P(x, y)$  を単位球におけるポアソン核,  $K = K(x, y)$  を  $P$  の  $x$  に関する Kelvin 変換とする. この  $K$  に対して,  $\mathcal{K}(x, y, t) := K(e^t x, y)$  とおくと,  $\mathcal{K}$  は  $\Omega$  における動的境界条件付きラプラス方程式の基本解となる. よって, この基本解と  $\Omega$  における斉次ディリクレ境界条件下での熱核を用いることにより, 半空間の場合と同様に問題 (H) の解を積分方程式として定義することができる.

定理 2 ([4])  $N \geq 3$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  とする. ある  $\theta \in (0, 1)$  に対して,  $\varphi_b \in C^{1, \theta}(\partial\Omega)$  であり,  $\varphi \in L^\infty(\Omega)$  は  $\sup_{x \in \Omega} |x|^{N-2} \varphi(x) < \infty$  を満たすとする. このとき, ある定数  $T > 0$  が存在して,  $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$  は問題 (S) の  $\Omega \times (0, T)$  上の一意解であり,

$$\sup_{0 < t < T} \left[ \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + (\varepsilon^{-1}t)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \right] < \infty$$

を満たす. さらに,  $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$  は問題 (H) の古典解であり, 任意の  $0 < \tau < T$  に対して,

$$\sup_{\tau < t < T} \|u_\varepsilon(t) - S(t)\varphi_b\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$$

が成立する. ここで,  $\alpha$  は  $\alpha = 1$  ( $N = 3$ ),  $\alpha \in (1, 2)$  ( $N \geq 4$ ) を満たす定数である.

本講演は Marek Fila 氏 (Comenius 大学), 石毛 和弘氏 (東京大学), Johannes Lankeit 氏 (Comenius 大学) との一連の共同研究 [2, 3, 4] に基づく.

## 参考文献

- [1] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, J. Math. Pures Appl. 105 (2016), 788–809.
- [2] M. Fila, K. Ishige and T. Kawakami, The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition, submitted.
- [3] M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami and J. Lankeit, Rate of convergence in the large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition, Asymptot. Anal. 114 (2019), 37–57.
- [4] M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami and J. Lankeit, The large diffusion limit for the heat equation with a dynamical boundary condition in the exterior of unit ball, preprint.

# 非一様性をもつ双安定反応拡散系におけるパルスダイナミクス

西 慧 (京都産業大学 理学部)

## 1 はじめに

反応拡散系は、自然界で見られる様々なパターン形成を記述するモデル方程式として広く用いられているが、なかでもパルス解やスポット解のように空間的に局在化した解は多くの散逸系で見られる普遍的な構造である。このような空間局在解については、その存在や安定性などが古くから調べられているが、最近では現実に環境の温度変化や化学物質の濃度勾配などが存在することを考慮して、非一様をもつ系 (パラメータが時間や空間に依存して変化する系) でのダイナミクスについても調べられており、その分岐理論的なメカニズムが数値計算や解析により明らかになりつつある。これまでは主に興奮性媒質を対象に研究が行われてきたが [1][2]、一方で双安定媒質でも2つの界面をもつパルス解が現れ、界面間の相互作用の結果、興奮性のものとは定性的に異なるダイナミクスをみせる。

本講演ではこの双安定媒質に現れるパルス解の非一様媒質中での振る舞いについて得られた結果をご紹介します。本研究は寺本敬氏 (旭川医科大学)、および西浦廉政氏 (東北大学) との共同研究にもとづく。

## 2 主結果

本講演では、以下の2成分反応拡散方程式を考える：

$$\begin{cases} \tau \epsilon u_t = \epsilon^2 u_{xx} + \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - u\right) \left(u - \frac{1}{2}v\right), \\ v_t = Dv_{xx} + u - v + \delta(x). \end{cases} \quad (1)$$

ここで  $t > 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$  とし、各パラメータについては  $\tau > 0$ ,  $D > 0$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$  であるとする。  $\delta(x)$  は  $x$  に依存する関数で、空間非一様性を表す。空間一様な場合 ( $\delta(x) \equiv \delta_0$ )、系 (1) は2つの安定な空間一様解  $(u(x), v(x)) \equiv (\pm 1/2, \pm 1/2 + \delta_0)$  をもつ双安定系であり、2つの空間一様解をつなぐフロント解が存在することも知られている [3]。さらに、 $0 < \delta_0 < 1/2$  では2つのフロント解から構成されるパルス解 (図 1a) が存在し、定常解のみならず脈動解、進行解などが安定な解として現れる。

