研究集会「PDEs and Phenomena in Miyazaki 2003」

日時： 2003 年 10 月 31 日（金）～ 11 月 2 日（日）

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内： http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2003.html

プログラム

10 月 31 日（金）

午後の部

14:30-15:20 **黒木場正城**（福岡大理）

「Maximal attractor and inertial sets for Eguchi-Oki-Matsumura equation」

15:40-16:30 **三沢正史**（熊大理）

「定平均曲率曲面の時間発展に対する初期値境界値問題」

16:40-17:30 **村川秀樹・中木達幸**（九大数理）

「ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法」

11 月 1 日（土）

午前の部

10:00-10:50 **竹内慎吾**（工学院大）

「空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状」

11:00-11:50 **石毛和弘**（名大多元数理）

「Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題について」

午後の部

13:30-14:20　**石渡通徳**（早大理工）

「Asymptotic behavior of some global solutions for nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity」

14:30-15:20　**水町徹**（横浜市大理）

「Instability of nonradial bound states for 2D nonlinear Schrödinger equation」

15:40-16:30　**飯島健太郎**（茨城大理工）

「Laplace 方程式の Cauchy 問題および逆向き熱伝導問題の任意多点差分法を用いた数値解法」

16:40-17:30　**櫻井建成**（宇部高専）

「反応拡散モデルの情報処理への応用」

11 月 2 日（日）

午前の部

10:00-10:50　**坂上貴之**（北大理）

「極渦のある球面での渦層の運動」

11:00-11:50　**長山雅晴**（京大数研）

「反応拡散場での粒子運動の数理モデルについて」

12:00-12:50　**大崎浩一**（宇部高専）

「反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉、壁谷／若手 B：矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人：　辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、矢崎成俊（宮崎大学工学部）

連絡先：　辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail：tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381 ／ 0985-58-7288（事務室）& FAX：0985-58-7289

MAXIMAL ATTRACTOR AND INERTIAL SET FOR EGUCHI-OKI-MATSUMURA EQUATION

Masaki Kurokiba
Department of Applied Mathematics,
Faculty of Science, Fukuoka University
Fukuoka, 814-0180, Japan
kurokiba@bach.sm.fukuoka-u.ac.jp

The results of this talk were obtained in a joint work with Naoto Tanaka (Fukuoka University) and Atsusi Tani (Keio University). In this talk we consider following system of equations which was proposed by Eguchi-Oki-Matsumura ([1]):

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta(-\Delta u + 2u + uv^2), & (x,t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \beta \Delta v + \alpha v(a^2 - u^2 - b^2 v^2), & (x,t) \in Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \Gamma_T \equiv \Gamma \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbf{R}^3$ with smooth boundary $\partial\Omega \equiv \Gamma$ and $T > 0$. Here $u(x,t)$ is the local concentration of the solute atoms, $v(x,t)$ is the local degree of order, respectively. α, β, a, b are positive constants and $\dfrac{\partial}{\partial n}$ is exterior normal derivative to Γ.

It is well known that phase separation is described by so-called Cahn-Hilliard equation which is fourth order parabolic type, while the order-disorder transition is described by Allen-Cahn equation. The system (1) is a model of simultaneous order-disorder and phase separation in binary alloys. In our previous work [2], it was proved that there exist a unique local and global solution to problem (1).

In this talk we show the dynamics of the problem, namely the existence of a maximal attractor and of an inertial set to problem (1). The main theorems are as follows:

Theorem 1. *Let* $H_{\bar{u}} = \{(u,v) \in (H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega); \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx = \bar{u}\}$. *For any* $\delta \geq 0$, *the semi-group* $S(t)$ *associated with problem* (1) *posesses in* $\mathcal{H}_\delta = \bigcup_{|\bar{u}| \leq \delta} H_{\bar{u}}$ *a maximal attractor* $\mathcal{A}_\delta$ *that is connected.*

Theorem 2. *Let* B_δ *be the absobing set in* $(H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega)$ *and* $X_\delta = \overline{\cup_{t \geq t_0} S(t) B_\delta}$. *Then there exists an inertial set* M_δ *for* $(S(t)_{t\geq 0}, X_\delta)$ *which has fractal dimension.*

References

[1] T. Eguchi, K. Oki and S. Matsumura, Kinetic of ordering with phase separation, Mat. Res. Soc. Symp. Proc., **21** Elsevier, 1984, 589-594.
[2] M. Kurokiba, N. Tanaka and A. Tani, Existence of solution for Eguchi-Oki-Matsumura equation describing phase separation and order-disorder transition in binary alloys, J. Math. Anal. Appl. **272** (2002), 448–457.

