反応拡散系の特異極限問題に関する２つの話題

二宮　広和　(明治大学)*

1　はじめに

多くの現象を表現するモデルとして，反応拡散系が使われ，さまざまな時空間パターンが報告されている ([7, 8, 11, 13, 14])．2 成分の場合，

$$\begin{cases} u_t &= d_1\Delta u + f(u,v), \\ v_t &= d_2\Delta v + g(u,v) \end{cases} \tag{1.1}$$

となる．この方程式の解のダイナミクスを知りたいが，一般には難しいので，小さいパラメータを導入して，解の形状を階段関数にすることで，複雑なプロファイルに関する情報を簡素化し，不連続となる界面の幾何学的な情報に集中することができる．ここでは，２つの特異極限問題を考察する．

2　反応界面系

(1.1) に小さなパラメータを入れる方法はいろいろあるが ([5])，[2] で考察された以下の反応拡散系を考えよう．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon^2}(f_\varepsilon(u) - \varepsilon\beta v), & x \in \mathbb{R}^2,\ t>0, \\ v_t = g(u,v), & x \in \mathbb{R}^2,\ t>0, \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，ε は正の定数で非常に小さいとする．また，$\alpha>0$, $\beta>0$, $g_j>0$ $(j=1,2,3,4)$ とし，f_ε, g は以下の通りとする．

$$f_\varepsilon(u) := u(1-u)\left(u-\frac{1}{2}+\varepsilon\alpha\right), \quad g(u,v) = g_1u - \frac{g_2 v}{g_3 v + g_4}.$$

$\varepsilon>0$ が小さい場合に，常微分方程式系が単安定になるように，$g_1g_3 > 2g_2$ を仮定する．これまで，[5] のように (2.1) の v の方程式に拡散項がついた問題が考えられてきた．拡散項がない場合は，極限問題が一般の初期値に関して適切な問題ではないことが知られている ([1])．[3, 4] では，[1] のアイデアを参考に弱解の構成と解のダイナミクスを調べることに成功した．その概要を説明していく．1 次元の場合の (2.1) の特異極限問題は，

$$\begin{cases} V = W(v) := a - bv, & x \in \partial\Omega(t),\ t>0, \\ v_t = g(\mathbf{1}_{\Omega(t)}, v), & x \in \mathbb{R},\ t>0, \\ \Omega(0) = \Omega_0, \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2}$$

* 〒164-8525　東京都中野区中野 4-21-1　明治大学　総合数理学部
本研究は科研費 (課題番号:20H01816) の助成を受けたものである。

となる．ここで，$\mathbf{1}_{\Omega(t)}$ は $\Omega(t)$ 上で 1，$\Omega(t)$ の外で 0 になる特性関数で，V は法線速度，

$$W(v) = a - bv, \quad a = \sqrt{2}\alpha, \quad b = 6\sqrt{2}\beta$$

である (詳細は [2] 参照)．これを**反応界面系**と呼ぶ．(Ω_0, v_0) は以下を満たすとする．

(H1) (有界性) Ω_0 は m 個の区間よりなるとする．つまり，$\Omega_0 := \bigcup_{i=1}^{m}(x_i^0, x_{i+1}^0)$．ここで，$x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, \cdots, 2m-1)$ とする．また，$v_0 \geq 0$ は有界なリプシッツ連続関数とし，$M := \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ とおく．

(H2) (適切性) $x \in \partial\Omega(0)$ 上 $W(v_0(x)) \neq 0$.

$Q_T := \mathbb{R} \times [0, T]$ 上での古典解を定義することができ，**(H1)**, **(H2)** の仮定の下で，(2.2) の局所古典解の存在および一意性を示すことができる．しかし，古典解では界面の衝突など大変形を伴う遷移過程を扱えないので，弱解を定義して時間大域的な解を取り扱えるようにする．

定理 2.1（[3, 4]） **(H1)**, **(H2)** を仮定すると，(2.2) の大域的な弱解 (Ω, v) が一意的に存在する．さらに，(2.2) の弱解は以下のいずれかである．

(I) ある時刻 T が存在して，$\Omega(t) = \emptyset$ $(t \geq T)$, $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |v(x,t)| = 0$ をみたす.