ここではまず  $\delta(x)$  がジャンプ型の非一様性をもつとし、左からパルス解が進行してきたときに、非一様性と相互作用することでどのようなダイナミクスが生じるかについて考える (図 1a)。進行パルス解の速さやジャンプの高さを変えて数値計算を行うと、定性的に異なる5つの振る舞いがみられる (図 1b)。

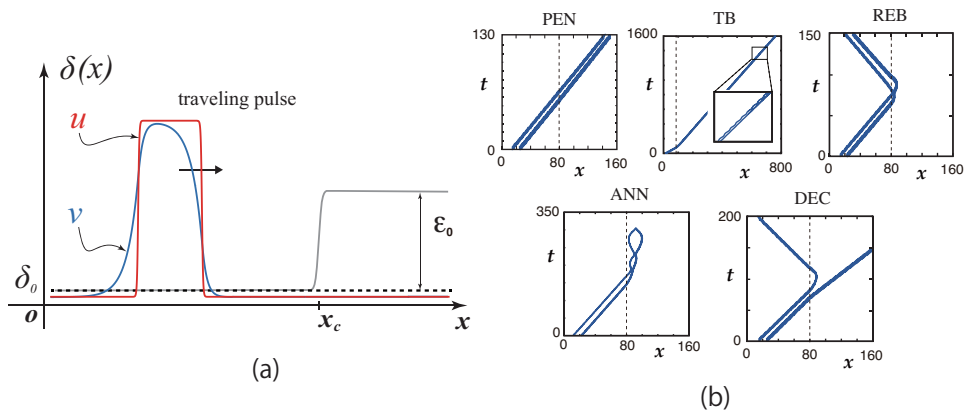


図 1: 式 (1) で数値的にみられる進行パルス解 (a) と、パラメータの値を変えたときにみられるパルス解のダイナミクス (b)。

これらの振る舞いが起きるメカニズムを分岐理論の観点から明らかにすることが、本研究の目的となる。解析をしやすくするために、まず元の方程式 (1) において  $\epsilon \rightarrow 0$  の特異極限をとり、 $u$  成分の方程式を 2 つの界面の運動方程式で置き換える (以下、 $\dot{\cdot} := d/dt$  とする):

$$\begin{cases} \dot{l}_2 = -\frac{v(l_2)}{\sqrt{2\tau}}, & \dot{l}_1 = \frac{v(l_1)}{\sqrt{2\tau}}, \\ v_t = Dv_{xx} + u(x; l_2, l_1) - v + \delta(x). \end{cases} \quad (2)$$

ここで  $x = l_2(t), l_1(t)$  ( $l_2 > l_1$ ) は 2 つの界面の位置とし、第 2 式の  $u(x; l_2, l_1)$  は、区分定数関数  $F(x) = 1/2$  ( $x \leq 0$ ),  $-1/2$  ( $x > 0$ ) を用いて  $u(x; l_2, l_1) := F(x - l_1) - F(x - l_2) - 1/2$  で与えられる。この ODE と PDE からなる系 (2) は、系 (1) のパルスダイナミクスを定性的に非常に良く再現する。また、 $u$  成分の非線形項がなくなり、 $v$  に関しては線形となるため、元の系に比べて定常解の存在や安定性を調べることも容易となる。その結果、一部の振る舞いについてはそのメカニズムを解析的に調べることができるが [4]、PDE を含むため周期解や複雑な界面の運動の時間発展を追うことは難しい。そこで、2 つの界面が十分離れ、かつ各々ゆっくりと運動するという仮定の下でさらに縮約を行い、系 (2) でみられる界面の運動を記述する以下の 4 次元の ODE を導出する [5]:

$$\begin{cases} \dot{l}_2 = r_2, & \dot{l}_1 = r_1, \\ m_0 \dot{r}_2 = \sqrt{2}(\tau_c - \tau) r_2 - g_3 r_2^3 + (G_0 - G_1 r_1) e^{-\frac{r_1 + \phi(r_1)}{2D} h} - \Delta_0(l_2), \\ m_0 \dot{r}_1 = \sqrt{2}(\tau_c - \tau) r_1 - g_3 r_1^3 - (G_0 + G_1 r_2) e^{-\frac{-r_2 + \phi(r_2)}{2D} h} + \Delta_0(l_1). \end{cases} \quad (3)$$