CAUCHY-DIRICHLET PROBLEM FOR THE EVOLUTION OF CONSTANT MEAN CURVATURE SURFACE

Masashi Misawa, Department of Mathematics, Faculty of Science, Kumamoto University,

Abstract Let $m \geq 2$ be a positive integer and Ω be a bounded domain in $m-$dimensional Euclidean space R^m with smooth boundary $\partial\Omega$. For a real number H, the surface of constant mean curvature H in R^{m+1} is prescribed by the nonlinear degenerate elliptic systems of second order partial differential equations, called "$H-$system",

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) = m^{\frac{m}{2}} H\, \nabla_1 u \wedge \cdots \wedge \nabla_m u \tag{1.1}$$

for a map $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^{m+1}(x))$ defined for $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$ with values into R^{m+1}, where $\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1, \cdots, m$, ∇u is the spatial gradient of a map u, $\nabla u = (\nabla_\alpha u^i)$, and the cross product $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m : R^{m+1} \oplus \cdots \oplus R^{m+1} \to R^{m+1}$ is defined by the property that $w \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = \det W$ for all vectors $w, w_i \in R^{m+1}$, $i = 1, \ldots, m$, and for the $(m+1) \times (m+1)-$matrix W having the first row $(w^1, \ldots, w^{m+1})$ and the i-th row $(w^1_{i-1}, \ldots, w^{m+1}_{i-1})$, $i = 2, \ldots, m+1$. Here and in what follows, the notation $|w|^2 = w \cdot w = w^i w^i$ is used for $w = (w^i) \in R^{m+1}$ and the summation notation over repeated indices is adopted.

We call a map $u : \Omega \to R^{m+1}$ *conformal* if

$$\nabla_\alpha u \cdot \nabla_\beta u = \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

hold in Ω for some real-valued function λ which does not vanish in R^m. If a map u is of C^2-class and conformal, then it is seen that u actually defines a hypersurface $u(\Omega)$ in R^{m+1} which has constant mean curvature H at every point $u(x) \in u(\Omega)$, $x \in \Omega$. Now we consider the Dirichlet boundary value problem for (1.1) with boundary value u_0 which is a given smooth map defined on $\overline{\Omega}$ with values in R^{m+1}.

Note that the equation (1.1) has a variational structure. In fact, a solution of (1.1) gives a surface of least area enclosing a given volume. We call such surfaces as above *soap-bubbles*. We can recognize a solution of the Dirichlet problem for (1.1) to be a critical point of the variational problem, which is to minimize the variational functional, called "$m-$energy",

$$I(u) = \int_\Omega \tfrac{1}{m} |\nabla u|^m \, dx, \tag{1.3}$$

under the constraint that the quantity, called "volume-functional",

$$V(u) = \tfrac{1}{m+1} \int_\Omega u \cdot \nabla_1 u \wedge \cdots \wedge \nabla_m u \, dx \tag{1.4}$$

is prescribed by $V(u) =$ a given constant, where $V(u)$ is interpreted as the algebraic volume enclosed between the surface $u(\Omega)$ and a fixed surface $u_0(\Omega)$ spanning the curve $u_0(\partial\Omega)$ defined by the Dirichlet data u_0. Observe that (1.1) is the Euler-Lagrange equation of the functional $E(u) = I(u) - m^{\frac{m}{2}} H V(u)$, where the constant $m^{\frac{m}{2}} H$ is exactly Lagrange's multiplier.

The one approach to look for a solution of the Dirichlet boundary value problem for (1.1) is to exploit the evolution for (1.1). Consider the Cauchy-Dirichlet problem: For a map $u : \Omega_\infty = (0, \infty) \times \Omega \longrightarrow R^{m+1}$, $u(z) = (u^1(z), \cdots, u^n(z))$, $z = (t, x) \in \Omega_\infty$,

$$\partial_t u - \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) = m^{\frac{m}{2}} H\, \nabla_1 u \wedge \cdots \wedge \nabla_m u \quad \text{in } \Omega_\infty, \tag{1.5}$$

$$u = u_0 \quad \text{on } \{t = 0\} \times \overline{\Omega} \bigcup (0, \infty) \times \partial\Omega. \tag{1.6}$$

Note that the equation (1.5) precisely describes the trajectory of the gradient flow for the variational functional $E(u) = I(u) - m^{\frac{m}{2}} HV(u)$. We report a global existence and a regularity of a weak solution of (1.5) and (1.6) for a smooth data having a "small" image. Our main result is the following.

Theorem 1 *Suppose that u_0 be a $W^{1,m}-$map defined on Ω with values in R^{m+1} satisfying the "smallness" condition $|H| \sup_\Omega |u_0| < 1$. Then, there exists a weak solution $u \in L^\infty(0,\infty; W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})) \cap W^{1,2}(0,\infty; L^2(\Omega, R^{m+1}))$ of (1.5) and (1.6) such that $\sup_\Omega |u(t)| \leq \sup_\Omega |u_0|$ holds for any $t \geq 0$ and*

$$\int_{(0,T)\times\Omega} |\partial_t u|^2 dz + \sup_{0\leq t\leq T} E(u(t)) \leq E(u_0) \tag{1.7}$$

holds for all $T > 0$. The solution u also satisfies the initial condition, $|u(t) - u_0|_{W^{1,m}(\Omega)} \longrightarrow 0$ as $t \to 0$, and boundary condition $u(t) = u_0$ on $\partial\Omega$ in the trace sense in $W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$ for almost every $t \in (0,\infty)$.