(II) m_+ 個の右に動くパルス解と m_- 個の左に動くパルス解をもつ関数 $v_\infty(x,t)$ に収束する．

(III) (II) に加えて，2 つのフロント解が存在するような $v_\infty(x,t)$ に収束する．

3 面積保存曲率流

1986 年，Gage は平面曲線 $\Gamma(t)$ の面積保存曲率流

$$V = \frac{2\pi}{L(t)} - \kappa$$

を考察し，凸閉曲線は，円に収束することを示した [6]．ここで，$\Gamma(t)$ の囲む領域を $\Omega(t)$ とし，V は，$\Omega(t)$ の外向き法線速度，κ を曲率，$L(t)$ は $\Gamma(t)$ の長さである．面積や体積を保存する界面の運動は，アメーバなどの細胞運動や油滴の運動など自然界に数多く見られる．これらの運動では，外界の影響を受けて運動を行っているので，ここでは，非一様場における面積保存曲率流を対象としよう．養分・走化性物質や界面活性剤の濃度などの外界からの刺激を a とする．この a は，空間 (x,y) にのみ依存し，時間 t によらないと仮定し，界面 $\Gamma(t)$ 上の点 (x,y) での外力は，その点での刺激 $a(x,y)$ に比例と仮定しよう．比例定数 K をもつ曲率流

$$V = Ka(x,y) - \kappa$$

によって動く界面 $\Gamma(t)$ が囲む領域 $\Omega(t)$ の面積が保存することから，

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Omega(t)} dxdy = \int_{\Gamma(t)} V ds = \int_{\Gamma(t)} (Ka(x,y) - \kappa)\, ds = K\int_{\Gamma(t)} a(x,y)ds - 2\pi = 0$$

となり，比例定数 K が $K = 2\pi / \int_{\Gamma(t)} \kappa ds$ と求められる．以降，非一様場における面積保存曲率流

$$V = \frac{2\pi a(x,y)}{\displaystyle\int_{\Gamma(t)} a(x,y)ds} - \kappa \tag{3.1}$$

を考察する．

(3.1) における定常解や単純閉凸曲線解の大域的存在については，すでに [9, 10] で議論している．ここでは，界面 $\Gamma(t)$ が十分小さい円に近い場合のダイナミクスについて考察しよう．このとき，$\int_{\Gamma(t)} a(x,y)ds$ が小さくなるので，(3.1) は一種の特異摂動問題になっていて，その極限問題を求めることに対応していることに注意する．

$\Omega(t)$ の中心 $\mathbf{c}(t)$ を

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{|\Omega(t)|}\iint_{\Omega(t)} \mathbf{x}dxdy = \frac{1}{3|\Omega(t)|}\int_{\Gamma(t)} (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{x}ds$$

で定めよう．ここで，$\mathbf{n}$ を単位法線ベクトルとし，$\mathbf{x} = (x,y)^T$ とした．このとき，$\Omega(t)$ の中心 $\mathbf{c}(t)$ のみたす方程式は,

$$\mathbf{C}_t = \frac{\nabla a(\mathbf{C})}{a(\mathbf{C})} = \nabla \log a(\mathbf{C}), \quad \mathbf{C}(0) = \mathbf{c}(0) \tag{3.2}$$

で近似できることが，以下の定理により示される．

定理 3.1（[12]） $\Gamma(0) \Subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a(x,y) > 0\}$ をみたし，$\Gamma(0)$ が囲む面積は $\pi\varepsilon^2$ とし，$\Gamma(0)$ は半径 ε の円に十分近いと仮定する．また，$\mathbf{C}(t)$ を (3.2) の解で，$t \to \infty$ で $\mathbf{C}^* = (x^*, y^*)^T$ に収束すると仮定する．さらに，$\nabla^2 a(x^*, y^*) < 0$ と仮定する．このとき，以下をみたす正数 ε_* と K_1 が存在して, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ のとき,