ここで  $h := l_2 - l_1$  および  $r_2(t), r_1(t)$  はそれぞれ 2 つの界面間の距離と速度を表す変数で、 $\phi(r) = \sqrt{r^2 + 4D}$  である。また  $\Delta_0(x)$  は式 (2) の関数  $\delta(x)$  に由来する項で、 $(Dd^2/dx^2 - 1)\Delta_0(x) + \delta(x) = 0$  を解くことで得られる。この 4 次元 ODE は式 (1) や式 (2) でみられるパルスダイナミクスを定性的に良く再現し、とりわけ少数自由度の系なので、分岐解析ソフト AUTO を援用することで解の大域的な分岐構造を調べたり、解析を行うといったことが容易になる。さらには、非一様項  $\delta(x)$  の関数形を様々に変えて、効率的にパルスダイナミクスを探索することも可能となる (図 2)。本講演では式 (2)、式 (3) の導出や解析結果を中心に報告し、時間が許せば系 (1) を拡張した 3 変数系でのダイナミクスや解析結果についてもご紹介したい。

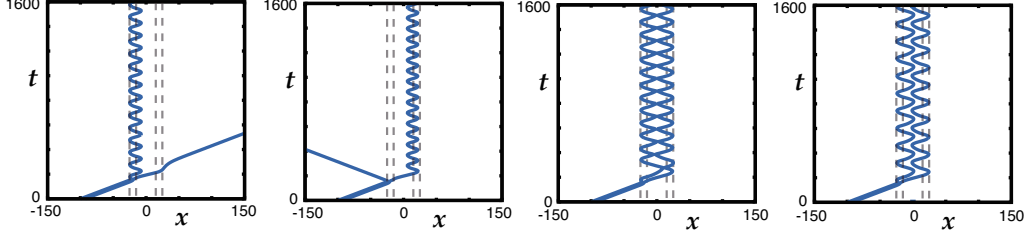


図 2: 非一様項  $\delta(x)$  が井戸型の場合に式 (3) でみられるパルス界面の運動。

## 参考文献

- [1] Y. Nishiura, T. Teramoto, X. Yuan, K.-I. Ueda, *Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media*, *Chaos* **17** (2007) 037104-1–21.
- [2] Y. Nishiura, T. Teramoto, X. Yuan, *Heterogeneity-induced spot dynamics for a three-component reaction-diffusion system*, *Commun. Pure Appl. Anal.* **11** (2012) 307–338.
- [3] S.-I. Ei, H. Ikeda, and T. Kawana, *Dynamics of front solutions in a specific reaction-diffusion system in one dimension*, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **25** (2008), 117–147.
- [4] K. Nishi, Y. Nishiura, and T. Teramoto, *Dynamics of two interfaces in a hybrid system with jump-type heterogeneity*, *Jpn. J. Ind. App. Math.*, **30** (2013), 351–395.
- [5] K. Nishi, Y. Nishiura, and T. Teramoto, *Reduction approach to the dynamics of two interacting front solutions in a bistable reaction-diffusion system and its application to heterogeneous media*, *Physica D*, **398** (2019), 183–207.

# Blow-up criteria for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in higher dimensions

内藤 雄基 (愛媛大学)

空間次元  $N \geq 3$  における次の Cauchy 問題を考える :

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v), & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ 0 = \Delta v + u, & x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

ここで,  $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ ,  $u_0 \geq 0$ ,  $u_0$  は球対称関数とし  $|x|$  について非増加とする. この系 (1) は走化性方程式系を単純化したモデルとして知られており,  $u$  は走化性粘菌の密度,  $v$  は粘菌により分泌される誘因物質の濃度を表している. また, このモデルは天体物理学の分野でも現れることが知られている.

この系 (1) は時間局所的に可解であり, 最大存在時刻を  $T = T[u_0] \in (0, \infty]$  とすると, (1) は  $0 < t < T$  において古典解  $(u, v)$  を一意にもち,  $T < \infty$  ならば

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty$$

を満たす.  $T < \infty$  のとき解は有限時刻で爆発するといいい,  $T = \infty$  の場合, 解は時間大域的であるという. ここでは,  $T < \infty$  あるいは  $T = \infty$  であるための  $u_0$  の条件について考える.

