

研究集会「PDEs and Phenomena in Miyazaki 2003」

日時： 2003年10月31日(金)～11月2日(日)

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2003.html>

プログラム

10月31日(金)

午後の部

14:30-15:20 黒木場正城(福岡大理)

「Maximal attractor and inertial sets for Eguchi-Oki-Matsumura equation」

15:40-16:30 三沢正史(熊大理)

「定平均曲率曲面の時間発展に対する初期値境界値問題」

16:40-17:30 村川秀樹・中木達幸(九大数理)

「ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法」

11月1日(土)

午前の部

10:00-10:50 竹内慎吾(工学院大)

「空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状」

11:00-11:50 石毛和弘(名大多元数理)

「Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題について」

午後の部

13:30-14:20 石渡通徳 (早大理工)

「Asymptotic behavior of some global solutions for
nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity」

14:30-15:20 水町徹 (横浜市大理)

「Instability of nonradial bound states for 2D nonlinear Schrödinger equation」

15:40-16:30 飯島健太郎 (茨城大理工)

「Laplace 方程式の Cauchy 問題
および逆向き熱伝導問題の任意多点差分法を用いた数値解法」

16:40-17:30 櫻井建成 (宇部高専)

「反応拡散モデルの情報処理への応用」

11月2日(日)

午前の部

10:00-10:50 坂上貴之 (北大理)

「極渦のある球面での渦層の運動」

11:00-11:50 長山雅晴 (京大数研)

「反応拡散場での粒子運動の数理解析モデルについて」

12:00-12:50 大崎浩一 (宇部高専)

「反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金(基盤 C(2): 辻川、仙葉、壁谷 / 若手 B: 矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人: 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、矢崎成俊 (宮崎大学工学部)

連絡先: 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail: tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL: 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX: 0985-58-7289

目次

1. 黒木場正城 (福岡大理)
Maximal attractor and inertial sets for Eguchi-Oki-Matsumura equation 1–6
2. 三沢正史 (熊大理)
Cauchy-Dirichlet problem for the evolution of constant mean curvature surface 7–14
3. 村川秀樹・中木達幸 (九大数理)
ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法 15–18
4. 竹内慎吾 (工学院大)
空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状 19–24
5. 石毛和弘 (名大多元数理)
Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題について 25–32
6. 石渡通徳 (早大理工)
Asymptotic behavior of some global solutions for nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity 33–52
7. 水町徹 (横浜市大理)
Instability of nonradial bound states for 2D nonlinear Schrödinger equation .. 53–58
8. 飯島健太郎 (茨城大理工)
Laplace 方程式の Cauchy 問題および逆向き熱伝導問題の任意多点差分法を用いた数値解法 59–66
9. 櫻井建成 (宇部高専)
反応拡散モデルの情報処理への応用 67–68
10. 坂上貴之 (北大理)
極渦のある球面での渦層の運動 69–80
11. 長山雅晴 (京大数研)
反応拡散場での粒子運動の数理モデルについて 81–88
12. 大崎浩一 (宇部高専)
反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター 89–96

MAXIMAL ATTRACTOR AND INERTIAL SET FOR EGUCHI-OKI-MATSUMURA EQUATION

Masaki Kurokiba
Department of Applied Mathematics,
Faculty of Science, Fukuoka University
Fukuoka, 814-0180, Japan
kurokiba@bach.sm.fukuoka-u.ac.jp

1. INTRODUCTION

This is a joint work with Naoto Tanaka (Fukuoka University) and Atsusi Tani (Keio University). We consider following system of equations which was proposed by Eguchi-Oki-Matsumura ([7]):

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(-\Delta u + 2u + uv^2), & (x, t) \in Q_T \equiv \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \beta \Delta v + \alpha v(a^2 - u^2 - b^2 v^2), & (x, t) \in Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x, t) \in \Gamma_T \equiv \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in \mathbf{R}^3 with smooth boundary $\partial\Omega \equiv \Gamma$ and $T > 0$. Here $u(x, t)$ is the local concentration of the solute atoms, $v(x, t)$ is the local degree of order, respectively. α, β, a, b are positive constants and $\frac{\partial}{\partial n}$ is exterior normal derivative to Γ .

It is well known that phase separation is described by so-called Cahn-Hilliard equation which is fourth order parabolic type, while the order-disorder transition is described by Allen-Cahn equation. The system (1.1) is a model of simultaneous order-disorder and phase separation in binary alloys. T. Eguchi, K. Oki and S. Matsumura derived the system (1.1) assuming that the order-disorder transformation is second order and that phase separation can not take place in the disorder state, but can in the ordered state.

Many authors studied the dynamics of equations describing phase transition (for example, [2], [3], [4], [10], [12]). In this talk we show the existence of a maximal attractor and of an inertial set to problem (1.1). The main theorems are as follows:

Theorem 1. *Let $H_{\bar{u}} = \{(u, v) \in (H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega); \frac{1}{|\Omega|} \langle u, 1 \rangle = \bar{u}\}$. For any $\delta \geq 0$, the semigroup $S(t)$ associated with problem (1.1) possesses in $\mathcal{H}_\delta = \bigcup_{|\bar{u}| \leq \delta} H_{\bar{u}}$ a maximal attractor \mathcal{A}_δ that is connected.*

Theorem 2. *Let B_δ be the absorbing set in $(H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega)$ and $X_\delta = \overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B_\delta}$. Then there exists an inertial set M_δ for $(S(t)_{t \geq 0}, X_\delta)$ which has fractal dimension.*

2. PRELIMINARIES

We shall summarize the results of [11]. First of all the existence theorem is as follows:

Theorem 3. For any $(u_0, v_0) \in (H^2(\Omega))^2$ satisfying the compatibility conditions $\frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial v_0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$, problem (1.1) has a unique local solution (u, v) defined on $Q_{T'}$ for some $T' \in (0, T)$ such that

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u &\in H^{4,1}(Q_{T'}) \cap C(0, T'; H^2(\Omega)), \\ v &\in L^2(0, T'; H^3(\Omega)) \cap H^1(0, T'; L^2(\Omega)) \cap C(0, T'; H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Here $H^{4,1}(Q_T) = H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^4(\Omega))$.

Theorem 4. Under the same assumptions of Theorem 3, problem (1.1) admits a unique global solution (u, v) on Q_T for any $T > 0$.

Problem (1.1) is a gradient flow and it has the Lyapunov functional

$$(2.2) \quad J(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\beta}{2\alpha} |\nabla v|^2 - \frac{a^2}{2} v^2 + \frac{b^2}{4} v^4 + u^2 + \frac{1}{2} u^2 v^2 \right) dx,$$

which satisfies

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} J(u, v) + \int_{\Omega} (|\nabla K(u, v)|^2 + \frac{1}{\alpha} |v_t^2|) dx = 0,$$

where $K(u, v) \equiv -\Delta u + 2u + uv^2$. From (2.3), we have

Lemma 5. If (u, v) satisfies problem (1.1), then

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 + \frac{\beta}{2\alpha} \|\nabla v\|^2 + \frac{b^2}{8} \|v\|_{L^4}^4 + \|uv\|^2 \\ &+ \int_0^t ds \int_{\Omega} \left(|\nabla K(u, v)(s)|^2 + \frac{1}{\alpha} |v_t(s)|^2 \right) dx \leq J(u_0, v_0) + \frac{a^4}{2b^2} |\Omega|. \end{aligned}$$

Moreover we can obtain the boundedness of the norm $\|v(t)\|_{L^\infty}$.

Lemma 6. The estimate

$$(2.5) \quad \sup_{t>0} \|v(t)\|_{L^\infty} \leq C \max \left\{ \|v_0\|_{L^\infty}, \sup_{t>0} \|v(t)\| \right\}$$

is valid for the solution (u, v) to problem (1.1).

3. THE MAXIMAL ATTRACTOR

Let $H = (H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega)$. We define semigroup $S(t)$ associated to problem (1.1) by $(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0)$. Theorems 3 and 4 yield that $(u, v) = S(\cdot)(u_0, v_0) \in C(0, \infty; H)$, and that the mapping $(u_0, v_0) \mapsto (u, v)$ is a continuous operator from H to H . For $u \in (H^1(\Omega))'$ let Nu be the solution of boundary value problem

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta \psi = u - \bar{u}, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \\ \int_{\Omega} \psi(x) dx = 0 \end{cases}$$

and put

$$\|u\|_{-1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx + |\Omega| \bar{u}^2.$$

To apply theorem I.1.1 in [13], it is necessary to show

Theorem 7. For any $\delta \geq 0$, there exist absorbing sets in \mathcal{H}_δ and in $(H^2(\Omega))^2 \cap \mathcal{H}_\delta$ for semigroup $S(t)$ associated to problem (1.1).

Proof of Theorem 7. We first consider the existence of an absorbing set in \mathcal{H}_δ . Multiplying the equation for u by ψ and the equation for v by v and integrating by parts respectively, we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{-1}^2 + \frac{2\bar{u}^2}{\alpha b^2} \|v\|^2) + \|\nabla u\|^2 + \frac{2\beta\bar{u}^2}{\alpha b^2} \|\nabla v\|^2 + \|u\|^2 \\ + (1 + \frac{2\bar{u}^2}{b^2}) \int_{\Omega} u^2 v^2 dx + \frac{3}{4} \bar{u}^2 \|v\|_{L^4}^4 \leq (2 + \frac{a^4}{b^4}) \bar{u}^2 |\Omega|. \end{aligned}$$

And we use the inequalities

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{2} \|u\|_{-1}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\lambda_2}{2} \bar{u}^2 |\Omega|, \\ \frac{\lambda_2}{2} \frac{2\bar{u}^2}{\alpha b^2} \|v\|^2 &\leq \frac{\bar{u}^2}{4} \|v\|_{L^4}^4 + (\frac{\lambda_2}{\alpha b^2})^2 \bar{u}^2 |\Omega|, \end{aligned}$$

where λ_2 is the least positive eigenvalue of the $-\Delta$ with homogeneous Neumann boundary condition. Then we have

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} (\|u\|_{-1}^2 + \frac{2\bar{u}^2}{\alpha b^2} \|v\|^2) + \lambda_2 (\|u\|_{-1}^2 + \frac{2\bar{u}^2}{\alpha b^2} \|v\|^2) \leq C_1.$$

Applying Gronwall's lemma to (3.2) we deduce for all

$$\|u\|_{-1}^2 + \frac{2\bar{u}^2}{\alpha b^2} \|v\|^2 \leq \left(\|u_0\|_{-1}^2 + \frac{2\bar{u}^2}{\alpha b^2} \|v_0\|^2 \right) e^{-\lambda_2 t} + \frac{C_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}).$$

We have obtained an absorbing set in \mathcal{H}_δ .

Next we show the existence of an absorbing set in $(H^2(\Omega))^2 \cap \mathcal{H}_\delta$. Multiplying the equation for u by $\Delta^2 u$ and integrating by parts yield

$$(3.3) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta^2 u\|^2 + 2 \|\nabla \Delta u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\Delta(uv^2)\|^2.$$

Multiplying the equation for v by $\Delta^2 v$ and integrating by parts, we have

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta v\|^2 + \beta \|\nabla \Delta u\|^2 &= -\alpha \int_{\Omega} \nabla [v(a^2 - u^2 - b^2 v^2)] \cdot \nabla \Delta v dx \\ &\leq \frac{\beta}{2} \|\nabla \Delta v\|^2 + \frac{3\alpha^2}{2\beta} (a^4 \|\nabla v\|^2 + \|\nabla(vu^2)\|^2 + 9b^4 \|v^2 \nabla v\|^2). \end{aligned}$$

Using Lemmas 5, 6 and the inequalities (see, [13] p.161 and p.52)

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^4} &\leq C \|\nabla v\|_{H^{\frac{3}{4}}} \leq C \|\nabla v\|_{\frac{1}{4}} \|\nabla^2 v\|_{\frac{3}{4}}, \\ \|u\|_{L^\infty} &\leq C \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

we find, for example,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty}^2 \|\nabla v\|_{L^4}^4 &\leq C (\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^2}^{\frac{1}{2}})^2 (\|\nabla v\|_{\frac{1}{4}} \|\nabla^2 v\|_{\frac{3}{4}})^4 \\ &\leq C \|\Delta u\| \|\Delta v\|^3 + C' \\ &\leq C (\|\Delta u\|^4 + \|\Delta v\|^4) + C'. \end{aligned}$$

After some similar calculation, we obtain that

$$(3.5) \quad \frac{d}{dt} (\|\Delta u\|^2 + \beta \|\Delta v\|^2) \leq C_2 (\|\Delta u\|^2 + \beta \|\Delta v\|^2) (\|\Delta u\|^2 + \beta \|\Delta v\|^2) + C_3.$$

Multiplying the equations for u by u and the equations for v by Δv and integration by parts respectively, we have

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt}(\|u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \|\Delta u\|^2 + \beta\|\Delta v\|^2 \leq C_4.$$

Here we have used Lemmas 5 and 6. By integrating (3.6), we find that the conditions of the uniform Gronwall lemma ([13] p.91) hold. Therefore we have

$$(3.7) \quad \|\Delta u(t)\|^2 + \beta\|\Delta v(t)\|^2 \leq (C_5 + C_4 + C_3)e^{C_2(C_5+C_4)}$$

for $t \geq 1$. From (3.7) we conclude the existence of an absorbing set in $(H^2(\Omega))^2 \cap \mathcal{H}_\delta$. \square

4. THE INERTIAL SET

Let B_δ be the absorbing set in $(H^2(\Omega))^2 \cap \mathcal{H}_\delta$ from Theorem 7 and put $X_\delta = \overline{\cup_{t \geq t_0} S(t)B_\delta}$. We note that X_δ is bounded in $(C(\bar{\Omega}))^2$.

Lemma 8. *The semigroup $S(t) : X_\delta \rightarrow X_\delta$ is Lipschitz continuous, i.e.,*

$$(4.1) \quad \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_H^2 \leq \|(u_{01} - u_{02}, v_{01} - v_{02})\|_H^2 e^{2dt},$$

where (u_i, v_i) is the solutions of (1.1) with the initial conditions $(u_{0i}, v_{0i}), i = 1, 2$, and $\|(u, v)\|_H^2 = \|u\|_{-1}^2 + \|v\|^2$.

Proof of Lemma 8. The difference of solution $(u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ satisfies

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} = \Delta(-\Delta(u_1 - u_2) + 2(u_1 - u_2) + u_1 v_1^2 - u_2 v_2^2), \\ \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial t} = \beta\Delta(v_1 - v_2) + \alpha(v_1 - v_2)(a^2 - u_1^2 - b^2 v_1^2) - \alpha v_2 \{(u_1^2 - u_2^2) + b^2(v_1^2 - v_2^2)\}, \\ \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial n} = \frac{\partial\Delta(u_1 - u_2)}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial n} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T, \\ u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = u_{01}(x) - u_{02}(x), \quad v_1(x, 0) - v_2(x, 0) = v_{01}(x) - v_{02}(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

Let ψ_i be the solution of (3.1) with replacing $u - \bar{u}$ by $u_i - \bar{u}, i = 1, 2$. Multiplying the first equation of (4.2) by $\psi = \psi_1 - \psi_2$ and multiplying the second equation of (4.2) by $v_1 - v_2$ and integrating by parts respectively, we get

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_H^2 + \|\nabla(u_1 - u_2)\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2 + \beta\|\nabla(v_1 - v_2)\|^2 \\ & + \int_{\Omega} v_1^2 (u_1 - u_2)^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (v_1 - v_2)^2 (u_1^2 + b^2 v_1^2) dx \leq d\|v_1 - v_2\|^2, \end{aligned}$$

where $d = \alpha a^2 + 2\alpha b^2 M^2 + \frac{1}{4} M^2 (\alpha + 4)(1 + 4\alpha)$ and M is a constant such that $\|(u_i, v_i)\|_{C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))} \leq M$. Applying Gronwall lemma leads to (4.1). \square

Moreover we find from (4.3)

Corollary 9.

$$(4.4) \quad \int_0^t \|u_1 - u_2\|_H^2 e^{Ds} ds \leq \frac{1}{2} (1 + e^{(D+2d)t}) \|(u_{10} - u_{20}, v_{10} - v_{20})\|_H^2,$$

where D is a constant.

Next we shall show the squeezing property of $S(t)$. We denote by $\lambda_i, (0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots)$ the eigenvalue of the operator $-\Delta$ with homogeneous Neumann boundary conditions and w_i the corresponding eigenfunctions such that $\|w_i\|_{L^2} = 1, i = 1, 2, \dots$. It is well-known that $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ are a complete orthogonal basis in $L^2(\Omega)$. Let $H_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ and the

operator $p_n : (H^1(\Omega))' \mapsto H_n$ be orthogonal projection and $q_n = I - p_n$, where I is identity on $(H^1(\Omega))'$. Then it holds that

$$(4.5) \quad \|\varphi\|_{-1}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\varphi\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|\nabla \varphi\|^2$$

for any $\varphi \in q_n((H^1(\Omega))')$. Furthermore we define the corresponding product projection $P_n(u, v)$, $Q_n(u, v)$ on H such that $P_n(u, v) = (p_n u, p_n v)$, $Q_n = I - P_n$.

Theorem 10. *Semigroup $S(t)$ for problem (1.1) possesses the squeezing property, i.e., for any $t^* > 0$ there exists number $n_0 = n_0(t^*)$ such that for any $\Psi_1 = (u_1, v_1)$, $\Psi_2 = (u_2, v_2) \in X_\delta$ satisfying that if*

$$(4.6) \quad \|p_{n_0}(S(t^*)\Psi_1 - S(t^*)\Psi_2)\|_H \leq \|(I - p_{n_0})(S(t^*)\Psi_1 - S(t^*)\Psi_2)\|_H,$$

then

$$(4.7) \quad \|S(t^*)\Psi_1 - S(t^*)\Psi_2\|_H \leq \frac{1}{8} \|\Psi_1 - \Psi_2\|_H.$$

Proof of Theorem 10. We set $(U, V) \equiv Q_n(u_1 - u_2, v_1 - v_2)$. Operating the equation (4.2) by Q_n , it hold that

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta(-\Delta U + 2U + q_n(u_1 v_1^2 - u_2 v_2^2)), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \beta \Delta V + \alpha a^2 V - \alpha q_n(v_1(u_1^2 + b^2 v_1^2) - v_2(u_2^2 + b^2 v_2^2)). \end{cases}$$

Multiplying the first equation of (4.8) by $NU \in q_n(H^2(\Omega))$ and the second equation of (4.8) by V and integrating, we have

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(U, V)\|_H + \|\nabla U\|^2 + 2\|U\|^2 + \beta \|\nabla V\|^2 &\leq \|U\|^2 + \alpha(a^2 + 1)\|V\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (u_1 v_1^2 - u_2 v_2^2)^2 dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} \int_{\Omega} [v_1(u_1^2 + b^2 v_1^2) - v_2(u_2^2 + b^2 v_2^2)]^2 dx. \end{aligned}$$

Using the inequalities

$$(4.10) \quad \begin{cases} (\lambda_{n+1}^2 + \lambda_{n+1}) \|U\|_{-1}^2 \leq \|\nabla U\|^2 + \|U\|^2, \\ \beta \lambda_{n+1} \|V\|^2 \leq \beta \|\nabla V\|^2, \end{cases}$$

it yields that

$$(4.11) \quad \frac{d}{dt} \|(U, V)\|_H^2 + (D_1 \lambda_{n+1} - D_2) \|(U, V)\|_H^2 \leq C(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2),$$

where $D_1 = 2 \min\{1, \beta\}$, $D_2 = 2\alpha(a^2 + 1)$. Applying Gronwall's lemma leads to

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \|(U, V)\|_H^2 &\leq \|(U, V)(0)\|_H^2 e^{-Dt} + \varepsilon e^{-Dt} \int_0^t \|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 e^{Ds} ds \\ &\quad + C_\varepsilon e^{-Dt} \int_0^t (\|u_1 - u_2\|_{-1}^2 + \|v_1 - v_2\|^2) e^{Ds} ds, \end{aligned}$$

where $D = D_1 \lambda_{n+1} - D_2$. From Lemma 8 and Corollary 9, it holds that

$$(4.13) \quad \|(U, V)(t)\|_H^2 \leq \|(u_{10} - u_{20}, v_{10} - v_{20})\|_H^2 \left\{ e^{-Dt} + \frac{\varepsilon}{2} (e^{-Dt} + e^{2dt}) + C_\varepsilon \frac{e^{2dt}}{D + 2d} \right\}.$$

Now assume that

$$(4.14) \quad \|p_{n_0}(u_1 - u_2, v_1 - v_2)(t^*)\|_H \leq \|Q_{n_0}(u_1 - u_2, v_1 - v_2)(t^*)\|_H$$

for $t^* > 0$, then by using (4.13)

(4.15)

$$\begin{aligned} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)(t^*)\|_H^2 &\leq 2\|Q_{n_0}(u_1 - u_2, v_1 - v_2)(t^*)\|_H^2 \\ &\leq \|(u_{10} - u_{20}, v_{10} - v_{20})\|_H^2 \left\{ e^{-D_3 t^*} + \frac{\varepsilon}{2}(e^{-D_3 t^*} + e^{2dt^*}) + C_\varepsilon \frac{e^{2dt^*}}{D_3 + 2d} \right\}, \end{aligned}$$

where $D_3 = D_1 \lambda_{n_0+1} - D_2$. Taking $\varepsilon > 0$ so small that

$$(4.16) \quad \varepsilon(e^{-D_3 t^*} + e^{2dt^*}) \leq \frac{1}{128}$$

and choosing a number n_0 sufficiently large so as to satisfy

$$(4.17) \quad 2(e^{-D_3 t^*} + \frac{C_\varepsilon e^{2dt^*}}{D_3 + 2d}) \leq \frac{1}{128},$$

then we conclude

$$(4.18) \quad \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)(t^*)\|_H^2 \leq \left(\frac{1}{8}\right)^2 \|(u_{10} - u_{20}, v_{10} - v_{20})\|_H^2.$$

□

Therefore the proof of Theorem 2 is completed if we apply Theorem 2.1 in [6].