Theorem 2 *Suppose that u_0 be a C^2-map defined on $\overline{\Omega}$ with values in R^{m+1} satisfying the "smallness" condition $|H| \sup_\Omega |u_0| < \frac{1}{2}$. There exist a positive constant $\alpha < 1$ such that the weak solution obtained is locally Hölder continuous in $(0,\infty) \times \overline{\Omega}$ with an exponent α on the parabolic metric $|t|^{\frac{1}{p}} + |x|$ and the Hölder constant is bounded by a positive constant depending only on m, α, $\partial\Omega$, $|H|$ and the C^2-norm of the data u_0. The gradient of the solution is also locally Hölder continuous in $(0,\infty) \times \Omega$ with an exponent α on the usual parabolic metric $|t|^{\frac{1}{2}} + |x|$ and the Hölder constant is bounded by a positive constant depending only on $m, \alpha, |H|$ and $I(u_0)$.*

To prove the existence, we use a time-discrete approximation which consists of the minimization of a family of variational functionals, of which the Euler-Lagrange equations are the time-discrete elliptic partial differential equations of Rothe-type for (1.5). In the study of regularity of a weak solution obtained above, we apply the regularity theorem for the evolutional $p-$Laplacian systems with critical growth on the gradient (refer to [5]).

References

[1] F. Duzaar, M. Fuchs, Einige Bemerkungen über die Regularität von stationären Punkten gewisser geometrischer Variationsintegrale, Math. Nachr. **152**, (1991) 39-47.

[2] F. Duzaar, J. F. Grotowski Existence and regularity for higher-dimensional H-systems, Duke Math. J. **101**, (2000) 459-485.

[3] N. Kikuchi, A method of constructing Morse flows to variational functionals, Nonlin. World **1** (1994), 131-147.

[4] N. Hungerbühler, Global weak solutions of the $p-$harmonic flow into homogeneous spaces, Indiana Univ. Math. J. **45/1** (1996), 275-288.

[5] M. Misawa, Partial regularity results for evolutional $p-$Laplacian systems with natural growth, Manusc. Math. **109**, (2002) 419-454.

ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法

村川秀樹　（九州大学大学院数理学府 M2）
中木達幸　（九州大学大学院数理学研究院）

本講演では古典的な1相ステファン問題を扱う．この問題は氷が融解する過程を記述し，温度分布 $u(x,t)$ とともに水と氷の間に出現する移動境界 $\Gamma(t)$ を捉えるのが目的である.「1相」とは氷の温度は一様にゼロであることを仮定し，水の温度分布だけを考察するという意味である.「古典的」とは界面の曲率の効果を無視し，物質の状態が，温度が正のときは水，ゼロのときは氷と仮定するものである．このとき，次が成立することが知られている．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in G(t),\ 0 < t < T, \\ u(x,t) = A(x,t), & x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \\ u(x,t) = 0, & x \in \Gamma(t),\ 0 < t < T, \\ (-\nabla u, \nabla \Phi) + \lambda \Phi_t = 0, & x \in \Gamma(t),\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in G_0, \\ G(0) = G_0. \end{cases}$$

ここで，Ω は $\boldsymbol{R}^d$ の領域 $(d \geq 1)$，$G(t)\,(\subset \Omega)$ は時刻 t での水の領域，A は熱源の温度（熱源は Ω の境界 $\partial\Omega$ に配置するものとする），λ は潜熱の大きさを表す正の定数，関数 Φ は $\Gamma(t) = \{x \in \Omega;\ \Phi(x,t) = 0\}$ を満たすもの，関数 u_0 と Ω の領域 G_0 は，それぞれ，初期時刻での温度分布と水の領域，$T > 0$ は定数である．移動境界 $\Gamma(t)$ は $\Gamma(t) = \partial G(t) \setminus \partial\Omega$ で定められることに注意されたい．

この問題に対して，移動境界をも捉える数値解法として，野木の方法やペナルティー法などが知られている．前者は空間1次元に特化した方法で，空間多次元へは適用が困難だと思われる．後者は空間多次元でも適用できるが，ペナルティー係数と呼ばれる人工的なパラメーターがある．本講演の目的は，人工的なパラメーターがなく，空間多次元にも適用可能な解法を提案し，その数値実験結果を示すことである．我々の方法は，計算コスト（計算時間と使用するメモリー）が低いとの特徴もある．

我々の解法を述べる．時間を離散化する: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < \cdots < t_N = T$. 時刻 $t = t_m$ における温度分布 $u(x,t_m)$ の近似 $u^m(x)$ を，補助関数 $v^m(x)$ とともに，

1. $u^0 = u_0$, $v^0 = v_0$ とおく．ここで，

$$v_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_0, \\ \lambda, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

2. u^m と v^m が与えられたとき，u^{m+1} と v^{m+1} を

$$\begin{cases} u^{m+1}(x) = (\mathcal{H}_m(t_{m+1})u^m(x) - v^m(x))^+ \\ v^{m+1}(x) = (\mathcal{H}_m(t_{m+1})u^m(x) - v^m(x))^- \end{cases} \quad (x \in \Omega)$$

で求める $(m = 0, 1, \ldots, N-1)$．ここで，$\mathcal{H}_m(t)z$ は次の熱方程式のディリクレ問題の解である．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \Omega, \quad t_m < t < t_{m+1}, \\ u(x,t) = A(x,t), & x \in \partial\Omega,\ t_m < t < t_{m+1}, \\ u(x,t_m) = z(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

により求める (m=0,1,...,N)．移動境界の近似は u^m の台の境界から Ω の境界を除いたものとする．我々の方法は，Eymard らによるステファン問題の定式化とそれを近似する反応拡散系を使うことにある．反応拡散系において，特異極限を使うことがポイントである．詳細は講演のときに述べる．