この系 (1) においては解  $u$  の  $L^1$ -ノルムが保存されることが知られている. すなわち  $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N)$  ならば

$$M = \int_{\mathbf{R}^N} u(x, t) dx = \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x) dx \quad \text{for all } t \in [0, T)$$

が成立する. 空間次元  $N = 2$  の場合は,  $M = 8\pi$  が解の時間大域存在と有限時刻爆発の境目になることが知られている. すなわち,  $M < 8\pi$  ならば解は時間大域的に存在し, 一方  $M > 8\pi$  ならば有限時刻爆発すること, 球対称解は原点に  $8\pi$  の重みをもって集中すること等が知られている. 空間次元  $N \geq 3$  の場合には, Biler 等 [1] により  $N = 2$  の場合の類推から次の問題が提起されている :

「解の時間大域存在と有限時刻爆発を分ける, 初期値  $u_0$  から決まる量  $\ell = \ell(u_0)$  が存在するか?」

「さらに  $\ell(u_0) < c_N$  ならば解は時間大域的であり  $\ell(u_0) > C_N$  ならば有限時刻爆発するという定数  $0 < c_N \leq C_N < \infty$  は存在するか?」

これらの問いに対して, [1] では部分的な解答が与えられている. 指数  $1 \leq p \leq \infty$  に対して Morrey 空間  $M^p(\mathbf{R}^N)$  は次により定義される :

$$M^p(\mathbf{R}^N) = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N) : \|f\|_{M^p} < \infty\},$$
$$\|f\|_{M^p} = \sup_{R>0, x \in \mathbf{R}^N} R^{N(1/p-1)} \int_{|y-x|<R} |u(y)| dy.$$



定理 A [1, Theorem 2.1] ある  $p \in (N/2, N)$  に対して  $u_0 \in M^{N/2}(\mathbf{R}^N) \cap M^p(\mathbf{R}^N)$  とする .  
このとき

$$\sup_{R>0} R^{2-N} \int_0^R r^{N-1} u_0(r) dr < 2$$

ならば (1) の解は時間大域的である .

系 (1) の Chandrasekhar 定常特異解と呼ばれる  $u_C(x) = \frac{2(N-2)}{|x|^2}$  は

$$R^{2-N} \int_0^R r^{N-1} u_C(r) dr = 2 \quad \text{for all } R > 0$$

を満たすことに注意する .

Cauchy 問題 (1) の球対称解  $(u, v) = (u(r, t), v(r, t))$ ,  $r = |x|$  に対して  $w$  を

$$w(r, t) = \frac{1}{r^N} \int_0^r s^{N-1} u(s, t) ds \quad \text{for } (r, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$$

と定めることにより, (1) は次の単独の方程式に対する Cauchy 問題

$$(2) \quad \begin{cases} w_t = w_{rr} + \frac{N+1}{r} w_r + r w_r w + N w^2 & \text{for } (r, t) \in (0, \infty) \times (0, T), \\ w(r, 0) = w_0(r) & \text{for } r \in (0, \infty), \end{cases}$$

に帰着される . ここで  $w = w(r, t)$  を空間  $\mathbf{R}^{N+2}$  における球対称解, すなわち  $r = |x|$ ,  $x \in \mathbf{R}^{N+2}$  と見なすことにより (2) における方程式は次のように書けることに注意する .

$$w_t = \Delta w + (x \cdot \nabla w) w + N w^2 \quad \text{for } (x, t) \in \mathbf{R}^{N+2} \times (0, T).$$

本講演では, この単独の方程式およびその球対称定常解の満たす常微分方程式

$$(3) \quad W_{rr} + \frac{N+1}{r} W_r + r W_r W + N W^2 = 0, \quad r \in (0, \infty),$$

を考察することにより (1) の解の爆発のための判定条件を導く .

## References

- [1] P. Biler, G. Karch and D. Pilarczyk, Global radial solutions in classical Keller-Segel model of chemotaxis, J. Differential Equations 267 (2019) 6352–6369.
- [2] P. Biler and J. Zienkiewicz, Blowing up radial solutions in the minimal Keller-Segel model of chemotaxis, J. Evol. Equ. 19 (2019) 71–90.
- [3] T. Ogawa and H. Wakui, Non-uniform bound and finite time blow up for solutions to a drift-diffusion equation in higher dimensions, Anal. Appl. (Singap.) 14 (2016) 145–183.
- [4] T. Senba, Blowup behavior of radial solutions to Jäger-Luckhaus system in high dimensional domains, Funkcial. Ekvac. 48 (2005) 247–271.