REFERENCES

- [1] S. M. Allen and J. W. Cahn, A microscopic theory for domain wall motion and its experimental verification in Fe-Al alloy domain growth kinetics, *Journal de Physique C7*, **38** (1977), 51–54.
- [2] P. Bates and S. Zheng, Inertial manifolds and inertial sets for the phase-field equations, *J. Dynamics and Diff. Eqs.*, **4** (1992), 375–398.
- [3] M. Brochete, D. Hilhorst and A. Novick-Cohen, Finite-dimensional exponential attractor for a model for order-disorder and phase separation, *Appl. Math. Lett.*, **7** (1994), 83–87.
- [4] M. Brochete, D. Hilhorst and Xinfu Chen, Finite-dimensional exponential attractor for the phase field model, *Appl. Anal.*, **49** (1993), 197–212.
- [5] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system I. Interfacial energy, *J. Chem. Phys.*, **28** (1958), 258–267.
- [6] A. Eden, A. J. Milani and B. Nicolaenko, Finite dimensional exponential attractors for semilinear wave equations with damping, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **169** (1992), 408–419.
- [7] T. Eguchi, K. Oki and S. Matsumura, Kinetic of ordering with phase separation, *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.*, **21** Elsevier, 1984, 589–594.
- [8] K. Oki, S. Matsumura and T. Eguchi, Phase separation and domain structure of iron-based ordering alloys, *Phase transition*, **10** (1987), 257–276.
- [9] K. Shiiyama, H. Ninomiya and T. Eguchi, Evolution of antiphase ordered domain structure and phase separation activated by ordering, in *Research of Pattern Formation* (Ed. R. Takaki) KTK Scientific Publ., 1994, 411–430.
- [10] M. Gokiel, A. Ito, Global attractor for the Cahn-Hilliard/Allen-Cahn system, *Nonlinear Analysis* **52** (2003), 1821–1841.
- [11] M. Kurokiba, N. Tanaka and A. Tani, Existence of solution for Eguchi-Oki-Matsumura equation describing phase separation and order-disorder transition in binary alloys, *J. Math. Anal. Appl.* **272** (2002), 448–457.
- [12] W. Shen, S. Zheng, Maximal attractor for the coupled Cahn-Hilliard equations, *Nonlinear Analysis* **49** (2002), 21–34.
- [13] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Applied Mathematical Sciences **68**, New York, Springer-Verlag, 1997.

CAUCHY-DIRICHLET PROBLEM FOR THE EVOLUTION OF CONSTANT MEAN CURVATURE SURFACE [†]

Masashi Misawa, Department of Mathematics, Faculty of Science, Kumamoto University.

§ **Introduction** Let $m \geq 2$ be a positive integer and Ω be a bounded domain in m -dimensional Euclidean space R^m with smooth boundary $\partial\Omega$. For a real number H , the surface of constant mean curvature H in R^{m+1} is prescribed by the nonlinear degenerate elliptic systems of second order partial differential equations, called “ H -system”,

$$-\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{m-2} \nabla u \right) = m^{\frac{m}{2}} H \nabla_1 u \wedge \cdots \wedge \nabla_m u \quad (1.1)$$

for a map $u(x) = (u^1(x), \dots, u^{m+1}(x))$ defined for $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega$ with values into R^{m+1} , where $\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, m$, ∇u is the spatial gradient of a map u , $\nabla u = (\nabla_\alpha u^i)$, and the cross product $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m : R^{m+1} \oplus \cdots \oplus R^{m+1} \rightarrow R^{m+1}$ is defined by the property that $w \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = \det W$ for all vectors $w, w_i \in R^{m+1}$, $i = 1, \dots, m$, and for the $(m+1) \times (m+1)$ -matrix W having the first row (w^1, \dots, w^{m+1}) and the i -th row $(w_{i-1}^1, \dots, w_{i-1}^{m+1})$, $i = 2, \dots, m+1$. Here and in what follows, the notation $|w|^2 = w \cdot w = w^i w^i$ is used for $w = (w^i) \in R^{m+1}$ and the summation notation over repeated indices is adopted.

We call a map $u : \Omega \rightarrow R^{m+1}$ *conformal* if

$$\nabla_\alpha u \cdot \nabla_\beta u = \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

hold in Ω for some real-valued function λ which does not vanish in R^m . If a map u is of C^2 -class and conformal, then it is seen that u actually defines a hypersurface $u(\Omega)$ in R^{m+1} which has constant mean curvature H at every point $u(x) \in u(\Omega)$, $x \in \Omega$ (refer to [2, pp.41–42]). Now we consider the Dirichlet boundary value problem for (1.1) with boundary value u_0 which is a given smooth map defined on $\bar{\Omega}$ with values in R^{m+1} .

Note that the equation (1.1) has a variational structure. In fact, a solution of (1.1) gives a surface of least area enclosing a given volume. We call such surfaces as above *soap-bubbles*. We can recognize a solution of the Dirichlet problem for (1.1) to be a critical point of the variational problem, which is to minimize the variational functional, called “ m -energy”,

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{m} |\nabla u|^m dx, \quad (1.3)$$

under the constraint that the quantity, called “volume-functional”,

$$V(u) = \frac{1}{m+1} \int_{\Omega} u \cdot \nabla_1 u \wedge \cdots \wedge \nabla_m u dx \quad (1.4)$$

is prescribed by $V(u) = a$ a given constant, where $V(u)$ is interpreted as the algebraic volume enclosed between the surface $u(\Omega)$ and a fixed surface $u_0(\Omega)$ spanning the curve $u_0(\partial\Omega)$ defined by the Dirichlet data u_0 . Observe that (1.1) is the Euler-Lagrange equation of the functional $E(u) = I(u) - m^{\frac{m}{2}} H V(u)$, where the constant $m^{\frac{m}{2}} H$ is exactly Lagrange’s multiplier.

[†] This report is the preliminary version of the paper “Existence and regularity for the evolution of constant mean curvature surfaces in high dimension”.

The one approach to look for a solution of the Dirichlet boundary value problem for (1.1) is to exploit the evolution for (1.1). Consider the Cauchy-Dirichlet problem: For a map $u : \Omega_\infty = (0, \infty) \times \Omega \longrightarrow R^{m+1}$, $u(z) = (u^1(z), \dots, u^n(z))$, $z = (t, x) \in \Omega_\infty$,

$$\partial_t u - \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{m-2} \nabla u \right) = m^{\frac{m}{2}} H \nabla_1 u \wedge \dots \wedge \nabla_m u \quad \text{in } \Omega_\infty, \quad (1.5)$$

$$u = u_0 \quad \text{on } \{t = 0\} \times \overline{\Omega} \cup (0, \infty) \times \partial\Omega. \quad (1.6)$$

Note that the equation (1.5) precisely describes the trajectory of the *negative* gradient flow for the variational functional $E(u) = I(u) - m^{\frac{m}{2}} H V(u)$. For the related results and topics, we can refer to [8, 3] and references there. We report a global existence and a regularity of a weak solution of (1.5) and (1.6) for a smooth data having a “small” image. Our main result is the following.

Theorem 1 *Suppose that u_0 be a $W^{1,m} \cap L^\infty$ -map defined on Ω with values in R^{m+1} satisfying the “smallness” condition $|H| \sup_\Omega |u_0| < 1$. Then, there exists a weak solution $u \in L^\infty(0, \infty; W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})) \cap W^{1,2}(0, \infty; L^2(\Omega, R^{m+1}))$ of (1.5) and (1.6) such that $\sup_\Omega |u(t)| \leq \sup_\Omega |u_0|$ holds for any $t \geq 0$ and*

$$\int_{(0,T) \times \Omega} |\partial_t u|^2 dz + E(u(T)) \leq E(u_0) \quad (1.7)$$

holds for almost all $T > 0$. The solution u also satisfies the initial condition, $|u(t) - u_0|_{W^{1,m}(\Omega)} \longrightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$, and boundary condition $u(t) = u_0$ on $\partial\Omega$ in the trace sense in $W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$ for almost every $t \in (0, \infty)$.

Theorem 2 *Suppose that u_0 be a C^2 -map defined on $\overline{\Omega}$ with values in R^{m+1} satisfying the “smallness” condition $|H| \sup_\Omega |u_0| < \frac{1}{2}$. There exist a positive constant $\alpha < 1$ such that the weak solution obtained is locally Hölder continuous in $(0, \infty) \times \overline{\Omega}$ with an exponent α on the parabolic metric $|t|^{\frac{1}{p}} + |x|$ and the Hölder constant is bounded by a positive constant depending only on $m, \alpha, \partial\Omega, |H|$ and the C^2 -norm of the data u_0 . The gradient of the solution is also locally Hölder continuous in $(0, \infty) \times \Omega$ with an exponent α on the usual parabolic metric $|t|^{\frac{1}{2}} + |x|$ and the Hölder constant is bounded by a positive constant depending only on $m, \alpha, |H|$ and $I(u_0)$.*

To prove the existence, we use a time-discrete approximation which consists of the minimization of a family of variational functionals, of which the Euler-Lagrange equations are the time-discrete elliptic partial differential equations of Rothe-type for (1.5) (refer to [6]). In the study of regularity of a weak solution obtained above, we apply the regularity theorem for the evolutional p -Laplacian systems with critical growth on the gradient (refer to [7]).

In the following, we explain how to show the validity of Theorem 1.

§ **Existence of a small solution** We make use of the method in [6] to construct approximating solutions of (1.5) and (1.6). For $u_0 \in W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$, denote, by $W_{u_0}^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$, a set of functions in $W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$ which have the boundary value u_0 on $\partial\Omega$ in the trace sense. Let h be a positive number. Let $u_0 \in W^{1,m} \cap L^\infty(\Omega, R^{m+1})$ such that $|H| \sup_\Omega |u_0| < 1$. We now inductively define a family of maps $\{u_n^h\}$ and functionals $\{\mathbf{F}_n^h\}$ in the set of maps

$$\chi = \left\{ v \in W_{u_0}^{1,m} \cap L^\infty(\Omega, R^{m+1}) : |H| \sup_\Omega |v| \leq 1 \right\} \quad (2.1)$$

for $n = 1, 2, \dots$ as follows:

$$\mathbf{F}_n^h(v) = E(v) + \int_{\Omega} \frac{1}{2h} |v - u_{n-1}^h|^2 dx, \quad u_0^h = u_0, \quad (2.2)$$

$u_n^h \in W_{u_0}^{1,p}(M, S^{n-1})$ is a minimizer of the functional \mathbf{F}_n^h in χ , namely,

$$\mathbf{F}_n^h(u_n^h) = \inf \left\{ \mathbf{F}_n^h(v) : v \in \chi \right\}. \quad (2.3)$$

The Euler-Lagrange equations of \mathbf{F}_n^h , $n = 1, 2, \dots$, are

$$\frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - \operatorname{div} \left(|\nabla|^{m-2} \nabla u_n^h \right) = m^{\frac{m}{2}} H \nabla_1 u_n^h \wedge \dots \wedge \nabla_m u_n^h \quad \text{in } \Omega, \quad (2.4)$$

which are approximate equations of Rothe type for (1.5). We claim the following.

Lemma 3 *There exists a family $\{u_n^h\}$ of minimizers of $\{\mathbf{F}_n^h\}$ in χ , $n = 1, 2, \dots$. Each minimizer $u_n^h \in \chi$, $n = 1, 2, \dots$, is actually a strictly inner minimizer of $\{\mathbf{F}_n^h\}$ in χ and satisfies (2.4) in the distribution sense.*

Proof. The set χ is weakly closed in $W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$, since χ is actually closed and convex in $W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$. Noting by Schwartz's inequality and the definition of the determinant that

$$|v \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_m| \leq |v| |w_1| \dots |w_m| \leq |v| \left(\frac{|w_1|^2 + \dots + |w_m|^2}{m} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (2.5)$$

holds for all vectors $v, w_i \in R^{m+1}$, $i = 1, 2, \dots, m$, we see that the estimate

$$\mathbf{F}_n^h(v) \geq \frac{1}{m+1} I(v) \quad (2.6)$$

holds for any $v \in \chi$ and then, \mathbf{F}_n^h is coercive on χ with respect to the $W^{1,m}$ -norm. The integrands of $\mathbf{F}_n^h(v)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\frac{1}{2h} |v - u_{n-1}^h|^2 + \frac{1}{m} |\nabla v|^m - m^{\frac{m}{2}} H v \cdot \nabla_1 v \wedge \dots \wedge \nabla_m v \quad (2.7)$$

are nonnegative, continuous on the variable $v \in R^{m+1}$ satisfying $|H||v| \leq 1$, and convex on the variable $\nabla_{\alpha} u \in R^{m+1}$, $\alpha = 1, \dots, m$. Thus, from the well-known theorem (see [8, Theorem 1.6, p.9]), we see that $\mathbf{F}_n^h(v)$, $n = 1, 2, \dots$, are weakly lower-semi continuous in χ with respect to the topology of $W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$ and then, the existence of minimizers $\{u_n^h\}$, $n = 1, 2, \dots$, follows from the direct method in the calculus of variations. Since $\mathbf{F}_n^h(v)$, $n = 1, 2, \dots$, are C^1 -functional on $W^{1,m} \cap L^{\infty}(\Omega, R^{m+1})$, we can make calculation of the directional derivative of $\mathbf{F}_n^h(v)$ along any vector pointing from u_n^h into χ , $n = 1, 2, \dots$. Let $\phi \in W_0^{1,m}(\Omega, R)$, $\phi \geq 0$. Then we can use the comparison map $u_n^h(1 - \tau\phi) \in \chi$ for any positive $\tau \leq \frac{1}{\sup_{\Omega} \phi}$ and make calculation

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\tau \searrow 0} \frac{\mathbf{F}_n^h(u_n^h) - \mathbf{F}_n^h(u_n^h(1 - \tau\phi))}{-\tau} = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=1} \mathbf{F}_n^h(u_n^h(1 - \tau\phi)) \\ &= \int_{\Omega} -\phi u_n^h \cdot \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} - |\nabla u_n^h|^{m-2} \nabla u_n^h \cdot \nabla (\phi u_n^h) + m^{\frac{m}{2}} H \phi u_n^h \cdot \nabla_1 u_n^h \wedge \dots \wedge \nabla_m u_n^h dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{-|u_n^h|^2 + |u_{n-1}^h|^2}{2h} - |\nabla u_n^h|^{m-2} \nabla \frac{1}{2} |u_n^h|^2 \cdot \nabla \phi - \phi |\nabla u_n^h|^m (1 - |H| \sup_{\Omega} |u_n^h|) dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Since $u_n^h \in \chi$, $n = 1, 2, \dots$, we have that $1 - |H| \sup_{\Omega} |u_n^h| \geq 0$ and then, from (2.8), we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{|u_n^h|^2 - |u_{n-1}^h|^2}{2h} + |\nabla u_n^h|^{m-2} \nabla \frac{1}{2} |u_n^h|^2 \cdot \nabla \phi dx \leq 0, \quad (2.9)$$

which implies that $\frac{1}{2}|u_n^h|^2$ is a subsolution of the difference differential equations of Rothe type. In fact, we can derive the L^∞ -estimation from (2.9). Let $k = \sup_\Omega |u_0|$. By substitution of a test function $\phi = (|u_n^h|^2 - k^2)^+ = \max\{|u_n^h|^2 - k^2, 0\}$, which is shown to be admissible by the membership of u_n^h in χ , into (2.9), we have, after usual calculations,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{1}{h} \int_{\Omega \cap \{|u_n^h|^2 \geq k^2\}} \left((|u_n^h|^2 - k^2)^+ \right)^2 dx \\
&\quad - \int_{\Omega \cap \{|u_n^h|^2 \geq k^2\} \cap \{|u_{n-1}^h|^2 \geq k^2\}} (|u_n^h|^2 - k^2)^+ (|u_{n-1}^h|^2 - k^2)^+ dx \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_{\Omega \cap \{|u_n^h|^2 \geq k^2\} \cap \{|u_{n-1}^h|^2 < k^2\}} (|u_{n-1}^h|^2 + k^2)^+ (|u_n^h|^2 - k^2)^+ dx \\
&\quad + \int_\Omega |\nabla u_n^h|^{m-2} |\nabla (|u_n^h|^2 - k^2)^+|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2h} \int_\Omega \left((|u_n^h|^2 - k^2)^+ \right)^2 - \left((|u_{n-1}^h|^2 - k^2)^+ \right)^2 dx, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

where we use Hölder's and Cauchy's inequalities for the second term and note that the third term are nonnegative. Sum up (2.10) over n from 1 to N to have for any $N = 1, 2, \dots$,

$$\int_\Omega \left((|u_N^h|^2 - k^2)^+ \right)^2 dx \leq \int_\Omega \left((|u_0|^2 - k^2)^+ \right)^2 dx = 0, \tag{2.11}$$

which implies the uniform L^∞ -estimate for the family $\{u_n^h\}$ of minimizers:

$$\sup_\Omega |u_n^h| \leq k = \sup_\Omega |u_0|, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.12}$$

From the assumption $|H| \sup_\Omega |u_0| < 1$, we obtain $|H| \sup_\Omega |u_n^h| < 1$ for any $n = 1, 2, \dots$, which implies that each u_n^h , $n = 1, 2, \dots$, is a strictly inner minimizer in χ . Thus we can make calculation of the directional derivative of \mathbf{F}_n^h at u_n^h along any vector $\phi \in W_0^{1,m} \cap L^\infty(\Omega, R^{m+1})$, $n = 1, 2, \dots$, to have the first variation formula: each u_n^h satisfies (2.4) in the distribution sense for any $n = 1, 2, \dots$