空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状[1]

竹内 慎吾（工学院大）

本講演では，退化楕円型方程式の境界値問題

$$
\text{(P)}\begin{cases} -\lambda\Delta_p u = u^{p-1}(a(x)-u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \\ u\ge 0,\ u\not\equiv 0, & x\in\Omega \end{cases}
$$

の解 u_λ の形状について考える．$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\ge 1)$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界集合とし，$\lambda>0$ はパラメータ，$\Delta_p u=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$，$p>2$ は定数，$a(\cdot)\in C^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ は非負値関数とする．λ が十分小さければ，(P) は一意解 u_λ をもつ（たとえば文献 [1] を参照）．

$a(x)\equiv 1$ の場合には λ の減少にともない，解 u_λ が Ω 上で広義一様に 1 に収束するだけでなく，ある $\lambda>0$ を境に集合 $\{x\in\Omega \mid u_\lambda(x)=1\}$ が空でなくなり Ω 全体に広がっていくことが知られている（文献 [2]–[6] を参照）．

最近，$a(\cdot)$ が Ω 全体で定数とは限らない場合に次の結果を得た．

定理．$\Omega_0\subset\Omega$ を有限個の領域の和で $\overline{\Omega_0}\subset\Omega$ となるものとし，Ω_0 上で $\nabla a(x)=0$ であるとする．このときある $\lambda_0>0$ が存在し，$\lambda\le\lambda_0$ ならば

$$
\mathcal{O}_\lambda=\{x\in\Omega_0 \mid u_\lambda(x)=a(x)\}
$$

は空でない．さらに $0<\lambda_1<\lambda_2$ ならば $\mathcal{O}_{\lambda_2}\subset\mathcal{O}_{\lambda_1}$ であり，かつ十分小さい $\varepsilon>0$ に対してある $\lambda\le\lambda_0$ が存在して

$$
\Omega_0\setminus\{x\in\Omega_0 \mid \mathrm{dist}(x,\partial\Omega_0)<\varepsilon\}\subset\mathcal{O}_\lambda.
$$

証明は super & sub solutions method による．$a(x)\equiv 1$ の場合は super solution として自明な $\overline{u}_\lambda\equiv 1$ をとればよいのに対して，我々の場合は非自明なものを構成する必要がある．その際，$N=1$ の場合の方程式の相平面による解析が重要となる．

[1] J. I. Díaz and J. E. Saa, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), 521–524.
[2] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, *Differential Integral Equations* **13** (2000), 1201–1232.
[3] M. Guedda and L. Véron, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 419–431.
[4] S. Kamin and L. Véron, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), 1079–1085.
[5] S. Takeuchi, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 433–441.
[6] S. Takeuchi and Y. Yamada, *Nonlinear Anal.* **42** (2000), 41–61.

[1]本研究は科学研究費補助金の援助を受けている：若手研究 (B)，課題番号 15740110.

Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題について

石毛和弘 (名大・多元)

本講演においては, 初期境界値問題の爆発問題

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + u^p & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = \phi & \text{in} \quad \Omega \end{cases}$$

について考察する. ただし, $D > 0$, $p > 1$, Ω は $\mathbf{R}^N$ における滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域,

$$\phi \in C(\overline{\Omega}), \qquad \phi \geq 0,\, \phi \not\equiv 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

とする. このとき, 古典解の最大存在時間を T_D とすると, $T_D < \infty$ であり,

$$\limsup_{t \nearrow T_D} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x,t) = \infty$$

が成立する. また,

$$B_D(\phi) = \left\{ x \in \overline{\Omega} \,:\, {}^{\exists}\{(x_k,t_k)\} \subset \overline{\Omega} \times (0,T_D),\, \lim_{k\to\infty} (x_k,t_k) = (x,T_D) \right\}.$$

とする. 一般に, $B_D(\phi)$ の位置の特徴付けは, 拡散と非線形が複雑に影響しあうのでとても難しい. 本講演では, D を十分大きくする場合についての特徴付けを行う.

定理 (N. Mizoguchi, H. Yagishita との共同研究)
P_2 を $L^2(\Omega)$ から第 2 Neumann 固有空間への射影とし, $P_2\phi \not\equiv 0$ in Ω と仮定する. このとき,

$$\lim_{D\to\infty} \sup\left\{ |x-y| \,:\, x \in B_D(\phi),\, y \in \mathcal{M}(\phi) \right\} = 0$$

が成立する. ただし,

$$\mathcal{M}(\phi) = \left\{ x \in \overline{\Omega} : (P_2\phi)(x) = \max_{y\in\overline{\Omega}} (P_2\phi)(y) \right\}.$$

また, 本講演では, blow-up behavior に関する結果や上記定理に関する今後の展望などについても話す予定である.

