流体系におけるなめらかでない解の安定化機構

大縄 将史　(東京海洋大学 学術研究院 海洋環境科学部門)*

大気や河川など自然界の流れ，あるいは機械の中の流れなど様々な場において，ある物理変数が不連続，またはせまい範囲で急激に変化することがしばしば見られる．このような急激な変化は単純に目につきやすいのはもちろんだが，流体系は往々にして一様化していくので，その構造が維持されるのか，そうであるならばどのように維持されるのかは興味深いテーマである．特に流体が構造物に接しているような場合では，変化が起きている場所が時々刻々動くことに伴って構造物へ及ぼす力が時間的に急激に変化するのでそのメカニズムを理解することは重要な意味を持っている．

本研究ではまず，Hamer model と呼ばれる輻射を伴う流体系の簡易モデルを扱う．対象は，$\mathbb{R}$ 上における 2 変数 (u,q) の方程式系

$$\begin{cases} u_t + uu_x + q_x = 0, \\ -q_{xx} + q + u_x = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} q(x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

における定常解 $(U,Q)(x)$ である（$\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \mp\delta_S/2$ $(\delta_S > 0)$ とする）．

任意の正の δ_S に対して定常解が存在するが，δ_S の値によって解の可微分性が異なる．特に，$\delta_S < \sqrt{2}$(subcritical) または $\delta_S = \sqrt{2}$(critical) ではなめらかな U が，$\delta_S > \sqrt{2}$(supercritical) では不連続になる．(Schochet-Tadmor(1992), Kawashima-Nishibata(1998))

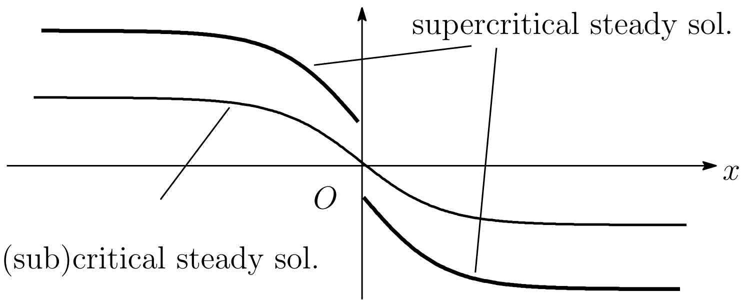

Fig.1 : Profiles of $U(x)$ for various δ_S.

安定性に関して言えば，連続な定常解の一部 (δ_S が十分に小さい場合) については既に示されていたが，不連続な定常解や連続な定常解でも δ_S がある程度大きい場合には未解明であった．また，u の初期値 $u_0(x)$ について $\inf_x u_0'(x)$ が負の値で十分に小さければ有限時間で爆発，すなわち $\inf_x u_x(t,x)$ が $-\infty$ に発散することが知られていた．

筆者は爆発が起きるか否かに，安定性で評価する $\|\phi(t,\cdot)\|_{L^2}$ が密接に関わっていることに着目し，亜臨界定常解に関して [1] で次の結果を得た．

定理 1 $\phi_0(x) := u_0(x) - U(x)$, $\varPhi_0(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi_0(y)dy$,　ϕ_0, $\varPhi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ とする．

(i) $\delta_S \in (0,\sqrt{2})$ の場合は，$\inf_x u_0'(x) > -\left(1+\sqrt{1-\delta_S^2/2}\right)/2$, $\|\varPhi_0,\phi_0\|_{L^2} \ll 1$ ならば時間大域解が存在し，解は定常解に一様収束する．

(ii) $\delta_S = \sqrt{2}$ の場合は，爆発を引き起こす任意に小さい初期摂動 $\phi_0(x)$ が存在する．

本研究は科研費 (課題番号:17K05313, 21K03305) の助成を受けたものである。

*e-mail: ohnawa@m.kaiyodai.ac.jp

系 (1) には粘性 Burgers 方程式よりも弱いながらも散逸の効果が含まれているため，亜臨界定常解の周りでは u_x を下から抑えて安定であるが，超臨界定常解では不連続点周りでの U' の絶対値が大きく，亜臨界の場合と同じ機構では系を安定化させることができない．それを解決するのが不連続点の存在である．不連続点 $x = d(t)$ ではエネルギーを散逸するようにエントロピー条件 $u(t, d(t) - 0) > u(t, d(t) + 0)$ が成り立つことに着目して [2] では次の結果を得た．

定理 2 $u_0(x)$ は $x = d_0$ を除いて連続で $u_0(d_0 - 0) > u_0(d_0 + 0)$ であり，摂動の初期値 $\phi_0(\xi) := u_0(d_0 + \xi) - U(\xi)$ について $\phi_0(\xi) \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ および $\Phi_0(\xi) := \displaystyle\int_{\pm\infty}^{\xi} \phi_0(\eta) d\eta$ (for $\pm\xi > 0) \in L^2$ を満たすとする．
(i) $\delta_S \gg \sqrt{2}$ かつ $\|\Phi_0\|_{L^2} + \|\phi_0\|_{H^2} \ll 1$ ならば時間大域解が存在し，$t \to \infty$ の極限において $\|\phi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \to 0$ および $d(t) \to 0$ が成り立つ．
(ii) ϕ_0 が十分に小さな奇関数ならば，すべての $\delta_S > \sqrt{2}$ に対し (i) の結論が成り立つ．

系 (1) は連立系であるが，特性曲線は 1 本だけで不連続点の両側から不連続点に向かって特性曲線が入るという点で比較的扱いやすかったが，気体の流れや浅水流モデルのように特性曲線が 2 本以上ある場合には状況は複雑になる．

風が山脈を越える際に，風下側に時に砕波を伴う強風を引き起こすような状況 (河川の堰やダムにも見られる) について考察する際には浅水方程式系が用いられることが多い．風はある一方向に吹き，地形はそれに直交する方向には一様であると仮定し，現象は空間的に一変数 x のみに依存すると簡単化する．未知関数 $(h, u)(t, x)$ は大気層の厚さと速度，$b(x)$ は x 地点における標高を表すとき，支配方程式系は

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{2a}$$

$$(hu)_t + (hu^2)_x + gh(h + b)_x = 0 \tag{2b}$$

である．ここで g は reduced gravity という正定数である．砕波 (不連続点) を含む定常流を考察するにあたり，系 (2) 自体に散逸に寄与する効果が含まれないことが困難を催す．そこで山頂より風上側に始まり，不連続点を含みさらに風下側に進んだ場所までの有界区間に区切り，適当な境界条件と両立条件を課す．講演では領域全体が超臨界の結果 [3] を説明し，時間が許せば亜臨界流れも含む状況における境界条件と定常解の関係，定常解の安定性に関する最近の研究を紹介したい．

参考文献

[1] M. Ohnawa, *L^∞-stability of continuous shock waves in a radiating gas model*, SIAM. J Math. Anal. **46** (2014) 2136-2159.

[2] M. Ohnawa, *L^∞-stability of discontinuous traveling waves in a hyperbolic-elliptic coupled system*, SIAM. J Math. Anal. **48** (2016) 3820-3839.

[3] M. Ohnawa and M. Suzuki, *Time-periodic solutions of symmetric hyperbolic systems*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **17** (2020) 707-726.