Now we derive the estimate which plays a fundamental role in the following arguments. Since u_n^h satisfies (2.3), we can compare u_n^h with u_{n-1}^h to have $\mathbf{F}_n(u_n^h) \leq \mathbf{F}_n(u_{n-1}^h)$, which implies

$$E(u_n^h) + \int_\Omega \frac{1}{2h} |u_n^h - u_{n-1}^h|^2 dx \leq E(u_{n-1}^h), \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.13}$$

Adding up these inequalities (2.13), we obtain

$$E(u_N^h) + \sum_{n=1}^N \int_\Omega \frac{1}{2h} |u_n^h - u_{n-1}^h|^2 dx \leq E(u_0), \quad N = 1, 2, \dots \tag{2.14}$$

Let us introduce two maps u_h and \bar{u}_h defined on $[0, \infty) \times \Omega$ with values into R^{m+1}

$$\begin{aligned}
\bar{u}_h(t, x) &= u_n^h(x), \quad (t, x) \in ((n-1)h, nh] \times \Omega, \quad n = 1, 2, \dots, \\
\bar{u}_h(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \Omega; \\
u_h(t, x) &= \frac{t - (n-1)h}{h} u_n^h(x) + \frac{nh - t}{h} u_{n-1}^h(x), \\
&\quad (t, x) \in [(n-1)h, nh] \times \Omega, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.15}
\end{aligned}$$

We call u_h and \bar{u}_h approximate solutions of (1.5) and (1.6). In terms of these maps, (2.4) is written as the form

$$\partial_t u_h - \operatorname{div} \left(|\nabla \bar{u}_h|^{m-2} \nabla \bar{u}_h \right) = m^{\frac{m}{2}} H \nabla_1 \bar{u}_h \wedge \cdots \wedge \nabla_m \bar{u}_h \quad \text{in } \Omega_\infty. \quad (2.16)$$

By (2.14), we also have, for $N = 1, 2, \dots$,

$$E(\bar{u}_h(Nh)) + \frac{1}{2} \int_0^{Nh} \int_\Omega |\partial_t u_h|^2 dz \leq E(u_0) \quad (2.17)$$

and hence,

$$E(\bar{u}_h(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\partial_t u_h|^2 dz \leq E(u_0) \quad \text{for any } T > 0. \quad (2.18)$$

Note by (2.12) that

$$\sup_{\Omega_\infty} |\bar{u}_h| \leq \sup_\Omega |u_0| \quad (2.19)$$

and then, by the assumption that $|H| \sup_{\Omega_\infty} |u_0| < 1$,

$$|H| \sup_{\Omega_\infty} |\bar{u}_h| < 1. \quad (2.20)$$

Then, by (2.18), we have, for any $T > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} I(\bar{u}_h(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\partial_t u_h|^2 dz &\leq E(\bar{u}_h(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\partial_t u_h|^2 dz \\ &\leq E(u_0) \leq \frac{2m+1}{m+1} I(u_0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Noting the definition (2.15), we have, by routine estimate,

$$I(u_h(T)) \leq 2^{m-1} I(\bar{u}_h) \leq 2^m (2m+1) I(u_0) \quad \text{for any } T > 0. \quad (2.22)$$

From (2.21) and (2.22), we can choose subsequences $\{u_h\}$ and $\{\bar{u}_h\}$ and the limit functions u and \bar{u} such that, as $h \searrow 0$,

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u, \quad \bar{u}_h \rightarrow \bar{u} \quad \text{weakly}^* \text{ in } L^\infty((0, \infty); W^{1,m}(M, R^{m+1})), \\ \partial_t u_h &\rightarrow \partial_t u \quad \text{weakly in } L^2(\Omega_\infty, R^{m+1}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Moreover, we find the validity of the following convergence:

Lemma 4 For any q , $1 \leq q < \infty$, as $h \searrow 0$,

$$\bar{u}_h \rightarrow u, \quad u_h \rightarrow u \quad \text{strongly in } L_{loc}^q((0, \infty); L^q(\Omega, R^{m+1})). \quad (2.24)$$

Proof. Note (2.21), (2.22) and (2.23) and use the compactness of Sobolev embedding: $W^{1,2}(L^2) \cap L^2(W^{1,2}) \hookrightarrow L^q(L^q)$ for any q , $1 \leq q < \frac{2(m+1)}{(m-1)}$, to choose a subsequence $\{u_h\}$ such that

$$u_h \rightarrow u \quad \text{strongly in } L_{loc}^q((0, \infty); L^q(\Omega, R^{m+1})) \quad (2.25)$$

holds for any q , $1 \leq q < \frac{2(m+1)}{m-1}$. By the definition (2.15) of u_h and \bar{u}_h , we have $|u_h - \bar{u}_h| \leq h |\partial_t u_h|$ and then, the Hölder inequality and (2.21) give that

$$\int_{\Omega_T} |u_h - \bar{u}_h|^q dz \leq (T |\Omega|)^{1-\frac{q}{2}} h^q I(u_0)^{\frac{q}{2}} \quad (2.26)$$

holds for any $T > 0$ and any q , $1 \leq q < \frac{2(m+1)}{m-1}$. By combination (2.25) with (2.26), we find that

$$\bar{u}_h \rightarrow u \quad \text{strongly in } L_{loc}^q((0, \infty); L^q(\Omega, R^{m+1})) \quad (2.27)$$

holds for any q , $1 \leq q < \frac{2(m+1)}{m-1}$ and then, we obtain from (2.23) that

$$u = \bar{u} \quad \text{almost everywhere in } \Omega_\infty. \quad (2.28)$$

By (2.19), we can also use Lebesgue's convergence theorem to have the assertion.

To pass to the limit in the m -Laplace term in (2.16), we need some more compactness for $\{u_h\}$ and $\{\bar{u}_h\}$.

Lemma 5 *The family $\{\bar{u}_h\}$ is precompact in $L_{loc}^q((0, \infty); W^{1,q}(\Omega, R^n))$ for any q , $1 \leq q < m$.*

Proof. We can argue as in [5, Lemma 2] (also see [1, pp.31-33, Theorem 2.1]) to have the assertion, since $m \geq 2$ and, by (2.21), for any $T > 0$, we can estimate the lower-order term by

$$\int_{\Omega_T} \left| m^{\frac{m}{2}} H \nabla_1 \bar{u}_h \wedge \cdots \wedge \nabla_m \bar{u}_h \right| dz \leq |H| \int_{\Omega_T} |\nabla \bar{u}_h|^m dz \leq |H| T (2m+1) I(u_0) \quad (2.29)$$

and thus, the lower-order term is uniformly bounded in $L^1(\Omega_T)$ for any positive $T > 0$.

From Lemma 5, we conclude

Lemma 6 *There exists a subsequence $\{\bar{u}_h\}$ such that, as $h \searrow 0$,*

$$|\nabla \bar{u}_h|^{m-2} \nabla \bar{u}_h \rightharpoonup |\nabla u|^{m-2} \nabla u \quad \text{weakly in } L_{loc}^{\frac{m}{m-1}}(0, \infty; L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega, R^{m+1})). \quad (2.30)$$

Proof. By Lemma 5, we take a subsequence $\{\bar{u}_h\}$ such that, for any q , $1 \leq q < m$, as $h \searrow 0$,

$$\nabla \bar{u}_h \rightarrow \nabla u \quad \text{strongly in } L_{loc}^q((0, \infty); L^q(\Omega, R^{m+1})). \quad (2.31)$$

Using Hölder's inequality, (2.31) and the algebraic inequality

$$\left| |P|^{m-2} P - |Q|^{m-2} Q \right| \leq C(m) (|P| + |Q|)^{m-2} |P - Q| \quad (2.32)$$

available for all vectors $P = (P_\alpha^i)$, $Q = (Q_\alpha^i) \in R^{m(m+1)}$, we find that as $h \searrow 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \phi \cdot \left(|\nabla \bar{u}_h|^{m-2} \nabla \bar{u}_h - |\nabla u|^{m-2} \nabla u \right) dz \\ & \leq C \sup_{\Omega_T} |\phi| \left(\int_{\Omega_T} |\nabla \bar{u}_h - \nabla u|^{\frac{m}{2}} dz \right)^{\frac{2}{m}} \left(\int_{\Omega_T} (|\nabla \bar{u}_h| + |\nabla u|)^m dz \right)^{1 - \frac{2}{m}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

holds for all $T > 0$ and any smooth function ϕ of values in R^{mn} with compact support in Ω_T . For $\phi \in L^m(Q, R^{m(m+1)})$, we make approximation of ϕ by the family of smooth functions $\{\phi_k\}$ of compact support in Ω_T such that ϕ_k converges to ϕ strongly in $L^m(\Omega_T, R^{m(m+1)})$. Again use (2.32) to have,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \phi \cdot \left(|\nabla \bar{u}_h|^{m-2} \nabla \bar{u}_h - |\nabla u|^{m-2} \nabla u \right) dz \\ & \leq C \int_Q \left\{ |\phi - \phi_k| |\nabla \bar{u}_h - \nabla u|^{m-1} + \phi_k \cdot \left(|\nabla \bar{u}_h|^{m-2} \nabla \bar{u}_h - |\nabla u|^{m-2} \nabla u \right) \right\} dz. \end{aligned}$$

We apply (2.33) for the second term and, Hölder's inequality, (2.21) and the convergence of $\{\phi_k\}$ to ϕ for the first term, respectively, to obtain the assertion.

Finally, we need the fundamental convergence result due to Reshetnyak (see [4, Theorem 3, p.282]) to take the limit in the lower-order term.

Lemma 7 Let $\{v_h\}$ be a sequence in $W^{1,m}(\Omega, R^m)$ such that, as $h \searrow 0$,

$$v_h \longrightarrow v \quad \text{weakly in } W^{1,m}(\Omega, R^m). \quad (2.34)$$

Then it holds that

$$\det(\nabla u_h) \longrightarrow \det(\nabla u) \quad \text{in the sense of Radon measure.} \quad (2.35)$$

First, we can use (2.18), Lemma 4 and the compactness of the Sobolev embedding: $W^{1,m}(\Omega, R^m) \hookrightarrow L^q(\Omega, R^m)$ for any $q \geq 1$ to see that

$$\bar{u}_h(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{weakly in } W^{1,m}(\Omega, R^{m+1}), \quad \text{almost everywhere } t \in (0, T). \quad (2.36)$$

Denote the $m \times m$ -matrix obtained from removing the i -th column in the $m \times (m+1)$ -matrix $(\nabla \bar{u}_h)$ by $(\nabla \bar{u}_h)^{\hat{i}}$. Note (2.36) and apply Lemma 7 for $v_h = (\bar{u}_h^1, \dots, \overbrace{\bar{u}_h^i}^{\text{removed}}, \dots, \bar{u}_h^{m+1})$, $i = 1, \dots, m+1$, to find that, as $h \searrow 0$,

$$\int_{\Omega} \phi(t) \det(\nabla \bar{u}_h(t))^{\hat{i}} dx \longrightarrow \int_{\Omega} \phi(t) \det(\nabla u(t))^{\hat{i}} dx \quad (2.37)$$

holds almost everywhere $t \in (0, T)$ and for any smooth function ϕ defined on Ω_T with compact support in Ω_T . Noting the definition of the wedge product, we use (2.21) to see that

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \phi(t) \det(\nabla \bar{u}_h(t))^{\hat{i}} dx \right| &\leq \sup_{\Omega_T} |\phi| \int_{\Omega} \left| \det(\nabla \bar{u}_h(t))^{\hat{i}} \right| dx \\ &\leq \sup_{\Omega_T} |\phi| \int_{\Omega} |\nabla_1 \bar{u}_h \wedge \dots \wedge \nabla_m \bar{u}_h| dx \\ &\leq \frac{1}{m^{\frac{m}{2}}} \sup_{\Omega_T} |\phi| \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_h|^m dx \\ &\leq m(2m+1) \sup_{\Omega_T} |\phi| I(u_0) \end{aligned} \quad (2.38)$$

holds almost everywhere $t \in (0, T)$. From (2.37) and (2.38), we can apply Lebesgue's convergence theorem to verify that

$$\int_{\Omega_T} \phi \det(\nabla \bar{u}_h)^{\hat{i}} dz \longrightarrow \int_{\Omega_T} \phi \det(\nabla u)^{\hat{i}} dz \quad (2.39)$$

for any smooth function ϕ defined on Ω_T with compact support in Ω_T . Hence we arrived at the convergence of the lower-order term: For any smooth maps ϕ defined on Ω_T with values into R^{m+1} , with compact support, as $h \searrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \phi \cdot \nabla_1 \bar{u}_h \wedge \dots \wedge \nabla_m \bar{u}_h dz &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} \int_{\Omega_T} \phi^i \det(\nabla \bar{u}_h)^{\hat{i}} dz \\ &\longrightarrow \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} \int_{\Omega_T} \phi^i \det(\nabla u)^{\hat{i}} dz = \int_{\Omega_T} \phi \cdot \nabla_1 u \wedge \dots \wedge \nabla_m u dz. \end{aligned} \quad (2.40)$$

As a result we can use the convergence results (2.23), (2.30) and (2.40) to pass to the limit as $h \searrow 0$ in the approximating equation (2.16) and see that

$$\int_{\Omega_{\infty}} \phi \cdot \partial_t u + |\nabla u|^{m-2} \nabla u \cdot \nabla \phi - m^{\frac{m}{2}} H \phi \cdot \nabla_1 u \wedge \dots \wedge \nabla_m u dz = 0 \quad (2.41)$$

holds for any smooth maps ϕ defined on Ω_∞ with values into R^{m+1} , with compact support. By the usual approximation similar as Proof of Lemma 6, we also see that (2.41) holds for any $\phi \in L^m(0, T; W_0^{1,m}(\Omega, R)) \cap L^\infty(\Omega_T)$. Again, note by the exactly same observation as in (2.7) that the functional $E(v)$ is weakly lower-semi continuous in $W^{1,m}(\Omega, R^{m+1})$. Then we use (2.23) to find from (2.18) that

$$\begin{aligned} E(u_0) &\geq \liminf_{h \searrow 0} E(\bar{u}_h(T)) + \frac{1}{2} \liminf_{h \searrow 0} \int_0^T \int_\Omega |\partial_t u_h|^2 dz \\ &\geq E(u(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\partial_t u|^2 dz \end{aligned}$$

holds for almost every $T > 0$, from which we have (1.7). The validity of the initial condition follows from the energy inequality (1.7).

References

- [1] Y. Chen, M.-C. Hong, N. Hungerbühler, Heat flow of p -harmonic maps with values into spheres, *Math. Z.* **215**, (1994) 25-35.
- [2] F. Duzaar, M. Fuchs, Einige Bemerkungen über die Regularität von stationären Punkten gewisser geometrischer Variationsintegrale, *Math. Nachr.* **152**, (1991) 39-47.
- [3] F. Duzaar, J. F. Grotowski Existence and regularity for higher-dimensional H-systems, *Duke Math. J.* **101**, (2000) 459-485.
- [4] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I*, Springer, Berlin, 1998.
- [5] N. Hungerbühler, Global weak solutions of the p -harmonic flow into homogeneous spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **45/1** (1996), 275-288.
- [6] N. Kikuchi, A method of constructing Morse flows to variational functionals, *Nonlin. World* **1** (1994), 131-147.
- [7] M. Misawa, Partial regularity results for evolutionary p -Laplacian systems with natural growth, *Manusc. Math.* **109**, (2002) 419-454.
- [8] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer, Berlin, 2nd edition, 1996.

ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法

村川 秀樹 (九州大学大学院数理学府 M2)

中木 達幸 (九州大学大学院数理学研究院)

1. はじめに

本稿では、古典的な 1 相ステファン問題の解法を提案し、いくつかの数値実験結果を示すのを目的とする。この問題は氷が融解する過程を記述し、温度分布 $u(x, t)$ とともに水と氷の間に出現する移動境界 $\Gamma(t)$ を捉えるのが目的である。「1 相」とは氷の温度は一律にゼロであることを仮定し、水の温度分布だけを考察するという意味である。「古典的」とは界面の曲率の効果を無視し、物質の状態が、温度が正のときは水、ゼロのときは氷と仮定するものである。このとき、次が成立することが知られている。

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in G(t), 0 < t < T, \\ u(x, t) = A(x, t), & x \in \partial\Omega, 0 < t < T, \\ u(x, t) = 0, & x \in \Gamma(t), 0 < t < T, \\ (-\nabla u, \nabla \Phi) + \lambda \Phi_t = 0, & x \in \Gamma(t), 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in G_0, \\ G(0) = G_0. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 Ω は R^d の領域 ($d \geq 1$)、 $G(t) (\subset \Omega)$ は時刻 t での水の領域、 A は熱源の温度 (熱源は Ω の境界 $\partial\Omega$ に配置するものとする)、 λ は潜熱の大きさを表す正の定数、関数 Φ は $\Gamma(t) = \{x \in \Omega; \Phi(x, t) = 0\}$ を満たすもの、関数 u_0 と Ω の領域 G_0 は、それぞれ、初期時刻での温度分布と水の領域、 $T > 0$ は定数である。移動境界 $\Gamma(t)$ は $\Gamma(t) = \partial G(t) \setminus \partial\Omega$ で定められることに注意されたい。

この問題に対して、移動境界をも捉える数値解法として、野木の方法 [6] やペナルティー法 [5] などが知られている。前者は空間 1 次元に特化した方法で、空間多次元へは適用が困難だと思われる。後者は空間多次元でも適用できるが、ペナルティー係数と呼ばれる人工的なパラメーターがある。本講演の目的は、人工的なパラメーターがなく、空間多次元にも適用可能な解法を提案し、その数値実験結果を示すことである。我々の方法は、計算コスト (計算時間と使用するメモリー) が低いとの特徴もある。

2. 解法とその構成法

我々の解法を述べる。時間を離散化する: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_N = T$. 時刻 $t = t_m$ における温度分布 $u(x, t_m)$ の近似 $u^m(x)$ を、補助関数 $v^m(x)$ とともに、

1. $u^0 = u_0, v^0 = v_0$ とおく。ここで、

$$v_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in G_0, \\ \lambda, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

2. u^m と v^m が与えられたとき、 u^{m+1} と v^{m+1} を

$$\begin{cases} u^{m+1}(x) = (\mathcal{H}_m(t_{m+1})u^m(x) - v^m(x))^+ \\ v^{m+1}(x) = (\mathcal{H}_m(t_{m+1})u^m(x) - v^m(x))^- \end{cases} \quad (x \in \Omega) \quad (3)$$

で求める ($m = 0, 1, \dots, N-1$) . ここで, $\mathcal{H}_m(t)z$ は次の拡散方程式のディリクレ問題の解である .

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \Omega, \quad t_m < t < t_{m+1}, \\ u(x, t) = A(x, t), & x \in \partial\Omega, \quad t_m < t < t_{m+1}, \\ u(x, t_m) = z(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

により求める ($m = 0, 1, \dots, N$) . 移動境界の近似は u^m の台の境界から Ω の境界を除いたものとする .

この方法は, Eymard らによるステファン問題の定式化とそれを近似する反応拡散系を使うことにある . 反応拡散系において, 特異極限を使うことがポイントである . 具体的に説明する .

未知関数 w に関する方程式系

$$(SP) \begin{cases} w_t = \Delta(w^+) & \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T), \\ w^+(x, t) = A(x, t) & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(x, 0) = w_0(x) & \text{for } x \in \Omega \end{cases}$$

を考える . ここで, $a^\pm = \max\{\pm a, 0\}$ である . この問題の解 w と古典的な 1 相ステファン問題の間に次の関係があることが知られている: 初期関数を

$$w_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{if } u_0(x) > 0 \\ -\lambda & \text{if } u_0(x) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

とおくと, w^+ は水の温度を表し, w^- が正の領域は氷の領域と一致する .