Asymptotic behavior of some global solutions for nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity

Michinori Ishiwata

Department of Mathematical Sciences, Graduate School of Science and Engineering, Waseda University

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $p \in (1, N)$, $q \in (p, p^*]$ ($p^* = Np/(N-p)$ denotes the critical Sobolev exponent), $u_0 \in W_0^{1,p} \cap L^2 \cap L^\infty$ and let Δ_p be the p-Laplacian operator defined by $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

In this talk, we discuss the asymptotic behavior of global solutions for the following nonlinear parabolic equation (P):

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = & \Delta_p u + u|u|^q & \text{in} & \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,t) & \geq & 0 & \text{in} & \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) & = & u_0 & \text{in} & \Omega, \\ u(x,t) & = & 0 & \text{on} & \partial\Omega. \end{cases}$$

The existence of local solutions of (P) in the following sense is guaranteed by several methods:

$$u \in W^{1,2}(0,\delta; L^2) \cap L^\infty(0,\delta; L^\infty) \cap C([0,\delta]; W_0^{1,p}), \quad \forall \delta < T_m \tag{1}$$

where T_m denotes the maximal existence time of the solution in L^∞-sense.

Let us define the stable set W for (P) as follows:

$$\begin{aligned} W \quad = \quad & \{u \in W_0^{1,p} \cap L^2 \cap L^\infty;\ -\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_q^q \leq 0, \\ & \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{q}\|u\|_q^q < \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) S_q^{\frac{q}{q-p}}\} \end{aligned} \tag{2}$$

where S_q denotes the best constant of the Sobolev embedding $W^{1,p} \hookrightarrow L^q$.

When $p = 2$, $q \in (2, 2^*)$ and Ω is a bounded domain, it is known that

$$\exists t \text{ s.t. } u(t) \in W \Longrightarrow\ T_m = \infty,\ u(t) \to 0 \text{ in } L^\infty,\ W_0^{1,p} \text{ as } t \to \infty. \tag{3}$$

But it is not clear that the same results holds for $q = 2^*$ due to the lack of the information about the dependence of the local existence time on the $W_0^{1,2}$ norm of u_0.

In this talk, we report that for $\Omega = \mathbb{R}^N$ (in this case the homogeneous Dirichlet boundary condition should be interpreted as $u(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$), we can deduce the following results with the aid of some rescaling arguments and concentration-compactness type arguments.

Theorem.
Let $\Omega = \mathbb{R}^N$ and $q = p^*$. Then (3) holds true. ∎

Instability of nonradial bound states for 2D nonlinear Schrödinger equation

水町　徹 (横浜市立大学総合理学研究科)

非線形シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{for } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

の定常波解の不安定性について講演する．φ_ω $(\omega > 0)$ を

$$\Delta\varphi - \omega\varphi + |\varphi|^{p-1}\varphi = 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

解とするとき，$e^{i\omega t}\varphi_\omega(x)$ は(1) の定常波解とよばれる解になる．φ_ω が ground state とよばれる正値球対称解の場合，定常波解 $e^{i\omega t}\varphi$ は非線形項の指数 p が $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$ ならば安定 (Cazenave-Lions '82), $p \geq 1 + \frac{4}{n}$ ならば不安定 (Berestycki-Cazenave '81, Weinstein '82) であることが知られている．

(2) の解 φ_ω が一般の球対称解の場合に，Grillakis'88 は定常波解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ が $p > 1 + 4/n$ で線形不安定であることを示した．

本講演では，$n = 2$ の場合の場合に話を限定し，2 次元の極座標表示で

$$u(x,t) = e^{i(\omega t + m\theta)}\phi_\omega(r) \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

という形で表される定常波解の不安定性について述べる．(3) を(1) に代入すると，ϕ_ω は

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' - \left(\omega + \frac{m^2}{r^2}\right)\phi + |\phi|^{p-1}\phi = 0, \tag{4}$$

をみたす．(4) は $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して，k-回符号変化するエネルギー有限の解をもつことが知られている (Iaia-Warchall '95)．本講演で述べる結果は以下の通り．

1. Yanagida-Yotsutani の方法を用いて(4) のエネルギークラスに属する正値解の一意性を示す．
2. ϕ_ω を(4) の正値解とするときに，定常波解 $e^{i(\omega t + m\theta)}\phi_\omega$ の線形不安定性を Evans 関数を用いて計算する．計算の過程で(4) の線形化方程式の $r \to \infty$ での符号を調べることが必要になった．この点が同種の空間 1 次元の問題 (Alexander-Sachs '95) などと異なる点である．
3. 線形不安定な定常波解は実際に不安定であることを証明する．
4. 最後に，符号変化を 1 回する解の不安定性に関する考察を述べる．

Laplace 方程式の Cauchy 問題および逆向き熱伝導問題の任意多点差分法を用いた数値解法

飯島健太郎

茨城大学大学院理工学研究科 博士後期課程

〒 310-8512 茨城県水戸市文京 2-1-1　E-mail: *nd2401a@mcs.ipc.ibaraki.ac.jp*

1 問題

Laplace 方程式の Cauchy 問題とは, 領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ において調和な関数を, 境界の一部 $\Gamma_d \subset \partial\Omega$ で与えられた Dirichlet データと Neumann データから求める問題である.

熱伝導体 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 内の温度分布 u は熱方程式 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = 0$ に従っているとする. 最終時刻 $T > 0$ における D 内の温度分布と, 各時刻 $0 \le t < T$ における境界 ∂D での温度分布または熱流束が与えられているとする. このとき, 時刻 $0 \le t < T$ における D 内部の温度分布 u を求める問題が逆向き熱伝導問題である.

Laplace 方程式の Cauchy 問題と逆向き熱伝導問題は, 与えられたデータに関して解が不安定となる非適切問題の典型例として知られている.

