Improved bilinear Strichartz estimates with application to the well-posedness of periodic generalized KdV type equations

田中 智之　(同志社大学理工学部)*

本講演の内容は, Luc Molinet 氏 (トゥール大学) との共同研究に基づく. 次の初期値問題を考える:

$$\partial_t u + L_{\alpha+1}u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{T}. \tag{2}$$

ここで, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha \in [1,2]$. また, $u_0(x) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ は既知関数, $u(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ は未知関数である. 以下, P_N は周波数 N 付近に制限する Littlewood-Paley 作用素, $\mathcal{H}$ はヒルベルト変換, $\widehat{D}_x = |\xi|$ とする. 本研究では, $L_{\alpha+1}$ と f に以下を仮定する.

仮定 1. $\widehat{L}_{\alpha+1} = -ip_{\alpha+1}(\xi)$. ここで, $p_{\alpha+1}(\xi) \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ は実数値奇関数であり, ある $\xi_0 > 0$ に対し, $\xi \geq \xi_0$ ならば, $p'_{\alpha+1}(\xi) \sim \xi^{\alpha}$ と $p''_{\alpha+1}(\xi) \sim \xi^{\alpha-1}$ が成立する.

仮定 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は実解析的であり, そのテイラー展開の収束半径は無限大.

方程式 (1) のクラスは, KdV 方程式 ($L_3 = \partial_x^3$, $f(x) = x^2$) や, Benjamin-Ono 方程式 ($L_2 = -\mathcal{H}\partial_x^2$, $f(x) = x^2$) を含む. また, 純粋な分散項 ($L_{\alpha+1} = -\partial_x D_x^{\alpha}$) が摂動されたような場合も含まれる. 具体的には, Intermidiate Long Wave 作用素 $L_2 = -\partial_x D_x \coth(D_x)$ や, Smith 作用素 $L_2 = -\partial_x(D_x^2+1)^{1/2}$ なども仮定 1 を満たす. 仮定 2 を満たす関数は, 多項式の他に $e^x, \sin x, \cos x$ や, これらの積や合成などがある. KdV 方程式や Benjamin-Ono 方程式は, 可積分系の方程式として知られている. 本研究の目的は, そのような特殊な対称構造は用いずに, 仮定 1 及び 2 を満たす広いクラスの方程式に対する初期値問題の適切性と, 無条件一意性を証明することである. 本研究での主な興味の対象は, $f(x) = x^k, k \geq 4$ の場合である.

一般化 KdV 方程式 ($L_3 = \partial_x^3$, $f(x) = x^k, k \geq 4$) に対する先行研究を述べる. Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Tao [2] は, $X^{s,b}$ 空間上の多重線形評価を用いることで $H^{1/2}(\mathbb{T})$ における初期値問題の適切性を示した. 無条件一意性については, $H^{2/3}(\mathbb{T})$ での結果が [4] によって報告されている. なお [4] では仮定 1 及び 2 のもとで初期値問題の適切性と無条件一意性が $H^s(\mathbb{T}), s \geq 1 - \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$ で得られている. 本研究の主結果を述べる.

定理 1 ([5])**.** $\alpha \in [1,2]$ に対して, 仮定 1 及び 2 が成立しているとする. また, $s > 1/2$ とする. このとき, 初期値問題 (1)–(2) は $s \geq s(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{4}$ に対して, $H^s(\mathbb{T})$ において時間局所適切である. 更に, 無条件一意性が成立する.

注意 2. $s(2) = 1 - 1/2 = 1/2$ であるが, $s > 1/2$ という仮定が必要であるため $\alpha = 2$ のときの適切性の結果は [2] の結果よりも $\varepsilon > 0$ だけ弱い. $s > 1/2$ は埋め込み $H^{1/2+}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{T})$ を用いることから生じる.