問題 (SP) に対して, 次の反応拡散系を考える .

$$(RD)_k \begin{cases} U_t = \Delta U - kUV & \text{in } Q_T, \\ V_t = -kUV & \text{in } Q_T, \\ U(x, t) = A(x, t) & \text{for } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ U(x, 0) = u_0(x) := w_0^+(x) & \text{for } x \in \Omega, \\ V(x, 0) = v_0(x) := w_0^-(x) & \text{for } x \in \Omega, \end{cases}$$

ここで, $k > 0$ はパラメーターである . $(RD)_k$ と (SP) の間には次の関係があることが知られている .

定理 (Eymard et al. [1]) 仮定

$$\begin{cases} A \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{\Omega}_T), \\ u_0(x) = A(x, 0) & \text{for } x \in \Omega, \\ 0 \leq A \leq K_1 & \text{in } Q_T, \\ 0 \leq v_0 \leq K_2 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (6)$$

の下で (K_1, K_2 は定数), $(RD)_k$ はただ 1 つの解 $(U^{(k)}, V^{(k)}) \in W_2^{2,1}(Q_T) \times C^{0,1}([0, T]; L^\infty(\Omega))$ をもち,

$$U^{(k)} \rightarrow w^+, \quad V^{(k)} \rightarrow w^- \quad \text{in } L^2(Q_R) \quad (\text{as } k \rightarrow \infty) \quad (7)$$

が成立する .

この定理により, $k = \infty$ での反応拡散系 $(RD)_k$ の解が求まれば, それがステファン問題の解になることが分かる . $k = \infty$ での解は, 井古田ら [3][4] による特異極限の方法により実現することにする . すなわ

ち, $t = t_m$ における $(RD)_k$ の近似解 (U^m, V^m) を, 標準的な operator split method (拡散項と反応項を分離) を使って, 次の手順で構成する.

Step 1. 初期条件から U^0 と V^0 を定める.

$$U^0 = u_0, \quad V^0 = v_0. \quad (8)$$

Step 2. $m = 0, 1, 2, \dots$ としながら次のことを行う.

Step 2-1. $\bar{U}(\cdot, t_{m+1}) = \mathcal{H}_m U^m$ とおく. すなわち, 拡散方程式 (4) を解く.

Step 2-2. 次の常微分方程式を解く.

$$\begin{cases} \hat{U}_t^m = -k\hat{U}^m\hat{V}^m & \text{in } \Omega \times (t_m, t_{m+1}], \\ \hat{V}_t^m = -k\hat{U}^m\hat{V}^m & \text{in } \Omega \times (t_m, t_{m+1}], \\ \hat{U}^m(x, t_m) = \bar{U}^m(x, t_{m+1}) & \text{for } x \in \Omega, \\ \hat{V}^m(x, t_m) = V^m(x, t_{m+1}) & \text{for } x \in \Omega. \end{cases} \quad (9)$$

Step 2-3. (U^{m+1}, V^{m+1}) を次で定める.

$$\begin{cases} U^{m+1} = \hat{U}^m(x, t_{m+1}), \\ V^{m+1} = \hat{V}^m(x, t_{m+1}). \end{cases} \quad (10)$$

ここで, $\theta = k(t - t_m)$ により, (9) の微分方程式と (10) を書き換えると,

$$\begin{cases} \hat{U}_\theta^m = -\hat{U}^m\hat{V}^m & \text{in } \Omega \times (0, k(t_{m+1} - t_m)], \\ \hat{V}_\theta^m = -\hat{U}^m\hat{V}^m & \text{in } \Omega \times (0, k(t_{m+1} - t_m)] \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} U^{m+1} = \hat{U}^m(x, k(t_{m+1} - t_m)), \\ V^{m+1} = \hat{V}^m(x, k(t_{m+1} - t_m)) \end{cases} \quad (12)$$

を得る. この常微分方程式の解の漸近挙動は容易に分かるので ($\hat{U}^m - \hat{V}^m$ は θ に関して定数であることを使う), $k \rightarrow \infty$ にすることにより, (3) を得る.

3. 数値計算例

この節では, 我々の解法によるいくつかの数値計算例を示す. まず, 空間 1 次元問題について, 解法の収束性を数値的に調べる. 初期時刻 $t = 0$ において, $u_0 \equiv 0$ であり, 境界条件が $u(0, t) = c$ ($t > 0$) である場合に特殊解を構成することができる ($c > 0$ は与えられた定数である). その特殊解の移動境界と我々の方法による数値的な移動境界を比較したのが図 1 である. 図 2 はそれを一部を拡大したものである. これらの図より, 我々の解法による解は精度良く移動境界を捉えているのが観測される. なお, これらの図における数値解は次のようにして求めた. 時間を一定間隔 Δt で離散化する. すなわち, $t_m = m\Delta t$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) である. また, 拡散方程式 (4) を数値的に解くため, 空間を一定間隔 Δx で離散化して, 一般的な差分法を用いた.

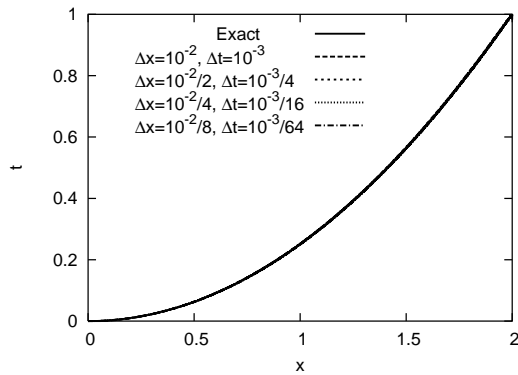


図 1: 特殊解と我々の解法による数値解

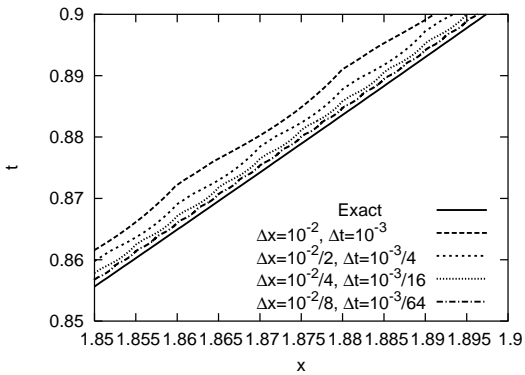


図 2: 図 1 の拡大

我々の解法は空間多次元問題にも容易に適用できるという特徴がある．3次元問題の数値解を図3に示す．氷の領域を白で示した．氷が徐々に溶け、氷の領域が分離する様子が捉えられている．

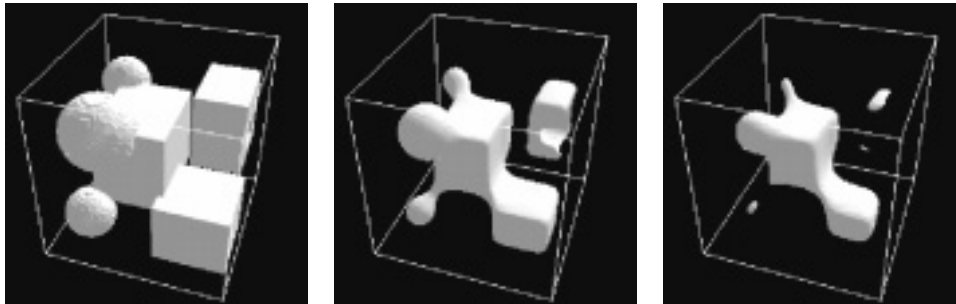


図 3: 3次元問題の数値解．左図が初期状態で、時間の経過とともに右図へと変化する．白色の領域が氷を表す．

4. 最後に

古典的な1相ステファン問題に対して、空間多次元にも適用可能な解法を提案し、数値実験結果を示した．我々の方法は単純で、計算コストが少なく、移動境界を捉えることができるという大きな特徴をもつ．この解法を別の移動境界問題に適用することが今後の課題の1つである．現在のところ、2相ステファン問題や多孔質媒体流に適用可能だと思われるが、研究は始まったばかりである．今後の一層の研究が望まれる．

最後に、本講演の機会を得たことに対し、辻川亨氏をはじめとしてオーガナイザーの方々には御礼申し上げます．

参考論文

- [1] R. Eymard, D. Hilhorst, R. van der Hout and L. A. Peletier, A reaction-diffusion system approximation of a one-phase Stefan problem, In J. L. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem (eds), Optimal control and partial differential equations (2000), 156–170.
- [2] D. Hilhorst, R. van der Hout and L. A. Peletier, The fast reaction limit for a reaction-diffusion system, J. Math. Anal. Appl. 199 (1996), 349–373.
- [3] R. Ikota, Threshold competition dynamics, preprint.
- [4] R. Ikota, M. Mimura and T. Nakaki, A methodology for numerical simulations to a singular limit, preprint.
- [5] 河原田秀夫, 自由境界問題 理論と数値解法, UP 応用数学選書 13, 東京大学出版会, 1989年.
- [6] 山口昌哉, 野木達夫, ステファン問題, 数理解析とその周辺 17, 産業図書, 1977年.

空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状*

竹内 慎吾 (工学院大学)

shingo@cc.kogakuin.ac.jp

1. 目的

半線形放物型方程式の力学系理論によれば, ある種の反応項をもつ半線形放物型方程式の大域アトラクターは各定常解の不安定多様体の和集合として表現される. そしてその各々の定常解の不安定多様体は別の定常解の安定多様体と横断的に交わっており, その結果, 前者の定常解の近傍から出発して後者の定常解へ近づいていく解軌道, いわゆる connecting orbit を実現する. 定常解集合は離散的で, 大域アトラクターを特徴づける“基底”のような役割をしている.

このような, ある種の半線形放物型方程式に見られる大域アトラクターの幾何的構造は準線形の方程式では発見されておらず, ましてや非線形拡散の方程式ではその大域アトラクターの構造についてほとんど何も知られていない. それどころか非線形拡散の中でも特に退化拡散 (多孔質媒質の方程式の拡散項や p -ラプラス作用素など) の場合には, 実際に定常解集合が連続体となる例が確認されており, これは“基底”が連続体濃度あるようなものだから, 大域アトラクターが半線形の場合とは本質的に異なる構造をもつことが予想される. しかし非線形拡散方程式に対しては線形化解析が確立されていないため, 現状では大域アトラクターの内部に入り込むことが出来ず, したがってその構造が (少なくとも私には) 見えていない.

放物型方程式の定常解の性質をよく知ることが大域アトラクターの構造を知る上で重要であることは, たとえば半線形放物型方程式の零点数非増大原理が connecting orbit のパターンを選び出すため決定的に用いられることからもうなづけるであろう. 一方, 退化拡散方程式の定常解の性質は半線形のそれほどよく知られていない. この意味で, 退化拡散方程式の定常解, すなわち退化楕円型方程式特有の特徴的な非線形現象の例を数多く貯蓄しておく必要を感じる. 本研究はその一環である.

2. 問題と結果

退化楕円型方程式の境界値問題

$$(P) \begin{cases} -\lambda \Delta_p u = u^{p-1}(a(x) - u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

*本研究は科学研究費補助金の援助を受けている: 若手研究 (B), 課題番号 15740110.

の解 u_λ の形状について考える. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界集合 (C^2 であれば十分) とし, $\lambda > 0$ はパラメータ, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $p > 2$ は定数, $a(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ は恒等的に 0 ではない非負値関数とする. λ が十分小さければ, (P) は一意解 $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ をもつ (たとえば文献 [1], [2] を参照). さらに正則性の結果から $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ とできる. (たとえば文献 [6] を参照). より正確には

命題 1. (P) が一意解をもつための $a(\cdot)$ の必要十分条件は

$$\inf_{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\lambda \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx - \int_{\Omega} a(x) |w|^p dx}{\int_{\Omega} |w|^p dx} < 0.$$

さて $a(x) \equiv 1$ の場合, 解について次のことが知られている: 命題 1 により (P) は

$$\lambda < \frac{1}{\lambda_p}$$

のとき一意解 u_λ をもつ. ここで λ_p は $-\Delta_p$ のディリクレ境界条件下での第 1 固有値である. λ の減少にともない, u_λ は Ω 上で広義一様に 1 に収束する. より詳しくは, ある $\lambda > 0$ を境に集合 $\{x \in \Omega \mid u_\lambda(x) = 1\}$ が空でなく内点を含み, 果ては Ω 全体に広がっていくことが知られている (文献 [3], [4], [5], [7], [9] を参照).

今回, $a(\cdot)$ が Ω 全体で定数とは限らない場合に次の結果を得たので報告する.

定理 2. $\Omega_0 \subset \Omega$ を有限個の領域の和とし, $a(\cdot)$ は Ω_0 の各連結成分上で定数であるとする. このときある $\lambda_0 > 0$ が存在し, $\lambda < \lambda_0$ ならば

$$\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \Omega_0 \mid u_\lambda(x) = a(x)\}$$

は内点を含む. さらに十分小さい $\varepsilon > 0$ に対してある $\lambda < \lambda_0$ が存在して

$$\{x \in \Omega_0 \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_0) > \varepsilon\} \subset \mathcal{O}_\lambda.$$

証明は super- & sub-solution method (例えば文献 [2] を参照) による. $a(x) \equiv 1$ の場合は super solution として自明な $\bar{u}_\lambda \equiv 1$ をとればよいのに対して, 我々の場合は非自明なものを構成する必要がある. その際, $N = 1$ の場合の方程式の相平面による解析が役に立つ. 次章でもう少し詳しく述べる.

注意 1. 定理 2 の逆に関連して「 \mathcal{O}_λ が内点をもつならば, そのある近傍で $a(\cdot)$ は定数でなくてはならない」ことが予想される.

3. 定理 2 の証明の要点

Ω_0 がそれ自身領域である場合に示す. Ω_0 上で $a(\cdot)$ は定数であるからその値を同じ記号を使って a と書くことにする. Ω_0 の任意の点 x_0 と, x_0 を中心とする半径 R の球 $B_R(x_0) \subset \Omega_0$ をとる. R の小ささに応じて (x_0 にはよらず) λ を十分小さくとれば, $B_{R/2}(x_0)$ 上で $u_\lambda(x) = a$ であることが示されればよい.

$f(u) = u^{p-1}(a - u)$ とおく. まず super solution, sub solution を作るために次を満たす $B_R(x_0)$ 上の関数 $\bar{u}_\lambda, \underline{u}_\lambda$ を構成する.

$$(1) \quad \text{Super solution} \quad \begin{cases} -\lambda \Delta_p \bar{u}_\lambda \geq f(\bar{u}_\lambda) & \text{in } B_R(x_0), \\ \bar{u}_\lambda = \|a(\cdot)\|_\infty & \text{on } \partial B_R(x_0). \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{Sub solution} \quad \begin{cases} -\lambda \Delta_p \underline{u}_\lambda \leq f(\underline{u}_\lambda) & \text{in } B_R(x_0), \\ \underline{u}_\lambda = 0 & \text{on } \partial B_R(x_0). \end{cases}$$

ここで $\|a(\cdot)\|_\infty = \text{esssup}_{x \in \Omega} |a(x)|$. 特に x_0 に関して球対称なものを構成しよう. そのためには次を満たす $v = v(\rho)$ を構成して $u(x) = v(|x - x_0|)$ とすればよい.

$$(3) \quad \begin{cases} -\lambda(\rho^{N-1}|v_\rho|^{p-2}v_\rho)_\rho \geq \rho^{N-1}f(v) & \text{in } (0, R), \\ v_\rho(0) = 0, v_\rho(R) = \begin{cases} \|a(\cdot)\|_\infty \\ 0 \end{cases} \end{cases}.$$

ここで $v(R) = \|a(\cdot)\|_\infty$ を満たす方が super solution で, $v(R) = 0$ を満たす方が sub solution である (以下同様に記述する). $\rho^{N-1}|v_\rho|^{p-2}v_\rho = |\rho^\theta v_\rho|^{p-2}\rho^\theta v_\rho$ ($\theta = \frac{N-1}{p-1}$) に注意して, $w_\xi = \rho^\theta v_\rho$ となるように変数変換する: $w(\xi) = v(\rho)$, $\frac{d\rho}{d\xi} = \rho^\theta$, すなわち

$$\xi = g(\rho) = \begin{cases} \frac{R^{1-\theta} - \rho^{1-\theta}}{1-\theta} & (\theta \neq 1), \\ \log \frac{R}{\rho} & (\theta = 1) \end{cases}$$

と変換すれば, (3) は

$$(4) \quad \begin{cases} -\lambda(|w_\xi|^{p-2}w_\xi)_\xi \geq g^{-1}(\xi)^{p\theta}f(w) & \text{in } (0, T), \\ w(0) = \begin{cases} \|a(\cdot)\|_\infty \\ 0 \end{cases}, w_\xi(T) = 0. \end{cases}$$

となる : $u(x) = v(|x - x_0|) = w(g(|x - x_0|))$. ここで

$$T = \begin{cases} \frac{R^{1-\theta}}{1-\theta} & (\theta < 1), \\ \infty & (\theta \geq 1). \end{cases}$$

(4) を満たす $w = \bar{w}_\lambda, \underline{w}_\lambda$ を構成するため, 次の補題を準備する.

補題 3. $T_0 \in (0, T)$ を固定する. **自励系**の境界値問題

$$(5) \quad \begin{cases} -\lambda(|\phi_\xi|^{p-2}\phi_\xi)_\xi = g^{-1}(T_0)^{p\theta} f(\phi) & \text{in } (0, T_0), \\ \phi(0) = \begin{cases} \|a(\cdot)\|_\infty \\ 0 \end{cases}, \quad \phi_\xi(T_0) = 0 \end{cases}$$

はそれぞれ, 十分小さい λ に対して次のような一意解 $\phi = \bar{\phi}_\lambda, \underline{\phi}_\lambda$ をもつ.

$$\bar{\phi}_\lambda(\xi) \begin{cases} = \|a(\cdot)\|_\infty & (\xi = 0), \\ \in [a, \|a(\cdot)\|_\infty] & (0 < \xi < \bar{\xi}\lambda^{\frac{1}{p}}), \\ = a & (\bar{\xi}\lambda^{\frac{1}{p}} \leq \xi \leq T_0), \end{cases}$$

$$\underline{\phi}_\lambda(\xi) \begin{cases} = 0 & (\xi = 0), \\ \in [0, a] & (0 < \xi < \underline{\xi}\lambda^{\frac{1}{p}}), \\ = a & (\underline{\xi}\lambda^{\frac{1}{p}} \leq \xi \leq T_0), \end{cases}$$

ここで $\bar{\xi} = \bar{\xi}(p, a, T_0, R, \theta)$, $\underline{\xi} = \underline{\xi}(p, a, T_0, R, \theta)$ はある定数 (厳密に求められるがここでは省略する).

補題 3 の証明は (5) に対して相平面解析を行うことで得られる. 詳しくは $\bar{\phi}_\lambda$ については [8, Lemma 2.1] を, $\underline{\phi}_\lambda$ については [9, Theorem 3.2] を参照のこと.