2 任意多点差分法

多重指数を非負整数の組 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ で表す. ベクトル $\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ に対して $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}} := \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}$ と定める. また $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} := \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\dfrac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3^{\alpha_3}}$ と定める. 自然数 μ と定係数 $a_{\boldsymbol{\alpha}}$, $|\boldsymbol{\alpha}| \le \mu$ に対して, 微分作用素 $P(\boldsymbol{\partial}) = \displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le\mu} a_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$ と多項式 $P(\boldsymbol{\xi}) = \displaystyle\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le\mu} a_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}$ を定める.

領域 Ω 内に求積点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ を互いに重ならないように, ランダムに配置する. このとき, 導関数 $P(\boldsymbol{\partial})u$ を $u(\boldsymbol{x}^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, N$ の一次結合によって

$$P(\boldsymbol{\partial})u(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{j=1}^{N} w_j(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}^{(j)}) \qquad (1)$$

と近似する. 重み $w_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, \ldots, N$ は, ベクトル $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ を用いた連立一次方程式

$$P(\boldsymbol{\xi}^{(i)})e^{\boldsymbol{\xi}^{(i)}\cdot\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{N} w_j(\boldsymbol{x})e^{\boldsymbol{\xi}^{(i)}\cdot\boldsymbol{x}^{(j)}} \qquad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

の解として与える. この近似法を任意多点差分近似とよぶ.

本手法は求積点を任意の位置に配置できるという特色を持つ. 従って問題領域の形状によらず適用可能である. また, 近似の次数を任意に増やすことができる.

3 数値例

任意多点差分近似を用いた, 逆向き熱伝導問題の数値例を示す. 問題の領域は $D = \{{}^t(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 0.5^2\} \cup (0, 1) \times (-0.25, 0.25)$ であり, 最終時刻 $T = 1$ である. 熱方程式の解

$$G(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi(t+0.3)}\mathrm{Exp}\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4(t+0.3)}\right]$$

を用いて各データを与える. 図における円弧の境界において熱流束 $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial G}{\partial n}$ を与え, その他の境界では温度 $u = G$ を与える. 時空領域 $D \times [0, T] \subset \boldsymbol{R}^3$ に対して本手法を適用した. このとき, 時刻 $t = 0$ における求積点数 $N = 500$ の数値解を図に示す. 数値解から真の解の大よその形状が推測可能である.

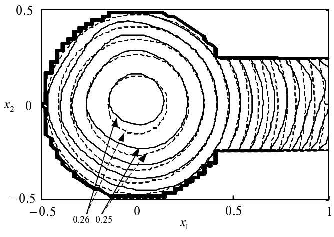

図 1: 数値解 (—) と真の解 (- - -) ($t = 0$)

反応拡散モデルの情報処理への応用

櫻井　建成
宇部工業高等専門学校

近年、”自己組織化”という言葉を耳にする機会が増えてきた。その概念を使い、脳内での機能の発現（情報処理）や生体信号の伝搬など多くの現象が説明できることがわかってきた．また、多くの自然現象もこれらの枠組みで理解しようとする試みが行われている．本研究では、自己組織化における時間・空間的秩序構造の代表的なモデルとして知られる、反応拡散モデル（Fitz-Hugh&Nagumo(FHN)方程式）を用いた秩序構造の発現とその情報処理への応用を考える。反応拡散モデルは、多数の反応素子が拡散によって繋がっているシステムであり、従来は、連続近似できる数値解法を利用して、コンピュータにより計算されてきた（図１）。各反応素子がある距離を保っているような離散的な系において、従来の連続的な反応拡散モデルでは実現されなかった情報抽出機能が実現されることを示す（図２）．生体内での情報伝達はそれぞれが軸索で結合されたいわば離散的なシステムであるニューロン群を介して行われている．我々の視覚系機能の一つであるエッジ抽出も、目に入ってきた物体のエッジだけを残したパターンが定在化したものと考えられる（図２）。ニューロンや網膜上でのセンサー（錐体など）を一つの反応素子と見立て、振動子間の結合が弱い場においてのパターンの発生や発生したパターンの安定性などを研究する．また、従来、外的・内的を問わず、ノイズは”かたち”を壊す働きがあるなど、ネガティブに作用すると考えられてきた．しかし、確率共鳴など、ノイズによる現象の誘発や反応拡散波伝搬におけるノイズのサポート的効果など、自己組織的に発生するパターンにおいて、ノイズの重要性が明らかになってきた（図３）．本研究では、エッジ検出のＳＮ比を向上することにノイズが大きな寄与すること示す。新たな情報処理手法の提案を行い、議論したい。