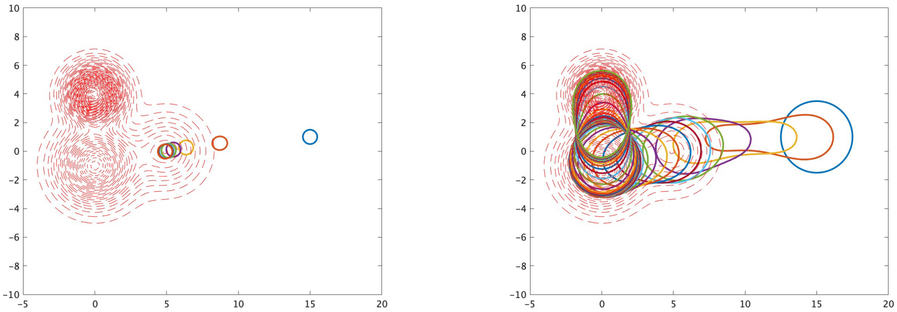
$$\sup_{t\geq 0} |\mathbf{c}(t) - \mathbf{C}(t)| \leq K_1\varepsilon$$

がなりたつ．

細胞は，小さいため外界からの刺激 $a(x,y)$ の勾配を検知することは，難しいと考えられてきた．しかし，この定理は，細胞膜などの境界で外界の刺激の大きさのみを検知すれば，体積保存の性質から，自動的に勾配を検知できることを意味している．

参考文献

[1] X.-F. Chen, C. Gao, *Well-posedness of a free boundary problem in the limit of slow-diffusion fast-reaction systems.* J. Partial Differ. Equ 19 (2006) 48–79.



(a) 面積が小さい場合　　(b) 面積が大きい場合

図 1　a の最大値に向かって移動する (3.1) の解の挙動（実線）．破線は a の等高線.

[2] Y.-Y. Chen, Y. Kohsaka and H. Ninomiya, *Traveling spots and traveling fingers in singular limit problems of reaction-diffusion systems*, Discrete Cont. Dyn. Syst. (Ser. B) **19** (2014), 697–714.

[3] Y.-Y. Chen, H. Ninomiya and C.-H. Wu, *Global dynamics on one-dimensional excitable media*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **53** (2021) 7081–7112.

[4] Y.-Y. Chen, H. Ninomiya and C.-H. Wu, *Global existence and uniqueness of solutions for one-dimensional reaction-interface systems*, Journal of Differential Equations 324 (2022): 102-130

[5] P.C. Fife, *Propagator-controller systems and chemical patterns.* in *"Non-equilibrium dynamics in chemical systems"* edts. by C. Vidal and A. Pacault (1984), 76-88.

[6] M. Gage, *On an area-preserving evolution equation for plane curves.* Contemp. Math 51 (1986): 51-62.

[7] A. Hagberg, E. Meron, *Pattern formation in non-gradient reaction-diffusion systems: the effects of front bifurcations*, Nonlinearity, **7** (1994) 805.

[8] R. Kapral,K. Showalter (eds.), *Chemical waves and patterns*, Vol. 10. (2012) Springer Science & Business Media.

[9] R. Lui, and H. Ninomiya, *Stationary solutions of an area-preserving curvature flow in an inhomogeneous medium.* Proceedings of the American Mathematical Society 150 (2022): 2095-2105.

[10] R. Lui, and H. Ninomiya, *Global existence of solutions of area-preserving curvature flow of a convex plane curve in an inhomogeneous medium.* Partial Differential Equations and Applications 3 Article number: 42 (2022)

[11] E. Meron, *Pattern formation in excitable media*, Phys. Rep. **218** (1992) 1–66.

[12] H. Ninomiya, *Dynamics of area-preserving curvature flow of convex plane curves with small area in an inhomogeneous medium*, preprint

[13] J.J. Tyson, J.P. Keener, *Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media (a review)*, Physica D **32** (1988), 327–361.

[14] A.T. Winfree, *Spiral waves of chemical activity*, Science. **175** (1972), 634–636.