$\bar{\phi}_\lambda, \underline{\phi}_\lambda$ を $T_0 < \xi \leq T$ において a 拡張した関数を

$$\bar{w}_\lambda(\xi) = \begin{cases} \bar{\phi}_\lambda(\xi) & (0 \leq \xi \leq T_0), \\ a & (T_0 < \xi \leq T), \end{cases}$$

$$\underline{w}_\lambda(\xi) = \begin{cases} \underline{\phi}_\lambda(\xi) & (0 \leq \xi \leq T_0), \\ a & (T_0 < \xi \leq T) \end{cases}$$

とすれば, $\bar{w}_\lambda, \underline{w}_\lambda$ はそれぞれ (4) を満たす. 実際, 境界条件は明らか. また区間 $[T_0, T)$ ではともに恒等的に a であるから (4) の不等式の等号を満たす. さらに区間

$(0, T_0)$ では g^{-1} が単調減少であることと $\bar{\phi}_\lambda \geq a$, $\underline{\phi}_\lambda \leq a$ に注意すれば

$$\begin{aligned} -\lambda(|\bar{w}_\lambda|_\xi^{p-2}(\bar{w}_\lambda)_\xi - g^{-1}(\xi)^{p\theta} f(\bar{w}_\lambda)) &= -\lambda(|\bar{\phi}_\lambda|_\xi^{p-2}(\bar{\phi}_\lambda)_\xi - g^{-1}(\xi)^{p\theta} f(\bar{\phi}_\lambda)) \\ &= (g^{-1}(T_0)^{p\theta} - g^{-1}(\xi)^{p\theta}) f(\bar{\phi}_\lambda) \geq 0, \\ -\lambda(|\underline{w}_\lambda|_\xi^{p-2}(\underline{w}_\lambda)_\xi - g^{-1}(\xi)^{p\theta} f(\underline{w}_\lambda)) &= -\lambda(|\underline{\phi}_\lambda|_\xi^{p-2}(\underline{\phi}_\lambda)_\xi - g^{-1}(\xi)^{p\theta} f(\underline{\phi}_\lambda)) \\ &= (g^{-1}(T_0)^{p\theta} - g^{-1}(\xi)^{p\theta}) f(\underline{\phi}_\lambda) \leq 0 \end{aligned}$$

となって確かに (4) を満たしている.

ゆえに $\bar{u}_\lambda, \underline{u}_\lambda$ を

$$\begin{aligned} \bar{u}_\lambda(x) &= \bar{w}_\lambda(g(|x - x_0|)), \\ \underline{u}_\lambda(x) &= \underline{w}_\lambda(g(|x - x_0|)) \end{aligned}$$

と定義すればこれらはそれぞれ (1), (2) を満たす.

さて $\bar{u}_\lambda, \underline{u}_\lambda$ をさらに $\Omega \setminus B_R(x_0) \sim \|a(\cdot)\|_\infty$, 0 拡張した関数をそれぞれ再び $\bar{u}_\lambda, \underline{u}_\lambda$ と書くことにすると, $\bar{u}_\lambda, \underline{u}_\lambda$ はそれぞれ Ω 全体で定義された super solution, sub solution であって $\underline{u}_\lambda(x) \leq \bar{u}_\lambda(x)$ を満たす. よって [2] によれば \bar{u}_λ と \underline{u}_λ の間に (P) の解が存在する. この解は一意的で u_λ のことだから

$$\underline{u}_\lambda(x) \leq u_\lambda(x) \leq \bar{u}_\lambda(x) \quad \text{in } \Omega,$$

特に

$$u_\lambda(x) = a \quad \text{in } B_{\min\{g^{-1}(\bar{\xi}\lambda^{1/p}), g^{-1}(\underline{\xi}\lambda^{1/p})\}}(x_0).$$

g^{-1} は単調減少であったから $\lambda \searrow 0$ のとき $g^{-1}(\bar{\xi}\lambda^{1/p}), g^{-1}(\underline{\xi}\lambda^{1/p}) \nearrow R$. したがって, 十分小さい λ をとれば

$$u_\lambda(x) = a \quad \text{in } B_{R/2}(x_0).$$

これが示すべきことであった. 方程式は Ω_0 上で自励系であるから, $x_0 \in \Omega_0$ を任意の内点として動かせばよい. Ω_0 が有限個の領域の場合は, この議論を各連結領域で行えばよい.

注意 2. (P) の方程式の右辺を $u^{q-1}(a(x) - u)^r$ ($q \geq 2$, $0 < r < p - 1$) としても定理 2 は成り立つ. ただしこの場合は一般に解の一意性は保証されないので u_λ はあるひとつの解のこととして解釈する.

参考文献

- [1] J. I. Díaz and J. E. Saa, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), 521–524.

- [2] A. Cañada, P. Drábek and J. L. Gámez, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 4231–4249.
- [3] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, *Differential Integral Equations* **13** (2000), 1201–1232.
- [4] M. Guedda and L. Véron, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 419–431.
- [5] S. Kamin and L. Véron, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), 1079–1085.
- [6] G. M. Lieberman, *Nonlinear Anal.* **12** (1988), 1203–1219.
- [7] S. Takeuchi, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 433–441.
- [8] S. Takeuchi, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000), 678–692.
- [9] S. Takeuchi and Y. Yamada, *Nonlinear Anal.* **42** (2000), 41–61.

Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題 について

石毛和弘 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

1 序

本稿では次の Cauchy-Neumann 問題

$$(1.1) \quad u_t = D\Delta u + u^p \quad \text{in } \Omega \times (0, T_D),$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, T_D),$$

$$(1.3) \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{in } \Omega$$

を扱う。ただし, $D > 0$, $p > 1$, $T_D > 0$, Ω は \mathbf{R}^N 上の滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, ν は $\partial\Omega$ に対する外向き法線ベクトルとする。この半線形熱方程式 (1.1) は固体燃料の燃焼を記述する偏微分方程式の一つであり ([3] を参照), Fujita [7] の結果以来, 非常に数多くの研究がなされている。本稿を通して, 初期値 ϕ に対して

$$(1.4) \quad \phi \in C(\overline{\Omega}), \quad \phi(x) \geq 0, \quad \phi \not\equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

を仮定する。このとき, 少なくとも局所的に (1.1)–(1.3) の (古典) 解 u が一意に存在し, 以下 T_D を解 u の最大存在時間とする。ここで, もし $T_D < \infty$ ならば

$$\limsup_{t \nearrow T_D} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x, t) = \infty$$

となるため, T_D を解 u の爆発時刻という。さらに次の集合

$$B_D(\phi) = \left\{ x \in \overline{\Omega} : \exists \{P_k\} \subset \overline{\Omega} \times (0, T_D) \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = (x, T_D), \lim_{k \rightarrow \infty} u(P_k) = \infty \right\}$$

を定義し, 解 u の爆発集合と呼ぶ。また, 爆発集合の元を爆発点という。本稿においては, 特に D が十分大きい場合について, 解が何時 (T_D の値), どのように, どこで爆発するのか ($B_D(\phi)$ の位置) という問いに対して, 論文 [12], N. Mizoguchi との共同研究である論文 [13], [14], H. Yagisita との共同研究である論文 [15] を元に考察していきたいと思う。

以下, $k = 1, 2, \dots$ に対して, P_k を $L^2(\Omega)$ から第 k Neumann 固有空間への直交射影とする. 特に, $f \in L^2(\Omega)$ に対して, $P_1 f$ は定数関数であり,

$$P_1 f = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx$$

となる. ここで, $|\Omega|$ は領域 Ω の面積を表すものとする.

2 何時爆発するのか

$\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合や Dirichlet 境界値問題の場合, 必ずしも (1.1) の解は有限時間で爆発するとは限らない ([5], [18] を参照). しかし, 有界領域 Ω における Neumann 境界値問題の場合, 初期値 ϕ が Ω 上恒等的に零でないならば, その解は必ず有限時間で爆発する. 実際,

$$U(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx$$

とおくと,

$$U'(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t)^p dx \geq U(t)^p, \quad t > 0$$

となるので, $T_D \leq T_{\infty}$ となる. ここで, T_{∞} は常微分方程式

$$U'(t) = U(t)^p, \quad U(0) = P_1 \phi = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi(x) dx > 0,$$

の解の最大存在時間であり,

$$(2.5) \quad T_{\infty} = (p-1)^{-1} \left(\frac{1}{P_1 \phi} \right)^{p-1}$$

とする. 一般に与えられた初期値 ϕ に対して T_D を求めることは難しいが, $D \gg 1$ の場合には次の結果が得られる.

定理 2.1 ([12], [15] を参照.)

(1.4) を仮定し, Cauchy-Neumann 問題 (1.1)–(1.3) を考える. このとき, ある定数 C, D_0 が存在し, $D \geq D_0$ に対して

$$(2.6) \quad T_{\infty} - CD^{-1} \leq T_D \leq T_{\infty}$$

が成立する.

$D \searrow 0$ の場合の爆発時刻 T_D については, 初期値の符号が変化する場合も含めて Mizoguchi-Yanagida [22], [23] によって研究され, T_D は初期値を $\max_{x \in \bar{\Omega}} |\phi(x)|$ とする常微分方程式 $U' = U^p$ の解の最大存在時間に近づく等がわかる.

3 どのように解は爆発するのか

爆発の早さや爆発点の周りでの挙動については, Friedman-McLeod [8], Giga-Kohn [9]–[11], Herrero, Velázquez, Merle, Fila-Souplet [6] らによって研究されたが, Neumann 条件の場合についてはあまり知られていなかった. そこで, まず, 爆発の早さに関する結果を与えることから始める.

定理 3.1 ([13] を参照.) (1.4) を仮定し, (1.1)–(1.3) の解 u を考える. このとき,

$$(3.7) \quad 1 < p \leq 1 + \frac{2}{N} \quad \text{又は} \quad D \gg 1$$

ならば, ある定数 C が存在して

$$(3.8) \quad u(x, t) \leq C(T_D - t)^{-1/(p-1)}, \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T_D)$$

が成立する.

(3.8) の右辺の発散の早さは, 常微分方程式 $U' = U^p$ の発散の早さと一致する. また, (3.7) の仮定 $1 < p \leq 1 + 2/N$ は, 最近, N. Mizoguchi [20] によって, $1 < p < N(N+2)/(N-1)^2$ まで拡張された. また, 爆発点のまわりの解の挙動として, 次の結果が成立する.

定理 3.2 ([13] を参照.) (1.4) を仮定し, (3.8) をみたま (1.1)–(1.3) の解 u を考える. このとき,

$$(N-2)p \leq N+2$$

ならば, $a \in \bar{\Omega}$ に対して

$$\lim_{t \nearrow T_D} (T_D - t)^{1/(p-1)} u(a + (T_D - t)^{1/2} y, t) = \begin{cases} (p-1)^{-1/(p-1)} & (a \in B_D(\phi)), \\ 0 & (a \notin B_D(\phi)). \end{cases}$$

ただし, 上の収束は y について広義一様収束である.

ここで, $a \in \Omega$ の場合は [9] によって既に証明されていることに注意しておく. 定理 3.1, 3.2 の証明の困難さを説明するために, [9]–[11] に従って次の変数変換を行う:

$$w(y, s) = (T_D - t)^{1/(p-1)} u(x, t), \quad y = (T_D - t)^{-1/2}(x - a), \quad s = -\log(T_D - t).$$

さらに, 関数 w のエネルギー関数として

$$E[w](s) = \int_{\Omega(s)} \left\{ \frac{D}{2} |\nabla w|^2 + f(w) \right\} \rho dy, \quad s \geq s_D \equiv -\log T_D$$

を考える. ただし, $\Omega(s) = e^{s/2}(\Omega - a)$, $\rho(y) = (4\pi D)^{-N/2} e^{-|y|^2/4D}$,

$$f(r) = \frac{1}{2(p-1)} r^2 - \frac{1}{p+1} r^{p+1}, \quad r \geq 0$$

とする. このエネルギー関数 $E[w](s)$ は $s_2 \geq s_1 \geq s_D$ に対して

$$(3.9) \quad E[w](s_2) \leq E[w](s_1) + \int_{s_1}^{s_2} e^{s/2} \int_{\partial\Omega(s)} \left\{ \frac{D}{2} |\nabla w|^2 + f(w) \right\} \rho \frac{y \cdot \nu}{|y|} d\sigma$$

という不等式をみだす. もし $E[w](s)$ が変数 s について単調減少ならば [9]–[11] の議論が有効に働き, 定理 3.1, 3.2 は問題なく証明できる. しかし, Neumann 条件の下では, (3.9) の右辺に現れる境界積分の項によって, $E[w](s)$ の単調減少性が不明になる. 定理 3.1 では, [6] の議論を用いることによって, 定理 3.2 では, (3.8) を仮定し, 境界積分の項をうまく評価することによって証明を行う.

4 どこで解は爆発するのか

与えられた初期値に対して爆発集合の位置を予測することは一般的に困難な問題である. Dirichlet 条件の場合には, 境界では爆発はしない, というような結果は幾つか知られているが ([8], [11], [13] 等を参照), Neumann 条件の場合にはこのような結果は期待できない. (爆発集合の大きさに関しては, Dirichlet 条件や $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合ではあるが, [4], [19], [24] 等の研究がある.)

ここでは, $D \gg 1$ の場合を考えることによって, 拡散が強く働き, 爆発集合の位置についての特徴付けが与えられることを示す. まず, 筒状領域の場合についての結果を与える.

定理 4.1 ([12] を参照.) Ω を筒状領域

$$(4.10) \quad \Omega = \Omega' \times (0, L), \quad L > 0$$

とする. ここで, Ω' は \mathbf{R}^{N-1} 上の滑らかな境界を持つ有界領域とする. (1.4) を仮定し, Cauchy-Neumann 問題 (1.1)–(1.3) を考える. このとき,

$$(4.11) \quad I(\phi) \equiv \int_{\Omega} \phi(x', x_N) \cos\left(\frac{\pi}{L} x_N\right) dx' dx_N > 0$$

ならば, ある定数 D_0 が存在し,

$$B_D(\phi) \subset \Omega' \times \{0\} \subset \partial\Omega, \quad D \geq D_0$$

が成立する.

つまり、“ほとんど”の初期値 ϕ に対して、 D が十分大きくとれば、解は筒状領域 Ω の端でのみ爆発することがわかる。より一般の領域に対しては次の結果が得られる。

定理 4.2 ([14], [15] を参照.) (1.4) を仮定し、Cauchy-Neumann 問題 (1.1)–(1.3) を考える。さらに

$$(4.12) \quad P_2\phi \neq 0 \quad \text{in } \Omega$$

を仮定し、 $P_2\phi$ の最大点の集合

$$\mathcal{M}(\phi) = \{x \in \bar{\Omega} : (P_2\phi)(x) = \max_{y \in \bar{\Omega}} (P_2\phi)(y)\}$$

を定義する。このとき、

$$(4.13) \quad \lim_{D \searrow 0} \sup_{x \in B_D(\phi)} \inf_{y \in \mathcal{M}(\phi)} |x - y| = 0$$

が成立する。

これより、“ほとんど”の初期値 ϕ に対して、 D を十分大きくとれば、解は $P_2\phi$ の最大点集合 $\mathcal{M}(\phi)$ の近くでのみ爆発することになる。

定理 4.2 より、爆発集合の位置についての情報を得るには、 $\mathcal{M}(\phi)$ の存在場所は重要である。残念ながら、 Ω が有界凸集合の場合は $\mathcal{M}(\phi) \subset \partial\Omega$ となる予想 (Hot Spots Conjecture) はあるものの、固有関数が計算できる場合や $N = 2$ の幾つかの特殊な場合について知られるのみである。また、 Ω が凸でない場合には $\mathcal{M}(\phi) \subset \Omega$ となる例が知られている。([1], [2], [16] を参照.)

また、筒状領域 (4.10) において、 $0 < L \ll 1$ かつ (4.11) の場合、集合 $\Omega' \times \{0\}$ は集合 $\mathcal{M}(\phi)$ の部分集合にはならない。これは、 $0 < L \ll 1$ のとき、関数 $\cos(\pi x_N/L)$ が第 2 Neumann 固有関数とはならないからである。この考察は、 $\mathcal{M}(\phi)$ が 2 点以上から構成される場合には、第 2 以降の固有関数の影響が現れることを示唆しているが、そのような結果は今のところない。

また、 $0 < D \ll 1$ の場合については、Mizoguchi [21], Yagisita [25] の研究により、 $\mathcal{M}(\phi)$ を初期値 ϕ の最大点の集合 $\{x \in \bar{\Omega} : \phi(x) = \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y)\}$ に代えて定理 4.2 が成立することが知られている。

5 定理の証明について

(1.1)–(1.3) の解 u は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y, Dt)\phi(y)dy + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y, D(t-s))u(y, s)^p dy ds \\ &\equiv J_1(x, t) + J_2(x, t) \end{aligned}$$

と書くことができる. ただし, G は Ω 上の Neumann heat kernel とする. ここで, λ_2 を第 2 Neumann 固有値とし, $t_D = \log D / 2\lambda_2 D$ とおく. このとき, $D \rightarrow \infty$ に対して,

$$\begin{aligned} J_1(x, t_D) &= P_1\phi + e^{-\lambda_2 D t_D} (P_2\phi)(x) + o(e^{-\lambda_2 D t_D}) \\ &= P_1\phi + D^{-1/2} (P_2\phi)(x) + o(D^{-1/2}) \end{aligned}$$

かつ $\|J_2(\cdot, t_D)\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\log D/D)$ となる. つまり, $D \rightarrow \infty$ に対して

$$u(x, t_D) = P_1\phi + D^{-1/2} (P_2\phi)(x) + o(D^{-1/2})$$

となる. 特に,

$$\lim_{D \rightarrow \infty} u(x, t_D) = P_1\phi, \quad \lim_{D \rightarrow \infty} u_t(x, t_D) = \lim_{D \rightarrow \infty} u(x, t_D)^p = (P_1\phi)^p > 0$$

が成り立つ. これが, 定理 2.1 と $D \gg 1$ の場合の 定理 3.1 を与える. さらに, 時刻 $t = t_D$ の時の解 u の値はほぼ $P_1\phi$ であるが, 最大点の位置は $P_2\phi$ で決定される. このような関係が爆発時刻の直前まで続き, 爆発時刻の直前においてこの微小の値の大小が非線形項によって拡大され, 爆発集合の位置が決定される.

6 最後に

最後に, Ω が非有界領域の場合には爆発集合はどこに存在するのか, という問題を考えてみる. 定理 4.2 は, “ほとんど” の初期値 ϕ に対して $D \gg 1$ の場合の爆発集合は熱方程式

$$\begin{cases} v_t = \Delta v & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

の解 v の時刻 t における最大点の集合 $H(t) = \{x \in \bar{\Omega} : v(x, t) = \max_{y \in \bar{\Omega}} v(y, t)\}$ の $t \rightarrow \infty$ に対する極限集合の近くに存在することを示唆している. よって, $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合, $D \gg 1$ ならば (特に $1 < p \leq 1 + 2/N$ の場合) 爆発集合は初期値の重心

$$\int_{\mathbf{R}^N} x\phi(x)dx / \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx$$

の近くに存在すると予想されるが, 今のところ不明である. それ以外の非有界領域の場合には, 例えば $\{|x| > 1\}$ のような領域でさえ, $H(t)$ の極限集合がどうなるかもわかっておらず ([17] を参照), 熱方程式を含めた今後の研究の発展が期待されるどころである.

References

- [1] R. Banūelos and K. Burdzy, On the “Hot Spot Conjecture” of J. Rauch, *Jour. Func. Anal.* 164 (1999), 1–33.
- [2] K. Burdzy and W. Werner, A counterexample to the “hot spots” conjecture, *Ann. of Math.* (1999), 309–317.
- [3] J. Bebernes and D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*, Applied Mathematical Sciences, 83. Springer-Verlag, New York (1989).
- [4] X. Y. Chen and H. Matano, Convergence, asymptotic periodicity, and finite point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations, *J. Diff. Eqns.* 78 (1989), 160–190.
- [5] K. Deng and H. A. Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel, *J. Math. Anal. Appl.* 243 (2000), 85–126.
- [6] M. Fila and P. Souplet, The blow-up rate for semilinear parabolic problems on general domains, *NoDEA Nonlinear Diff. Eqns. Appl.*, 8 (2001), 473–480.
- [7] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Tokyo Sect. IA Math.* 13 (1966), 109–124.
- [8] A. Friedman and B. McLeod, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 34 (1985), 425–447.
- [9] Y. Giga and R. V. Kohn, Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 38 (1985), 297–319.
- [10] Y. Giga and R. V. Kohn, Characterizing blow-up using selfsimilarity variables, *Indiana Univ. Math. J.* 36 (1987), 1–40.
- [11] Y. Giga and R. V. Kohn, Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 42 (1989), 845–884.
- [12] K. Ishige, Blow-up time and blow-up set of the solutions for semilinear heat equations with large diffusion, *Adv. Diff. Eqns.* 8 (2002), 1003–1024.
- [13] K. Ishige and N. Mizoguchi, Blow-up behavior of solutions for semilinear heat equations with boundary conditions, *Diff. Integ. Eqns.* 16 (2003), 663–690.