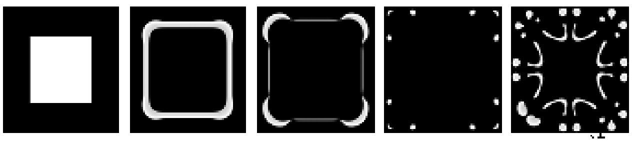

図１　連続システム

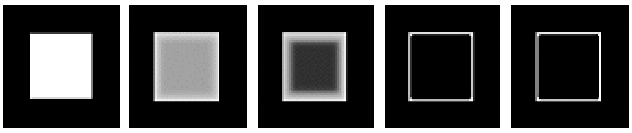

図２　離散システム

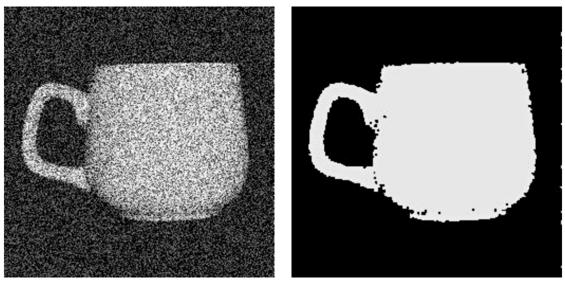

図３　ノイズを含んだ
入力画像と結果

「極渦のある球面での渦層の運動」

坂上貴之（北海道大学 大学院理学研究科 数学専攻）

現実の流れにおいて、速度場が急激に変化する帯状の領域があるとき、この領域内では渦度が大きい値をとり、この領域の運動が流体全体の運動を左右する。このような領域を「せん断流領域」と呼び、流体力学の重要な基礎研究分野の一つとなっている。

このせん断流の運動を理解するために簡単な数理モデルを作る。まず流れは非圧縮で非粘性とする。次に、速度場が変化する帯状領域の幅が無限に薄い（δ関数的）とし、その面の外側では流れは一様とする。この時、渦度は無限に薄い曲面の上に存在し、その面を境に速度場が不連続に変化するが、このような面のことを渦層と呼ぶ。非圧縮性流体に対するラグランジュの定理から、渦度は時間発展中に生成・消滅しないことが知られているので、渦層はあたかも実在する曲面のように、自らの誘導する速度場によって時間発展を行う。

二次元渦層はこれまでに活発に研究が進められ、つぎのことが知られるようになった。

（１）定常渦層は線形不安定である（Kelvin-Helmholtz 方程式）

（２）有限時間で曲率が無限大に発散する（解の爆発）

（３）渦法と呼ばれる方法で非特異化した渦層は二重螺旋に巻き上がる解に時間発展する

本研究では北極と南極の上に渦糸（回転流）を持つ球面上の渦層の運動を考える。この時、球面上にあるということ、および極にある渦の強さによって、上の３つの二次元渦層の性質がどう変化するかを数値的・数学的に調べ、その結果を紹介する。

反応拡散場での粒子運動の数理モデルについて

長山 雅晴 (京都大学・数理解析研究所・助手)

界面活性剤の一種である樟脳粒は，表面張力を変化させせることによって水面上で自発的に運動することが知られている．最近の実験から，固形樟脳のスイッチング現象，2 隻の樟脳舟の引き込み現象，樟脳酸舟の間欠運動，固形カンフェンの間欠運動など，表面張力の変化だけでは理解できない運動が提示された．このような現象を数理的側面から理解するために，Newton の運動方程式と反応拡散方程式の結合した数理モデルを提出し，樟脳粒の自発的周期運動の機構 [1] や樟脳舟の相互作用機構 [2] を明らかにした．特に，樟脳舟の相互作用には対流による流れの効果が重要であることがわかった．また，固形樟脳酸の間欠振動に関しても，気水界面近傍での樟脳酸膜とリン酸イオンの化学反応を考慮した反応拡散方程式系と運動方程式を組み合わせたモデルを提出し，間欠現象の数理的再現に成功した．数値実験結果を整理することで，水溶液中のリン酸濃度に加えて，樟脳酸膜とリン酸の拡散係数の比が重要な要因であることがわかった [3]．更に，固形カンフェンが自発的に間欠運動する現象に対する数理モデルも構築した．この現象は固形カンフェン上に生成されたカンフェン膜がある閾値を越えると水面上に展開されることで起こることが実験で観察されたことから，この過程をモデル方程式の中で表現することによって自発的間欠運動の再現に成功した．この結果から樟脳酸の間欠運動とカンフェンの間欠運動の機構は全く異なっていることが明らかになった．

最近，界面活性作用を持つフェナントロリン粒子を使った実験が報告され，フェナントリン粒子が 2 価の鉄イオン濃度に依存して，等速運動から間欠運動へ変化することが示された．この間欠運動は樟脳酸の間欠運動と同様に，鉄イオンとの化学反応によってフェナントロリン膜が水面に展開されないことに起因している．しかし，リン酸濃度を高くすると停止してしまう樟脳酸に対して，フェナントロリン粒子は鉄イオン濃度をさらに高くすると再び等速的運動をすることが示された．この現象を理解するために次のような仮説がある：(1)「化学反応によって生成されたフェロインが化学反応を阻害する」という反応阻害説;(2)「鉄イオンが高濃度の等速運動はフォロインが駆動となっている」というフェロイン駆動力仮説; 等が提案されている．これらの仮説に基づいた数理モデルを提案し，フェナントロリン粒子の運動の数理的機構を明らかにする．

参考文献

[1] Y. Hayashima, M. Nagayama and S. Nakata,"A camphor oscillates while breaking symmetry", Journal of Physical Chemistry B **105**(22) (2001), 5353-5357.

[2] M. I. Kohira, Y. Hayashima, M. Nagayama and S. Nakata,"Synchronized self-motion of two camphor boats ", Langmuir **17** (2001), 7124-7129.