証明のポイントは, 非線形項の微分から生じる微分の損失をいかに解消するかにある. 方程式 (1) は次数の高い非線形項も含むため, 非線形相互作用には, 共鳴なものと

* e-mail: tomtanak@mail.doshisha.ac.jp

非共鳴なものの二種類ある．[4] では, 非共鳴な相互作用を [6] によって導入された議論に基づき処理した．その内容は, 時間に関する部分積分に相当する方法を使うことであり, $s > 1/2$ であれば容易に評価を閉じることができる．共鳴な相互作用は, [3] による Strichartz 型評価を用いた．[4] の $s \geq 2/3$ という仮定は, この Strichartz 型評価を用いたことによる．このため, 以下では共鳴な相互作用をより弱い仮定のもとで処理する方法について述べる．方針は, [3] による Strichartz 型評価を双線形化することである．

命題 3. $0 < T < 1$, $\alpha \in [1,2]$, $N_1, N_2 \in 2^{\mathbb{N}}$, $f_1, f_2 \in L^\infty(]0,T[; L^2(\mathbb{T}))$ とする．また, $u_1, u_2 \in C([0,T]; L^2(\mathbb{T}))$ は $\partial_t u_j + L_{\alpha+1} u_j + \partial_x f_j = 0$ を $]0,T[\times\mathbb{T}$ 上で満たしているとする $(j = 1,2)$．このとき次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \|P_{N_1}u_1 P_{N_2}u_2\|_{L^2_{T,x}} \lesssim T^{-\frac{1}{4}}(N_1 \vee N_2)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\ (\|P_{N_1}u_1\|_{L^2_{T,x}} + \|P_{N_1}f_1\|_{L^2_{T,x}}) \\ \times (\|P_{N_2}u_2\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|P_{N_2}f_2\|_{L^\infty_T L^2_x}). \end{aligned} \tag{3}$$

先行研究 [4] で用いた Strichartz 型評価は,

$$\|P_N u\|_{L^4_{T,x}} \lesssim N^{\frac{1}{4(\alpha+1)}}(\|P_N u\|_{L^4_T L^2_x} + \|P_N f\|_{L^4_T L^2_x}) \tag{4}$$

であった．(3) は, 正則性の観点から (4) の改良になっている：

$$\frac{2}{4(\alpha+1)} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{4(\alpha+1)} \geq 0.$$

しかし $\alpha = 1$ のときは右辺は $= 0$ となり, 実際 [5] と [4] は同じ結論になる．この評価 (3) を共鳴な相互作用 (3 つの input が High で, output が High のとき) に用いると, $4(s - (\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{8})) \geq 2s + 1 \Leftrightarrow s \geq s(\alpha)$ であることが必要となる．

評価 (3) を得る上で, ある集合における格子点の個数を数え上げることが重要となる．$x \in \mathbb{T}$ の設定では, 周波数空間において一点が測度をもつため得られた評価をそのまま応用することは難しい．ポイントとなるのは, 時間を短く制限することで得られるある種の平滑化効果を $X^{s,b}$ 空間の枠組みで用いることである ([1])．その元になるのは, 次の簡単な不等式である：

$$\|\chi(L\,\cdot)g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\chi(L\,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \lesssim L^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{B^{\frac{1}{2}}_{2,1}(\mathbb{R})}.$$

ここで $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ であり, $B^{\frac{1}{2}}_{2,1}(\mathbb{R})$ はベゾフ空間である．この不等式は, 不確定性原理の応用とも言える．

参考文献

[1] A. D. Ionescu, C. E. Kenig and D. Tataru, *Global well-posedness of the initial value problem for the KP-I equation in the energy space*, Invent. Math. **1**73 (2008), 265–304.

[2] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Multilinear estimates for periodic KdV equations, and applications*, J. Funct. Anal. **2**11 (2004), 173–218.

[3] H. Koch and N. Tzvetkov, *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in* $H^s(\mathbb{R})$, Int. Math. Res. Not. IMRN, **26** (2003), 1449-1464.

[4] L. Molinet and T. Tanaka, *Unconditional well-posedness for some nonlinear periodic one-dimensional dispersive equations*, J. Funct. Anal. **2**83 (2022), 109490.

[5] L. Molinet and T. Tanaka, *Improved bilinear Strichartz estimates with application to the well-posedness of periodic generalized KdV type equations*, arXiv:2207.08725.

[6] L. Molinet and S. Vento, *Improvement of the energy method for strongly nonresonant dispersive equations and applications*, Anal. PDE **8** (2015), 1455–1495.