- [14] K. Ishige and N. Mizoguchi, Location of blow-up set for a semilinear parabolic equation with large diffusion, *Math. Ann.* 327 (2003), 487–511.
- [15] K. Ishige and H. Yagisita, Blow-up profile of a solution for a nonlinear heat equation with large diffusion, preprint.
- [16] D. Jerison and N. Nadirashvili, The “hot spots” conjecture for domains with two axes of symmetry, *J. Amer. Math. Soc.* 13 (2000), 741–772.
- [17] S. Jimbo and S. Sakaguchi, Movement of hot spots over unbounded domains in \mathbf{R}^N , *J. Math. Anal. Appl.* 182 (1994), 810–835.
- [18] H. A. Levine, The role of critical exponents in blowup theorems, *SIAM Rev.* 32 (1990), 262–288.
- [19] F. Merle, Solution of a nonlinear heat equation with arbitrarily given blow-up points, *Comm. Pure Appl. Math.* 45 (1992), 263–300.
- [20] N. Mizoguchi, Blowup rate of solutions for a semilinear heat equation with the Neumann boundary condition, to appear in *J. Diff. Eqns.*
- [21] N. Mizoguchi, Location of blowup points of solutions for a semilinear parabolic equation, preprint.
- [22] N. Mizoguchi and E. Yanagida, Life span of solutions for a semilinear parabolic problem with small diffusion, *J. Math. Anal. Appl.* 261 (2001), 350–368.
- [23] N. Mizoguchi and E. Yanagida, Life span of solutions with large initial data in a semilinear parabolic equation, *Indiana Univ. Math. J.* 50 (2001), 591–610.
- [24] J. J. L. Velázquez, Estimates on the $(n - 1)$ -dimensional Hausdorff measure of the blow-up set for a semilinear heat equation, *Indiana Univ. Math. J.*, 42 (1993), 445–476.
- [25] H. Yagishita, Blow-up profile of a solution for a nonlinear heat equation with small diffusion, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*

Asymptotic behavior of some global solutions for nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity

石渡 通徳* 早稲田大学理工学部

1 Introduction and Main Results

本稿では次の非線型放物型方程式のある種の解の漸近挙動を考察する：

$$(P) \quad \begin{cases} du/dt = \Delta_p u + u|u|^{q-2} & \text{in } \Omega \times (0, T_m), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, T_m), \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \times [0, T_m), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

ここで $N \geq 2$, $p \in (1, N)$, $q \in (p, p^*]^1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, $u_0 \in X := D_0^{1,p}(\Omega)^2 \cap L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ かつ T_m は (P) の強解 (意味については (1.5), (1.6) を見よ) の最大存在時刻を表すとす。以下では主に $q = p^*$ かつ $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合を扱う。この場合境界条件は空間無限遠での条件と解釈する。

$\|\cdot\|_{r,\Omega}$ で $L^r(\Omega)$ -norm を表す。混乱のないときは添え字の Ω を略す。

$S := \inf_{D_0^{1,p} \setminus \{0\}} \|\nabla u\|_p^p / \|u\|_q^q$ を Sobolev embedding $D_0^{1,p} \hookrightarrow L^q$ の最良定数³として以下の諸量を定義する：

$$J(u) := \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{q} \|u\|_q^q, \tag{1.1}$$

$$I(u) := -\|\nabla u\|_p^p + \|u\|_q^q, \tag{1.2}$$

*Department of Mathematical Sciences, Graduate School of Science and Engineering, Waseda University, 169-8555, 4-1 Okubo 3-chome, Sinjyuku-ku, Tokyo, Japan.

¹ $p^* := Np/(N-p)$ は Sobolev embedding $D_0^{1,p} \hookrightarrow L^q$ の臨界指数を表す。

² $D_0^{1,p} := \overline{C_0^\infty}^{\|\nabla \cdot\|_p}$.

³例えば $q = p^*$ かつ $\Omega = \mathbb{R}^N$ である場合や $q \in (p, p^*]$ かつ Ω が有界領域である場合には S は well-defined である。

$$W := \left\{ u \in X; J(u) < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) S^{q/(q-p)}, I(u) < 0 \right\}, \quad (1.3)$$

$$V := \left\{ u \in X; J(u) < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) S^{q/(q-p)}, I(u) > 0 \right\}. \quad (1.4)$$

任意の $T \in (0, T_m)$ について

$$\Delta_p u, u|u|^{q-2} \in L^2(0, T; L^2), \quad (1.5)$$

$$u \in W^{1,2}(0, T; L^2) \cap C([0, T]; D_0^{1,p}) \cap L^\infty(0, T; L^\infty) \quad (1.6)$$

を満たし、かつ L^∞ の意味での blow up alternative

$$T_m < \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\|_\infty = \infty \quad (1.7)$$

を満たす (P) の強解 u の構成法はいくつか知られている (例えば [1] を見よ). 本稿ではこのような解のうち、ある時刻に W に入る解の挙動について考察する.

(P) は様々な現象を記述する非線型放物型方程式の 1 つの典型例を与えるため、解のありえる挙動とその挙動を与えるメカニズムを全て分析しておくことは、非線型放物型方程式の解の挙動として観察される典型的な現象にどのようなものがあるのかを理解するという観点から重要である. このようなこともあり (主に $p = 2$ の場合に対する) (P) の解の挙動に関しては現在まで非常に多くの研究がなされてきた. これらの結果を総合すると、解の挙動は大きく分けて次の 3 種に分類されることがわかってきている⁴ (既存の結果はほとんどが $p = 2$ に対するものなのでそれに対応する記号を用いる):

1. 初期値 u_0 が「小さい」ときは解の挙動は $u_t = \Delta u$ に「ほぼ」支配される. 特に解は時間大域的に存在し (i.e., $T_m = \infty$), 0 に近づく.
2. 初期値 u_0 が「大きい」ときは解の挙動は $u_t = u|u|^{q-2}$ に「ほぼ」支配される. 特に解は有限時間で爆発する (i.e., $T_m < \infty$).
3. 初期値が 1, 2 の「境界」に位置するときは、解は borderline behavior を呈する. 多くの場合 (例えば $p = 2, q \in (2, 2^*)$, Ω が有界領域の場合) 解は時間大域的に存在し、適当な時間列にそって定常解に近づく⁵.

⁴なお 1-3 の statement に現れる「近づく」、「爆発する」といった言葉は、それが数学的にどのような意味なのかを明確にしない限り単に気分を表す語に過ぎない. この意味で (P) に関して明らかにすべきことはまず、解に関する各種の norm がどのような振る舞いを見せるかということである. また、(P) は (有限次元でなく) 無限次元力学系を定義し、無限次元空間では各種の位相はもはや同値でないことを考えるなら、できるだけ多くの関数空間の norm についてそれがどのような振る舞いをするか明らかにし、かつ解の挙動を記述するのに最も特徴的な関数空間は何かを把握することが重要である.

⁵1, 2 の挙動は方程式の右辺の形からある程度予測されることである. 1 は本質的に主要部の線型構造が系をコントロールする場合、2 は本質的に系が摂動項に関係する常微分方程式に支配される場合であるともいえる. いずれの場合も解の generic な挙動を明らかにするという観点からは重要であるが、3 の挙動をする解も (P) のもつ非線型無限次元力学系としての独自性を反映するものであるという観点からは重要である. もし 1, 2 以外の解の挙動で、「定常解に近づく」という有限次元力学系でも観察される現象以外の挙動があり得るなら、それは真に無限次元的な現象であるわけで、興味深いものといえる.

特に初期値が W に入るくらい「小さい」ならば対応する解は 1 の挙動を示し、初期値が V に入るくらい「大きい」ならば対応する解は 2 の挙動を示すことが知られている。この観点から、 W は stable set, V は unstable set と呼ばれる (この辺のその他の事項, 研究の歴史については例えば [2] とその参考文献を参照せよ)。

本稿ではこのうち 1 の範疇の解の挙動について扱う。

上に述べたことに関連して, semilinear, subcritical case に関する以下の事実はよく知られている (例えば [2] とその参考文献を見よ) :

Proposition 1.1 $p = 2, q \in (2, 2^*)$ かつ Ω を有界領域とする。このとき

$$(*) \quad \exists \bar{t} \text{ s.t. } u(\bar{t}) \in W \Rightarrow T_m = \infty, u(t) \rightarrow 0 \text{ in } H_0^1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

が成立する。 ■

一方 semilinear, critical case については以下が知られている [3] :

Proposition 1.2 $p = 2, q = 2^*$ かつ Ω を有界領域とする。このとき

$$(**) \quad \exists \bar{t} \text{ s.t. } u(\bar{t}) \in W, T_m = \infty \Rightarrow u(t) \rightarrow 0 \text{ in } H_0^1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

が成立する。 ■

ここで一見テクニカルな問題として, $(*)$, $(**)$ の間には主張 “ $T_m = \infty$ ” の扱いについて差異があることに気づく⁶。すなわち $(*)$ では “ $T_m = \infty$ ” は結論にあるが, $(**)$ では仮定にある。本稿の主結果は, この差異に関するものであるともいえる。以下の結果を得た。

Theorem 1.1 $p \in (1, N), q = p^*$ かつ $\Omega = \mathbb{R}^N$ とする。このとき

$$\exists \bar{t} \text{ s.t. } u(\bar{t}) \in W \Rightarrow T_m = \infty, \tag{1.8}$$

$$u(t) \in W \cup \{0\}, \quad \forall t \in [\bar{t}, \infty), \tag{1.9}$$

$$u(t) \rightarrow 0 \text{ in } L^r, \quad \forall r \in (2, \infty], \tag{1.10}$$

$$u(t) \rightarrow 0 \text{ in } D_0^{1,p}, \tag{1.11}$$

$$J(u(t)) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \tag{1.12}$$

が成立する。 ■

Remark 1.1 領域を \mathbb{R}^N に限ったのは議論を簡単にするためであり, 一般の領域 Ω 上でも $\partial\Omega$ に関するしかるべき仮定のもと Theorem 1.1 の結論は成り立つ。特に $p = 2$ かつ Ω が滑らかな有界領域である場合には, Theorem 1.1 の結論は成立する。この場合は本稿の議論に加え, 領域の境界に関わる議論 (例えば [4] を見よ) を行う必要がある。

⁶Theorem 1.1 の証明および Proposition 1.1, Proposition 1.2 の証明を比べれば, この差異は決してテクニカルなものでなく critical case と subcritical case における (P) のもつ scale 変換の元での不変性に関する構造が本質的に違うことに起因することがわかるであろう。

Remark 1.2 Theorem 1.1 の成立をいうには、ある時刻に stable set に入る解に関する L^∞ -有界性を得ることが重要であるが、subcritical case について有効であった Giga [4] による blow up argument は critical case に対しては直接は有効ではない。本稿では [4] による blow up argument と energy argument を併用して L^∞ -有界性を得る。特に scaling 後の極限関数の特徴づけを得るためには concentration-compactness type argument を用いる (Proposition 2.5)。また漸近挙動を解析する際、領域の非有界性から生じる困難を克服するために L^2 -norm を正規化する scaling argument が必要になる (Proposition 2.6)。

2 Preliminaries

本節では Theorem 1.1 の証明に必要となる tools を準備する。本節では断らない限り $\Omega = \mathbb{R}^N$ かつ $q = p^*$ とする。また「(P) の (強) 解」というときには (1.5)-(1.6) を満たす (P) の解を表すとす。

Basic properties of solutions of (P) (P) の解について成立する基本事項から始める。

Proposition 2.1

u を (P) の解とする。このとき $J(u(t))$ は t に関して非増加かつ、任意の $0 < a < b < T_m$ について

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(a,b;L^2)}^2 = -J(u(b)) + J(u(a)) \quad (2.1)$$

が成立する。 ■

Proof of Proposition 2.1.

(P) の両辺に $du(t)/dt$ をかけ、領域上で積分して

$$\left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_2^2 = -\frac{d}{dt} J(u(t)) \quad (2.2)$$

を得る。これより $J(u(t))$ は t に関して非増加である。また (2.2) を t に関して (a, b) 上で積分して (2.1) を得る。以上の議論は形式的なものであるが、(1.5)-(1.6) を満たす (P) の解については正当化できる⁷。 ■

⁷本稿の議論は全て Proposition 2.1 の成立が前提である。従って本稿の内容の成立には、Proposition 2.1 の証明が正当であること、特に「方程式に du/dt をかけることが出来ること」が必要である。しかし方程式の右辺はともかく、左辺に現れる du/dt 同志の積には du/dt の属する空間が Hilbert 空間 (つまり内積構造がある空間) でない限り数学的意味がつかない。従って、本稿の議論を行うためには (P) の解は (Banach 空間上の弱解ではなく) Hilbert 空間上の強解の意味で構成されている必要がある。このように一見「数学的」に見える「どの空間で解を構成すべきか」という問題は、「どのような操作が解に対して許されるか」に直結しており、「解はあるんだから意味はどうでもよい」というわけには行かないのである。なおこの点に関しては早稲田大学の赤木剛朗氏との議論から多くの教示を得た。

Scaling property [4] の blow up argument を用いる際には, 解に関する各種 norm が時刻, 空間変数に関する scaling に関してどのような不変性を持つかが重要になる. ここではこのことについて纏める. いずれも直接計算で示せるので証明は省略する.

u を (P) の解, $\lambda > 0$,

$$\alpha := \frac{p(q-2)}{q-p}, \quad (2.3)$$

$$\beta := \frac{p}{q-p} \quad (2.4)$$

とする. 特に $q = p^*$ の場合には $\alpha = [p(N+2) - 2N]/p$, $\beta = (N-p)/p$ であることに注意する. $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$ に対し v, y, s を

$$y := \lambda(x - x_0), \quad (2.5)$$

$$s := \lambda^\alpha(t - t_0), \quad (2.6)$$

$$\lambda^\beta v(y, s) := u(x, t) \quad (2.7)$$

とする.

Proposition 2.2

任意の $\delta > 0$ について

$$\frac{dv}{ds} = \Delta_p v + v|v|^{q-2} \text{ in } (y, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, \delta] \quad (2.8)$$

$$\iff \frac{du}{dt} = \Delta_p u + u|u|^{q-2} \text{ in } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [t_0, t_0 + \delta/\lambda^\alpha] \quad (2.9)$$

が成立する. ■

Proposition 2.3

$q = p^*$ ならば

$$\left\| \frac{dv}{ds} \right\|_{L^2(0, \delta; L^2(\mathbb{R}^N))} = \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(t_0, t_0 + \delta/\lambda^\alpha; L^2(\mathbb{R}^N))}, \quad (2.10)$$

$$\|\nabla v\|_p = \|\nabla u\|_p, \quad (2.11)$$

$$\|v\|_q = \|u\|_q \quad (2.12)$$

が成立する. 特に

$$J(v(s)) = J\left(u\left(t_0 + \frac{s}{\lambda^\alpha}\right)\right) \quad (2.13)$$

が成立する⁸. ■

⁸(P) の scaling (2.5)-(2.7) のもとでの不変性は $q = p^*$ でなくても常に成立する (そのように α ,

Compactness devices [4]にある, scaling (2.5)-(2.7) を用いた blow up argument を行う際には, scaling 後の関数列の収束先の特徴づけが必要になる. [4]にあるように, $p = 2$ の場合にはこれは Schauder type estimate を用いてなされるが, 一般の p に対しては Schauder type estimate がどの程度成立するか必ずしも明らかではない. 本稿ではその代わりに以下の 2 つの compactness device を用いることにする.

Proposition 2.4

(u_n) を time interval $[0, \delta]$ 上で定義された (P) の解の族で, ある $0 < \underline{c} < \bar{c}$ について

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,\delta;L^\infty)} \in [\underline{c}, \bar{c}] \tag{2.14}$$

を満たすものとする. このときある $u \in C((0, \delta) \times \Omega)$ が存在して,

$$u_n \rightarrow u \text{ locally uniformly in } \Omega \times (0, \delta] \tag{2.15}$$

が成立する. ■

Proposition 2.4 は (2.14) と, p -Laplacian を主要項に持つ inhomogeneous parabolic equation の解に関する Hölder 評価 [5, pp.41, Theorem 1.1, pp.77, Theorem 1.1] を用いて [4] に類似した議論を行うことにより得られる. 詳細は省略する.

Lemma 2.1

Proposition 2.4 の仮定に加えて

$$\left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{L^2(0,\delta;L^2)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \tag{2.16}$$

であるとする. このとき Proposition 2.4 の結論にある u は t -independent である. ■

Proof of Lemma 2.1.

任意の $t, s \in (0, \delta]$ と $R > 0$ をとる ($t < s$ とする). このとき

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\|_{2,B_R} &\leq \|u(t) - u_n(t)\|_{2,B_R} + \left\| \int_s^t d\sigma \frac{du_n}{d\sigma} \right\|_{2,B_R} \\ &\quad + \|u(s) - u_n(s)\|_{2,B_R} \\ &\leq 2 \max_{[t,\delta] \times \overline{B_R}} |u_n - u| |B_R|^{1/2} + \sqrt{|t - s|} \left\| \frac{du_n}{d\sigma} \right\|_{L^2(0,\delta;L^2)} \\ &=: (A) + (B) \end{aligned} \tag{2.17}$$

β を決めたとってもよい). しかし $D_0^{1,p}$ 及び L^q -norm の不変性 (従って特に energy functional J の scale 変換不変性) は $q = p^*$ の場合に限ってのみ成立する. すなわち, critical, subcritical case を問わず (P) は scaling (2.5)-(2.7) の元で不変であるが, critical case の場合に限りさらに (P) に付随する “energy structure” も不変になる. この scale 不変性 (により保障される critical case でのみ許される定常解の存在) により, subcritical case でうまくいった [4] の議論は critical case ではうまくいかない. 本稿では stable set に入る解に関しては critical case 独自の事情すなわち energy structure の scale 変換不変性を用いることで解の L^∞ -有界性が得られることを報告する.

である⁹. ここで (2.15), (2.16) より

$$(A) \rightarrow 0, \quad (B) \rightarrow 0 \quad (2.18)$$

as $n \rightarrow \infty$ である. よって (2.17) より

$$u(t) = u(s) =: u \text{ in } L^2(B_R), \quad \forall R > 0, \quad \forall t, s \in (0, \delta] \quad (2.19)$$

が従う. ■

Lemma 2.2

$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ が $0 \leq \eta \leq 1$ かつ

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \geq 2, \\ 1 & \text{if } t \leq 1 \end{cases}$$

を満たすとする. $a \in \mathbb{R}^+$ に対して $\varphi_a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ を

$$\varphi_a(x) := \eta\left(\frac{|x|}{a}\right) \quad (2.20)$$

で定義する. このとき

$$\|\nabla \varphi_a\|_N \leq C \|\eta'\|_\infty \quad (2.21)$$

が成立する. ただし C は a によらない定数である. ■

一般に $\|\nabla \varphi_a\|_r$ は a に依存するが, $r = N$ の時に限り a に依存しないという主張である. 証明は容易なので略す.