[3] Y. Hayashima, M. Nagayama, Y. Doi, S. Nakata, M. Kimura and M. Iida, "Self-motion of a camphoric acid boat sensitive to chemical environment", Phys. Chem. Chem. Phys., **4**(2002), 1386-1392.

反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター

PDEs and Phenomena in Miyazaki:
2003/11/02/12:00-12:50

宇部工業高等専門学校・一般科　　大崎浩一
〒 755-8555 宇部市常盤台 2-14-1,　osaki@ube-k.ac.jp

走化性・反応・拡散系（三村・辻川方程式） [1].

$$
\text{(CG)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - b\nabla(u\nabla\rho) + u(u-\alpha)(1-u) \qquad \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = c\Delta\rho - d\rho + gu \qquad \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; \rho(x,0) = \rho_0(x) \qquad \text{in} \quad \Omega. \end{cases}
$$

$u(x,t), \rho(x,t)$ はそれぞれ 位置 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 及び時刻 $t \in [0,\infty)$ における大腸菌の密度，化学物質の濃度．a, b, c, d, g，及び $0 < \alpha < 1$ は正定数．Ω は滑らかな（$\mathcal{C}^3$ くらいあればよい）境界をもつ有界領域とする．

時間大域解の存在.

定理 1. $0 \le u_0 \in L^2(\Omega)$，$0 \le \rho_0 \in H^{1+\varepsilon_0}(\Omega)$ とする ($0 < \varepsilon_0 < 1/2$ は固定)．そのとき，(CG) の時間大域解

$$
\begin{gathered} 0 \le u \in \mathcal{C}([0,\infty);\, L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty);\, L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,\infty);\, H^2_N(\Omega)), \\ 0 \le \rho \in \mathcal{C}([0,\infty);\, H^{1+\varepsilon_0}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0,\infty);\, H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0,\infty);\, H^3_N(\Omega)) \end{gathered}
$$

が存在する．

指数アトラクターの定義 [2].

H を可分な Hilbert 空間とし，$\mathcal{X} \subset H$ をコンパクト集合とする．また，力学系 $(\{S(t)\}_{t\ge0}, \mathcal{X})$ を考えたとき，$\mathcal{X}$ は正不変であるとする．

定義 2. $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ が力学系 $(\{S(t)\}_{t\ge0}, \mathcal{X})$ に対する指数アトラクターであるとは次の性質 (i)–(iv) を持つときにいう：
(i)　$\mathcal{M}$ はグローバルアトラクターを含む．
(ii)　$\mathcal{M}$ は H においてコンパクトであり，$S(t)$ に対して正不変．
(iii)　$\mathcal{M}$ は有限のフラクタル次元を持つ．
(iv)　$h(S(t)\mathcal{X}, \mathcal{M}) \le c_0 \exp(-c_1 t)$，$t \ge 0$ を満たす．
ここで，c_0，c_1 は正定数，$h(B_0, B_1) = \sup_{U\in B_0} \inf_{V\in B_1} \|U - V\|_H$．

指数アトラクターの存在.

$H = L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ とする．集合 K を

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega) \times H^{1+\varepsilon_0}(\Omega);\ u_0 \geq 0,\ \rho_0 \geq 0 \right\}$$

と定義し，$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in K$ とする．このとき，初期関数 $U_0 \in K$ に解 $U(t)$ を対応させるような連続な半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ が定められ，$S(t)$ は K から $K \cap (H^2_N(\Omega) \times H^3_N(\Omega))$ への写像となる．

命題 3. ある定数 C が存在して次が成立する．各々の有界な球

$$B_r = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in K;\ \|u_0\|_{L^2} + \|\rho_0\|_{H^{1+\varepsilon_0}} \leq r \right\}$$

に対し，ある時刻 t_r（B_r に依存してもよい）が存在して，

$$\sup_{t \geq t_r} \sup_{U_0 \in B_r} \|S(t)U_0\|_{H^2 \times H^3} \leq C.$$

この命題は，有界集合

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \in H^2(\Omega) \times H^3(\Omega);\ \|u\|_{H^2} + \|\rho\|_{H^3} \leq C \right\} \cap K$$

が $(\{S(t)\}_{t\geq 0}, K)$ に対するコンパクト吸収集合であることを意味する，但し C は命題 3 のものとする．これにより，コンパクト連結なグローバルアトラクター $\mathcal{A} \subset K$ が存在する．また，$\mathcal{X} = \overline{\bigcup_{t \geq t_{\mathcal{B}}} S(t)\mathcal{B}}$, 但し $t_{\mathcal{B}}$ は $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B},\ t \geq t_{\mathcal{B}}$ となる時刻，とおけば，$\mathcal{X}$ は K におけるコンパクト集合であり，$\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ を満たし，$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ に対して吸収かつ正不変である．

この設定のもと，次の定理が得られる．

定理 4. 力学系 $(\{S(t)\}_{t\geq 0}, \mathcal{X})$ に対する指数アトラクター $\mathcal{M} \subset K$ が存在する．

参考文献

[1] M. Mimura and T. Tsujikawa, Physica A **230** (1996), 499–543.

[2] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam, *Exponential attractors for dissipative evolution equations*, Vol. 37 of *Research in Applied Mathematics.* John-Wiley and Sons, New York, 1994.

[3] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi, and M. Mimura, Nonlinear Anal. **51** (2002), 119–144.