Proposition 2.5

$(u_n) \subset D_0^{1,p}$ は

$$(u_n) : \text{bounded in } L^\infty \text{ and } D_0^{1,p}, \quad (2.22)$$

$$\Delta_p u_n + u_n |u_n|^{q-2} \rightarrow 0 \text{ in } L^2 \quad (2.23)$$

を満たすとする. このときある $u \in D_0^{1,p}$ があって

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } D_0^{1,p}, \quad (2.24)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ strongly in } L_{\text{loc}}^q \quad (2.25)$$

が成立する. 特に

$$u_n \rightarrow u \text{ a.e.} \quad (2.26)$$

である. また

$$u = 0 \quad \text{or} \quad \|u\|_q^q \geq \|\nabla u\|_p^p \geq S^{q/(q-p)} \quad (2.27)$$

が成立する. ■

⁹ B_R は半径 R の開球を表す.

Proof of Proposition 2.5.

(u_n) を仮定を満たす列とする. このときある $C_1, C_2 > 0$ があって

$$\|\nabla u_n\|_p < C_1, \quad (2.28)$$

$$\|u_n\|_\infty < C_2, \quad (2.29)$$

$$f_n := \Delta_p u_n + u_n |u_n|^{q-2} \rightarrow 0 \text{ in } L^2 \quad (2.30)$$

である. φ_ε を Lemma 2.2 にある関数とし, $\varphi_{\varepsilon, x_j}(\cdot) := \varphi_\varepsilon(\cdot - x_j)$ とする.

(2.28) と second concentration-compactness lemma ([6], [7], [8, pp.44]) を見よ. また [9] も参照されたい) より, ある高々可算集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^N$, $(\nu_{x_j}, \mu_{x_j})_{x_j \in \mathcal{S}} \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$, $u \in D_0^{1,p}$, $\nu, \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ ¹⁰ があって (u_n) の部分列 (同じ記号で書く) に対して

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly in } D_0^{1,p}, L^q \quad (2.31)$$

$$|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \mu_{x_j} \delta_{x_j} \text{ weakly in } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \quad (2.32)$$

$$|u_n|^q \rightharpoonup \nu = |u|^q + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \nu_{x_j} \delta_{x_j} \text{ weakly in } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \quad (2.33)$$

$$\mu_{x_j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^p \varphi_{\varepsilon, x_j}, \quad (2.34)$$

$$\nu_{x_j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |u_n|^q \varphi_{\varepsilon, x_j} \quad (2.35)$$

が成立する. また (2.31) と Rellich の定理より

$$u_n \rightarrow u \text{ strongly in } L_{loc}^p \quad (2.36)$$

が成立する.

ここで (2.29), (2.35) より

$$\begin{aligned} \nu_{x_j} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |u_n|^q \varphi_{\varepsilon, x_j} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} C_2^q |B(x_j; 2\varepsilon)| = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

が成立する¹¹. 従って (2.31), (2.33) より

$$u_n \rightarrow u \text{ strongly in } L_{loc}^q \quad (2.38)$$

が成立する.

任意の $R > 0$ に対し, φ_R を Lemma 2.2 にある関数とする. $\int (2.30) \times u_n \varphi_R$ を計算する:

$$\int f_n u_n \varphi_R = \int \Delta_p u_n (u_n \varphi_R) + \int u_n |u_n|^{q-2} u_n \varphi_R \quad (2.39)$$

¹⁰ $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ は \mathbb{R}^N 上の Radon measure 全体からなる集合を表す.

¹¹ $B(x_j; 2\varepsilon)$ は中心が x_j , 半径が 2ε の開球を表す.

より

$$\begin{aligned} \int |\nabla u_n|^p \varphi_R &= \int |u_n|^q \varphi_R - \int |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi_R u_n \\ &\quad - \int f_n u_n \varphi_R \end{aligned} \quad (2.40)$$

が成立する.

ここで $q = p^*$ であることに注意すると $(p-1)/p + 1/q + 1/N = 1$ であるので, Hölder の不等式を $L^{p/(p-1)}-L^q-L^N$ に対して用いると

$$\begin{aligned} |\text{RHS 2nd of (2.40)}| &\leq \int |\nabla u_n|^{p-1} |u_n| |\nabla \varphi_R| \\ &\leq \|\nabla u_n\|_p^{p-1} \|u_n\|_{q, A_R} \|\nabla \varphi_R\|_N \end{aligned} \quad (2.41)$$

が成立する¹². (2.28) と Lemma 2.2 より R によらないある $C > 0$ が存在して

$$(2.41) \leq C \|u_n\|_{q, A_R} \quad (2.42)$$

が成立する. (2.42), (2.38) より

$$\begin{aligned} |\text{RHS 2nd of (2.40)}| &\leq C \|u_n\|_{q, A_R} \\ &\rightarrow C \|u\|_{q, A_R} \text{ as } n \rightarrow \infty \\ &\rightarrow 0 \text{ as } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.43)$$

が成立する¹³.

また (2.29), (2.30) より

$$\begin{aligned} |\text{RHS 3rd of (2.40)}| &\leq \|f_n\|_2 \|\varphi_R\|_2 \|u_n\|_\infty \\ &\rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \\ &\equiv 0 \text{ as } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.44)$$

が成立する.

(2.40), (2.43), (2.44) より

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^p \varphi_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |u_n|^q \varphi_R \quad (2.45)$$

を得る. 一方 (2.32), (2.33), (2.37) より

$$\int |\nabla u_n|^p \varphi_R \rightarrow \mu(\varphi_R) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

¹² $A_R = \{x; R < |x| < 2R\}$ とおいた.

¹³Lemma 2.2 によれば $\|\nabla \varphi_R\|_r$ が R によらないのは $r = N$ のときに限り, また $q = p^*$ の場合に限り (2.43) の評価で φ_R の項が L^N -norm で現れ全てがうまくいく (subcritical case ではこのようなことは起こらない).

$$\begin{aligned} &\geq \int |\nabla u|^p \varphi_R + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} \mu_{x_j} \varphi(x_j) \geq \int |\nabla u|^p \varphi_R \\ &\rightarrow \|\nabla u\|_p^p \text{ as } R \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \int |u_n|^q \varphi_R &\rightarrow \nu(\varphi_R) \text{ as } n \rightarrow \infty \\ &= \int |u|^q \varphi_R + \sum_{x_j \in \mathcal{S}} 0 \times \varphi(x_j) \\ &\rightarrow \|u\|_q^q \text{ as } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.47)$$

が従う. (2.46), (2.45), (2.47) より

$$\|\nabla u\|_p^p \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^p \varphi_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |u_n|^q \varphi_R = \|u\|_q^q \quad (2.48)$$

を得る. これと Sobolev の不等式より $S\|u\|_q^p \leq \|u\|_q^q$ である. これより $u \neq 0$ ならば $\|u\|_q^q \geq S^{q/(q-p)}$ を得, 再び Sobolev の不等式より $\|\nabla u\|_p^p \geq S^{q/(q-p)}$ を得る. ■

Some properties of global solutions $p = 2, q \in (2, 2^*)$ かつ Ω が有界領域の場合, (P) の時間大域解について L^q -有界性から H_0^1 -有界性を得る典型的な議論は次のようなものである (例えば [10] を見よ). まず Ω は有界領域なので

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ continuously} \quad (2.49)$$

であるから解の L^q -有界性から L^2 -有界性が得られる. また $q \in (2, 2^*)$ であることから若干の議論ののちに $\|du(t)/dt\|_2 \rightarrow 0$ もいえる. 従って (P) の両辺に $u(t)$ をかけ空間領域上で積分して得られる式を用いて

$$\left| -\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_q^q \right| \leq \|du(t)/dt\|_2 \|u(t)\|_2 \rightarrow 0 \quad (2.50)$$

と評価することにより, 解の L^q -有界性から H_0^1 -有界性が得られる. 非有界領域については (2.49) が正しくないので, このような議論は成立しない. しかし critical case については, norm の scale 不変性を用いることにより, 適当な時間列をとれば (L^2 -有界性は不明であるものの) (2.50) に相当する事実を以下のように示せる.

Proposition 2.6

$$T_m = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} J(u(t)) > -\infty \quad (2.51)$$

とする. このときある $t_n \rightarrow \infty$ が存在して

$$\|\nabla u(t_n)\|_p^p = \|u(t_n)\|_q^q + o(1) \quad (2.52)$$

が成立する. 特にある C があって

$$\|\nabla u(t_n)\|_p, \|u(t_n)\|_q < C \quad (2.53)$$

かつ

$$J(u(t_n)) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|\nabla u(t_n)\|_p^p + o(1) \quad (2.54)$$

$$= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u(t_n)\|_q^q + o(1) \quad (2.55)$$

$$\geq 0 \quad (2.56)$$

が成立する. ■

Proof of Proposition 2.6.

任意の $t_n \rightarrow \infty$ をとる.

(2.3), (2.4) を満たす α, β と

$$\lambda_n^\alpha = \frac{1}{\|u(t_n)\|_2^2} \quad (2.57)$$

を満たす λ_n に対して,

$$y := \lambda_n x, \quad s := \lambda_n^\alpha (t - t_n), \quad \lambda_n^\beta u_n(y, s) := u(x, t) \quad (2.58)$$

とする. このとき (2.57) より

$$\|u_n(0)\|_2^2 = \lambda_n^\alpha \|u(t_n)\|_2^2 = 1 \quad (2.59)$$

であることに注意する.

Proposition 2.1, Proposition 2.3 と (2.51) より

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du_n}{d\sigma} \right\|_{L^2(0, \delta; L^2)} &= -J(u_n(\delta)) + J(u_n(0)) \\ &= -J(u(t_n + \delta/\lambda_n^\alpha)) + J(u(t_n)) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

に注意する.

(2.60) より任意の $\delta > 0$ と $s \in [0, \delta]$ について

$$\begin{aligned} \|u_n(s) - u_n(0)\|_2 &\leq \int_0^s \left\| \frac{du_n}{d\sigma} \right\|_2 \leq \sqrt{\delta} \left\| \frac{du_n}{d\sigma} \right\|_{L^2(0, \delta; L^2)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

を得る. 従って (2.59) とあわせて, ある $\delta > 0$ があって十分大きい n について

$$\|u_n(s)\|_2^2 \leq 2\|u_n(0)\|_2^2 = 2, \quad \forall s \in [0, \delta] \quad (2.62)$$

が成立する.

また (2.60) よりある $\eta \in [0, \delta]$ があって

$$\left\| \frac{du_n(\eta)}{d\sigma} \right\|_2 \rightarrow 0 \quad (2.63)$$

が成立する. (2.62), (2.63) より

$$\begin{aligned} | - \|\nabla u_n(\eta)\|_p^p + \|u_n(\eta)\|_q^q | &\leq \|u_n(\eta)\|_2 \left\| \frac{du_n(\eta)}{d\sigma} \right\|_2 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

である. よって

$$t'_n := t_n + \frac{\eta}{\lambda_n^\alpha} \quad (2.65)$$

に対して Proposition 2.3 と (2.64) より

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t'_n)\|_p^p &= \|\nabla u_n(\eta)\|_p^p = \|u_n(\eta)\|_q^q + o(1) \\ &= \|u(t'_n)\|_q^q + o(1) \end{aligned} \quad (2.66)$$

を得, (2.52) が従う. これと Proposition 2.1 より

$$\begin{aligned} \infty > J(u_0) \geq J(u(t'_n)) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|\nabla u(t'_n)\|_p^p + o(1) \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u(t'_n)\|_q^q + o(1) \end{aligned} \quad (2.67)$$

であるので, (2.53)-(2.56) が従う. ■

Properties of the orbit which enters the stable set ある時刻に stable set に入る解に対して成立する基本事項をまとめる. まず次の事実は semilinear case ではよく知られた事実である.

Proposition 2.7

ある \bar{t} があって $u(\bar{t}) \in W$ ならば, 任意の $t \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(t) \in W \cup \{0\}$ が成立する. ■

証明は semilinear case とほとんど同じなので略す (例えば [10], [11] を見よ).

Proposition 2.8

ある $\bar{t} \in (0, T_m)$ があって任意の $t \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(t) \in W \cup \{0\}$ とする. このとき以下が成立する.

(a) ある $c \geq 0$ があって

$$J(u(t)) \downarrow c \quad \text{as } t \rightarrow T_m \quad (2.68)$$

が成立する.

(b) 任意の $t \in [\bar{t}, T_m)$ について

$$\|\nabla u(t)\|_p^p, \|u(t)\|_q^q < S^{q/(q-p)} \quad (2.69)$$

が成立する. ■

Proof of Proposition 2.8.

(a) 任意の $t \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(t) \in W$ とする. このとき W の定義より $I(u(t)) = -\|\nabla u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_q^q < 0$ なので

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) S^{q/(q-p)} &> J(u(t)) = \frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p - \frac{1}{q} \|u(t)\|_q^q \\ &> \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u(t)\|_q^q \geq 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

が成立する. また $J(u(\cdot))$ は非増加ゆえ, 結論が従う.

ある $\hat{t} \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(\hat{t}) = 0$ とする. このとき $W \cap V = \emptyset$ であること, $J(u) < 0$ ならば $u \in V$ であること及び $J(u(\cdot))$ の非増加性から

$$J(u(t)) = 0, \quad \forall t \in [\hat{t}, T_m) \quad (2.71)$$

が従う. (2.71) の両辺を t で微分し (P) を用いると $du(t)/dt = 0$ in L^2 を得るので

$$u(t) = 0, \quad \forall t \in [\hat{t}, T_m) \quad (2.72)$$

が成立する. これより結論が従う.

(b) 任意の $t \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(t) \in W$ とすると (2.70) より $\|u(t)\|_q^q < S^{q/(q-p)}$ であるので, これより

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|_p^p &= pJ(u(t)) + \frac{p}{q} \|u(t)\|_q^q \\ &< p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) S^{q/(q-p)} + \frac{p}{q} S^{q/(q-p)} \\ &= S^{q/(q-p)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

を得る. またある $\hat{t} \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(\hat{t}) = 0$ とすると (2.71) より結論は自明. ■

3 Proof of Main Theorem

Theorem 1.1 の証明を与える. Proposition 3.1 で (1.8), (1.9) と (1.10) の $r = \infty$ の場合を示し, Proposition 3.2 で残りの statement を示す.

Proposition 3.1

ある \bar{t} があって $u(\bar{t}) \in W$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\|_\infty = 0 \quad (3.1)$$

が成立する. 特に

$$T_m = \infty, \quad (3.2)$$

$$u(t) \in W \cup \{0\}, \quad \forall t \in [\bar{t}, \infty) \quad (3.3)$$

である. ■

Proof of Proposition 3.1.

Proposition 2.7 より仮定の元で

$$u(t) \in W \cup \{0\}, \quad \forall t \in [\bar{t}, T_m) \quad (3.4)$$

が成立する.

ある $\hat{t} \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(\hat{t}) = 0$ ならば (2.72) より (3.1) を得る. これと (1.7), (3.4) より (3.2), (3.3) が従う.

以下任意の $t \in [\bar{t}, T_m)$ について $u(t) \in W$ とする. (3.1) が成立しない, すなわちある $\eta \in (0, \infty]$ があって

$$\limsup_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\|_\infty = \eta \quad (3.5)$$

が成立するとして矛盾を導く.

Step 1. Construction of a suitable sequence.

Case 1. $\eta = \infty$ の場合

$$\lim_{\tau \rightarrow T_m} \sup_{t \geq \tau} \|u(t)\|_\infty = \infty \quad (3.6)$$

とする.

任意の $n \in \mathbb{N}$ について $u \in L^\infty(0, T_m - 1/n; L^\infty)$ より

$$\|u(t_n)\|_\infty \geq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T_m - 1/n]} \|u(t)\|_\infty \quad (3.7)$$

を満たす $(t_n) \subset [0, T_m - 1/n]$ が存在する. このとき以下が成立する. 直観的には明らかなので証明は省く.

Claim 1.

$$t_n \rightarrow T_m, \quad (3.8)$$

$$\|u(t_n)\|_\infty \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

$$\|u(t_n)\|_\infty \geq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, t_n]} \|u(t)\|_\infty \quad (3.10)$$

が成立する. ■

Case 2. $\eta < \infty$ の場合

$$\limsup_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\|_\infty = \eta < \infty \quad (3.11)$$

とする. このときある $\tau > 0$ があって

$$\sup_{[\tau, T_m]} \|u(\cdot)\|_\infty < 2\eta, \quad \sup_{[0, \tau]} \|u(\cdot)\|_\infty < \|u\|_{L^\infty(0, \tau; L^\infty)} < \infty \quad (3.12)$$

であるから (1.7) より $T_m = \infty$ が従う.

(3.11) よりある τ_n があって,

$$\tau_n \rightarrow T_m = \infty, \quad (3.13)$$

$$\sup_{[\tau_n, \infty)} \|u(\cdot)\|_\infty \in (\eta - 1/(2n), \eta + 1/(2n)) \quad (3.14)$$

である. よってある $t_n \in [\tau_n, \infty)$ があって

$$\|u(t_n)\|_\infty \rightarrow \eta \quad (3.15)$$

が成立する. (3.13) より

$$t_n \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

としてよい. このとき明らかに以下が成立する.

Claim 2.

ある $C > 0$ があって,

$$\frac{\|u(t_n + s)\|_\infty}{\|u(t_n)\|_\infty} < C, \quad \forall s \in [-1, 0], \quad \forall n \quad (3.17)$$

が成立する. ■

Step 2. Conclusion. Case 1, case 2 それぞれにおいて, (x_n) を

$$\frac{1}{2}\|u(t_n)\|_\infty \leq |u(x_n, t_n)| \quad (3.18)$$

を満たす列とする. (2.3), (2.4) にある α, β に対して, (λ_n) を

$$\|u(t_n)\|_\infty = \lambda_n^\beta \quad (3.19)$$

を満たすように定義し, また

$$y = \lambda_n(x - x_n), \quad s = \lambda_n^\alpha(t - t_n), \quad \lambda_n^\beta u_n(y, s) = u(x, t) \quad (3.20)$$

を満たすように $y, s, (u_n)$ を定義する. このとき (3.19) より

$$\|u_n(0)\|_\infty = \frac{\|u(t_n)\|_\infty}{\lambda_n^\beta} = 1 \quad (3.21)$$

である.

以下が成立する :

Claim 3.

ある $\delta > 0$ が存在して任意の n について

$$\left\| \frac{du_n}{ds} \right\|_{L^2(-1, \delta; L^2)} \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

$$\|u_n\|_{L^\infty(0, \delta; L^\infty)} \in [1, M] \text{ for some } M > 0, \quad (3.23)$$

$$|u_n(0, 0)| \geq \frac{1}{2}, \quad (3.24)$$

$$\|\nabla u_n(s)\|_p^p < S^{q/(q-p)}, \quad \forall s \in [-1, \delta] \quad (3.25)$$

が成立する. ■

Proof of Claim 3.

任意に $d > 0$ を取り, $s \in [0, d)$ とする. u_n は Proposition 2.2 より (P) を満たすことに注意する. (P) の両辺に $u_n(s)|u_n(s)|^{r-2}$ をかけ空間領域上で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \|u_n(s)\|_r^r &= -(r-1) \int |\nabla u_n(s)|^p |u_n(s)|^{r-2} + \int |u_n(s)|^{q+r-2} \\ &\leq \|u_n\|_{L^\infty(0, d; L^\infty)}^{q-2} \|u_n(s)\|_r^r \end{aligned} \quad (3.26)$$

を得る. これと Gronwall の不等式より

$$\|u_n(s)\|_r \leq \|u_n(0)\|_r e^{\|u_n\|_{L^\infty(0, d; L^\infty)}^{q-2} s}, \quad \forall s \in (0, d], \quad \forall n \quad (3.27)$$

が従う. この式において $r \rightarrow \infty$ の極限をとり (3.21) と $\|u_n\|_{L^\infty(0,d;L^\infty)}$ の d に関する単調増加性を考慮すると, ある $\delta > 0$ があって

$$\|u_n(s)\|_\infty \leq 2, \quad \forall s \in [0, \delta], \quad \forall n \quad (3.28)$$

が成立することがわかる (L^∞ -energy method of Ôtani).

また任意の $s \in [-1, 0]$ について, Case 1 では (3.10) より,

$$\begin{aligned} \|u_n(s)\|_\infty &= \frac{\|u(t_n - s/\lambda_n^\alpha)\|_\infty}{\lambda_n^\beta} = \frac{\|u(t_n - s/\lambda_n^\alpha)\|_\infty}{\|u(t_n)\|_\infty} \\ &\leq \frac{\sup_{[0, t_n]} \|u(\cdot)\|_\infty}{\|u(t_n)\|_\infty} \leq \frac{2\|u(t_n)\|_\infty}{\|u(t_n)\|_\infty} = 2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

が従う.

Case 2 でも同様の結論が Claim 2 より従う. (3.28), (3.29) より (3.23) が従う.

Case 1 では (3.9), (3.19) より

$$\lambda_n^\beta = \|u(t_n)\|_\infty \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

である. これと (3.8) より

$$t_n + \frac{\delta}{\lambda_n^\alpha} \rightarrow T_m, \quad (3.31)$$

$$t_n - \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \rightarrow T_m \quad (3.32)$$

である. また Case 2 では (3.16) より

$$t_n + \frac{\delta}{\lambda_n^\alpha} \rightarrow T_m = \infty \quad (3.33)$$

である. さらに (3.15), (3.19) より $\lambda_n^\beta = \|u(t_n)\|_\infty \rightarrow \eta$ であるので, $\lambda_n^\alpha \rightarrow \eta^{\alpha/\beta}$ が従う. これより

$$t_n - \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \geq t_n - \frac{1}{\eta^{\alpha/\beta}} + o(1) = T_m - \frac{1}{\eta^{\alpha/\beta}} + o(1) = \infty \quad (3.34)$$

である.

(3.31)-(3.34), Proposition 2.1, Proposition 2.3, Proposition 2.7, Proposition 2.8

(a) より,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du_n}{ds} \right\|_{L^2(-1, \delta; L^2)} &= -J(u_n(\delta)) + J(u_n(-1)) \\ &= -J(u(t_n + \delta/\lambda_n^\alpha)) + J(u(t_n - 1/\lambda_n^\alpha)) \\ &\rightarrow -c + c = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

であるので (3.22) が従う. また (3.20), (3.19), (3.18) より

$$|u_n(0, 0)| = \frac{|u(x_n, t_n)|}{\lambda^\beta} = \frac{|u(x_n, t_n)|}{\|u(t_n)\|_\infty} \geq \frac{1}{2} \quad (3.36)$$

であるので (3.24) が従う.

仮定と (3.31), (3.32), (3.34) および Proposition 2.7 より十分大きい n と任意の $s \in [-1, \delta]$ について $u(t_n + s/\lambda_n^\alpha) \in W$ である. よって Proposition 2.8 (b) と Proposition 2.3 より (3.25) が従う. ■

(3.22), (3.23), Proposition 2.4, Lemma 2.1 よりある $u \in C(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$u_n \rightarrow u \text{ in } C_{\text{loc}}((-1, \delta) \times \mathbb{R}^N) \quad (3.37)$$

が成立する. これと (3.24) より

$$u(0) \geq \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

である.

一方 (3.22), (3.23) よりある $\sigma \in [0, \delta/2]$ とある $C_1 > 0$ が存在して

$$\Delta_p u_n(\sigma) + u_n(\sigma)|u_n(\sigma)|^{q-2} = \frac{du_n(\sigma)}{ds} \rightarrow 0 \text{ in } L^2, \quad (3.39)$$

$$\|u_n(\sigma)\|_\infty < C_1 \quad (3.40)$$

である.

(3.25), (3.40), (3.39) と Proposition 2.5 よりある $v \in D_0^{1,p}$ があって

$$u_n(\sigma) \rightarrow v \text{ a.e.}, \quad (3.41)$$

$$u_n(\sigma) \rightarrow v \text{ in } D_0^{1,p}, \quad (3.42)$$

$$v = 0 \text{ or } \|\nabla v\|_p^p \geq S^{q/(q-p)} \quad (3.43)$$

である. (3.37), (3.41) より $u = v$ が従い, これと (3.38) より

$$v = u \neq 0 \quad (3.44)$$

である. よって (3.43) と (3.42), (3.25) より

$$S^{q/(q-p)} \leq \|\nabla v\|_p^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n(\sigma)\|_p^p < S^{q/(q-p)} \quad (3.45)$$

を得るが, これは矛盾.

従って $\limsup_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\|_\infty = 0$, 特に $\lim_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\|_\infty = 0$ である. これと (1.7), (3.4) より (3.2), (3.3) を得る. ■

Proposition 3.2

ある \bar{t} があって $u(\bar{t}) \in W$ ならば, ある $\eta \geq 0$ に対して

$$\|u(t)\|_2 \downarrow \eta \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (3.46)$$

である. また

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_r = 0, \quad \forall r \in (2, \infty], \quad (3.47)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(u(t)) = 0, \quad (3.48)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\nabla u(t)\|_p = 0 \quad (3.49)$$

が成立する. ■

Proof of Proposition 3.2.

Proposition 3.1 より仮定のもとで (3.2), (3.3) が成立する. このことと, (P) に $u(t)$ をかけ空間領域上で積分して得られる式をあわせると

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 = I(u(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [\bar{t}, \infty) \quad (3.50)$$

を得るので (3.46) が従う.

Proposition 3.1 より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_\infty = 0 \quad (3.51)$$

である. 任意の $r \in (2, \infty)$ について (3.46), (3.51) より

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_r &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} (\|u(t)\|_2^2 \|u(t)\|_\infty^{r-2})^{1/r} \\ &\leq (\|u(\bar{t})\|_2^2 \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_\infty^{r-2})^{1/r} = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

を得るので (3.47) が成立する.

また Proposition 2.6 よりある $t_n \rightarrow \infty$ があって,

$$c := \lim_{n \rightarrow \infty} J(u(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u(t_n)\|_q^q \quad (3.53)$$

を満たす. これと $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(t_n)\|_q^q = 0$ より (3.48) を得る. よって

$$\|\nabla u(t)\|_p^p = pJ(u(t)) + \frac{p}{q} \|u(t)\|_q^q \rightarrow 0 \quad (3.54)$$

が従うので (3.49) を得る. ■

参考文献

- [1] ÔTANI, M., A priori estimates for some nonlinear parabolic equations via Lyapunov functionals. *Lec. Notes in Math.* **1540**, 319-327.
- [2] IKEHATA, R., SUZUKI, T., Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type. *Hiroshima Math. J.* **26** (1996), 475-491.
- [3] IKEHATA, R., SUZUKI, T., Semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent: local and asymptotic behavior of solutions. *Diff. Int. Eq.* **13** (2000), 869-901.
- [4] GIGA, Y., A bound for global solutions of semilinear heat equations. *Comm. Math. Phys.* **103**, (1986), 415-421.
- [5] DiBENEDETTO, E., Degenerate parabolic equations. Springer-Verlag (1993).
- [6] LIONS, P.L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case. Part I. *Rev. Mat. Iberoamericano* **1.1** (1985), 145-201.
- [7] LIONS, P.L., The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case. Part II. *Rev. Mat. Iberoamericano* **1.2** (1985), 45-121.
- [8] STRUWE, M., Variational methods. Third edition. Springer-Verlag (2000).
- [9] ISHIWATA, M., ÔTANI, M., Concentration compactness principle at infinity with partial symmetry and its application. *Nonlinear Anal.* **51**, No. 3 (2002), 391-407.
- [10] ÔTANI, M., Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Qualitative Theory of Differential Equations* **30** (1980), North-Holland, Amsterdam.
- [11] TSUTSUMI, M., On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space. *Math. Japon.* **17** (1972), 173-193.

INSTABILITY OF NONRADIAL BOUND STATES FOR 2D NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

水町 徹 (横浜市立大学総合理学研究科)

1. 序文

非線形シュレディンガー方程式

$$(1) \quad \begin{cases} iu_t + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{for } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

の定常波解の不安定性について述べる。(1)は

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx, \\ Q(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx,$$

を保存量にもつ $\cdot \varphi_\omega$ ($\omega > 0$)を

$$(2) \quad \Delta \varphi - \omega \varphi + |\varphi|^{p-1} \varphi = 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^2.$$

解とするとき, $e^{i\omega t} \varphi_\omega(x)$ は(1)の定常波解とよばれる解になる $\cdot \varphi_\omega$ が ground state (正值球対称解)の場合, 定常波解 $e^{i\omega t} \varphi$ は非線形項の指数 p が $1 < p < 1 + 4/n$ ならば安定 (Cazenave-Lions '82), $p \geq 1 + 4/n$ ならば不安定 (Berestycki-Cazenave [2], Weinstein [11]) であることが知られている. さらに Grillakis [6] は φ_ω が(2)の球対称解 (ground state とは限らない) 場合に, 定常波解 $e^{i\omega t} \varphi_\omega$ が $p > 1 + 4/n$ で線形不安定であることを示した.

ここで定常波解が安定 (不安定) であることの定義を述べる.

Definition 1. $u(x, t)$ を(1)の解, $e^{i\omega t} \varphi(x)$ をその定常波解とする. このとき,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \inf_{y \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}} \|u_0 - e^{i\theta} \varphi(\cdot + y)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < \delta \implies \\ \sup_{t \geq 0} \inf_{y \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}} \|u(\cdot, t) - e^{i\theta} \varphi(\cdot + y)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon$$

であるとき, 定常波解 $e^{i\omega t} \varphi$ は (軌道) 安定であるという.

定常波解 $e^{i\omega t} \varphi$ が安定でないとき, (軌道) 不安定であるという.

以後 $n = 2$ (空間2次元) とし, (r, θ) を2次元極座標とする. $u(x, t)$ が

$$(3) \quad u(x, t) = e^{i(\omega t + m\theta)} \phi_\omega(r) \quad (m \in \mathbb{N})$$

と表される $H^1(\mathbb{R}^2)$ に属する定常波解ならば, ある正の数 α が存在し ϕ_ω は

$$(4a) \quad \phi'' + \frac{1}{r}\phi' - \left(\omega + \frac{m^2}{r^2}\right)\phi + |\phi|^{p-1}\phi = 0,$$

$$(4b) \quad \lim_{r \downarrow 0} \frac{\phi(r)}{r^m} = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\phi_r(r)}{mr^{m-1}} = \alpha,$$

$$(4c) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0,$$

をみたす. 以後(4a),(4b) をみたす解を $\phi(r, \alpha)$ と記す. Iaiia-Warchall[8] は, $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して, k -回符号変化する(4a)–(4c) の解が存在することを示した.

講演では, (4a)–(4c) の正值解が $p > 3$ で不安定であることを述べた. この結果は Grillakis の結論と同様のものであるが, (4a) の中に現れる m^2/r^2 という項の singularity が強すぎるために彼の方法は適用できない. 以下に証明の概略を述べる.

2. 正值解の一意性

Yanagida-Yotsutani[13] の方法を用いて, (4a)–(4c) の正值解の一意性を示す.

Proposition 1. *Let $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ and let $\phi(r, \alpha)$ be the solution to (4a),(4b). Then there exists a positive number α_0 satisfying the following:*

(A) *For every $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\phi(r, \alpha)$ is positive on $(0, \infty)$ and satisfies*

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \alpha) > 0.$$

(B) *For $\alpha = \alpha_0$, $\phi(r, \alpha)$ is positive on $(0, \infty)$ and decays exponentially as $r \rightarrow \infty$.*

(C) *For every $\alpha > \alpha_0$, the solution $\phi(r, \alpha)$ has a zero in $(0, \infty)$.*

証明は Hirose-Ohta [7] と同様にできる.

3. 定常波解の線形不安定性

定常波解と偏角成分が等しくなる摂動のみを考えることにする.

$$u(x, t) = e^{i(\omega t + m\theta)}(\phi_\omega(r) + e^{\lambda t}v(r))$$

とし, (1) を $v = 0$ の周りで線形化する. このとき

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} v \\ \operatorname{Im} v \end{pmatrix} = y_+ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \end{pmatrix} + y_- \begin{pmatrix} 1/2 \\ i/2 \end{pmatrix}.$$

とすると, 固有値問題

$$(4) \quad \begin{cases} (\Delta - k_+^2 + \alpha(r))y_+ + \beta(r)y_- = 0, \\ (\Delta - k_-^2 + \alpha(r))y_- + \beta(r)y_+ = 0, \end{cases}$$

を得る. ここで $k_\pm = \sqrt{\omega \mp i\lambda}$,

$$\alpha(r) = \frac{p+1}{2}\phi_\omega(r)^{p-1}, \quad \beta(r) = \frac{p-1}{2}\phi_\omega(r)^{p-1}.$$

$I_m(r), K_m(r)$ を変形ベッセル方程式

$$(5) \quad \eta_{rr} + \frac{1}{r}\eta_r - \left(1 + \frac{m^2}{r^2}\right)\eta = 0,$$

の

$$(6) \quad \begin{aligned} I_m(r) &\sim \frac{1}{2^m m!} r^m, & K_m(r) &\sim 2^{m-1} (m-1)! r^{-m} \quad (r \rightarrow 0), \\ I_m(r) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^r, & K_m(r) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \quad (r \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

をみたす解とする．このとき， ϕ_ω は $r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ で 0 に収束するので， $r \rightarrow 0$ および $r \rightarrow \infty$ において

$$\begin{aligned} (y_+, y_-) &\simeq (I_m(k_+ r), 0), & (y_+, y_-) &\simeq (0, I_m(k_- r)) \\ (y_+, y_-) &\simeq (K_m(k_+ r), 0), & (y_+, y_-) &\simeq (0, K_m(k_- r)), \end{aligned}$$

をみたす 4 つの一次独立な (4) の解が存在する．これらの解の組をそれぞれ $\{y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0\}$, $\{y_1^\infty, y_2^\infty, y_3^\infty, y_4^\infty\}$ とする． $r \rightarrow 0$ では y_1^0, y_2^0 が， $r \rightarrow \infty$ では y_3^∞, y_4^∞ が有界となり，その他のものは非有界である．従って λ が固有値であるならば， y_1^0 と y_2^0 は y_3^∞ と y_4^∞ の線形結合で表される．この性質を利用して Pego-Warchall [10] は (4) のような固有値問題に対して Evans 関数を定義している．ここでは，[10] で定義された Evans 関数 $D(\lambda)$ を用いて不安定固有値の存在を証明する． $D(\lambda)$ は

- (i) $D(\lambda)$ は $\mathbb{C}_\omega := \mathbb{C} \setminus \{it \mid |t| \geq \omega^{\frac{1}{2}} \text{ with } t \in \mathbb{R}\}$ 上で定義された解析関数，
- (ii) $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$ ならば， $D(\lambda) = 0$ と λ が固有値であることは同値，
- (iii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} D(\lambda) = 1$,

という性質をみたす． $\varphi_\omega = e^{im\theta}\phi_\omega$ とすると，(1) の定常波解 $e^{i\omega t}\varphi$ の周りでの線形化作用素の固有値 $\lambda = 0$ に属する広義固有空間は

$$\{i\varphi_\omega, \partial_\omega \varphi_\omega, \partial_x \varphi_\omega, \partial_y \varphi_\omega, ix\varphi_\omega, iy\varphi_\omega\}$$

で張られる．このうち，偏角成分の Fourier mode が φ_ω と同じものは最初の 2 つである．このことを使って計算をすると以下の結論を得た．

$\phi(r, \alpha)$ を (4a), (4b) の解とし， $\psi(r)$ を

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r - \left(\omega + \frac{m^2}{r^2}\right)\psi + p|\phi(r, \alpha)|^{p-1}\psi = 0 & \text{for } r \in (0, \infty), \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi(r, \alpha)}{r^m} = 1, & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi_r(r, \alpha)}{r^{m-1}} = m. \end{cases}$$

の解とする．このとき以下の命題が成立する．

Proposition 2.

$$(8) \quad D(0) = D'(0) = 0,$$

$$(9) \quad D''(0) = -A \frac{d}{d\omega} Q(\phi_\omega),$$

where A is a constant that has the sign sign as $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r)$.

Proposition 2 を認めると, 不安定固有値の存在を以下の手順で示すことができる.

- (i) 常微分方程式の一般論から, $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r)$ は $\pm\infty, 0$ のいずれかであることがわかる.
- (ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = -\infty$ であるとすれば,

$$dQ(\phi_\omega)/d\omega \begin{cases} > 0 & (1 < p < 3), \\ < 0 & (p > 3) \end{cases}$$

なので, $p > 3$ のときに $D''(0) < 0$ がわかる. $D(\lambda)$ は \mathbb{C}_ω 上連続な関数で $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} D(\lambda) = 1$ をみたくから, $D(\lambda)$ は $(0, \infty)$ 上に零点をもつ. 従って固有値問題(4) は不安定固有値をもつことになる.

空間次元が 1 次元であれば, $D''(0)$ と $dN(\phi_\omega)/d\omega$ が同符号であることが Evans 関数を計算するとすぐにわかるが (cf. Alexander-Sachs [1]), 空間次元が 2 次元以上の場合, A の符号を決定する必要がある.

- (iii) 最後に

$$(10) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = -\infty$$

の証明の概略を述べる. Kwong [9] の論文において, (10) を示すことが scalar field 方程式の正值球対称解の一意性を証明するための重要なステップになっている. 我々の問題では, 正值解の一意性が Yanagida-Yotsutani の方法で証明されており, 正值解の一意性から条件(10) を示すことになる.

変数変換

$$g(r) = rI_m(r)^2, \quad K(r) = I_m(r)^{p-1},$$

$$\phi(r, \alpha) = I_m(r)u(r, \alpha), \quad v(r, \alpha) = \frac{\partial \phi(r, \alpha)}{\partial \alpha},$$

によって(4a) を標準形

$$(11) \quad \begin{cases} (g(r)u_r)_r + g(r)K(r)|u|^{p-1}u = 0, \\ u(0, \alpha) = \alpha, \quad u_r(0, \alpha) = 0, \end{cases}$$

に変換する.

$$P(r) = gu_r(hu_r + u) + \frac{2}{p+1}ghK|u|^{p+1},$$

$$Q(r) = 2ghu_rv_r + g(u_rv + uv_r) + 2ghK|u|^{p-1}uv,$$

$$R(r) = g(uv_r - u_rv),$$

とする. Pohozaev の等式 ([14], Section 3 参照) を α について微分すると

$$(12) \quad \frac{1}{p+1}Q(r) = \frac{v}{u}P(r) - \int_0^r \frac{P(s)R(s)}{g(s)u(s)^2} ds$$

という式が得られる．この式から \mathbb{R}^2 平面内で (ψ, ψ_r) が回転する様子がわかり， $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = -\infty$ を示すことができる．

Remark 1. *Proposition 2* は ϕ_ω が正值解であるという特徴を使っていない．従って $\lim_{r \rightarrow \infty} = \infty$ をみたく (4a)–(4c) の解が存在すれば，その解は $1 < p < 3$ で不安定であることになる．*subcritical* な場合の不安定定常波解が存在することは証明されていないので，もし出来れば面白い問題だと思います．

4. 定常波解の不安定性

線形不安定性から Definition 1 の意味での定常波解の不安定性を示すためには，線形化作用素の生成する半群の増大度が最不安定固有値に属するモードと同じであることが必要になる．証明の方針は以下の通り．

\mathcal{L} を線形化作用素， $\sigma(\mathcal{L})$ をそのスペクトル集合， P を $\sigma_+ = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{L}) \mid \operatorname{Re} \lambda \neq 0\}$ に対応する spectral projection とし， $Q = I - P$ とする．このとき， $e^{t\mathcal{L}}$ の作用素ノルムが高々多項式のオーダーで増大することを示す．半群 $e^{t\mathcal{L}}$ を

$$(13) \quad e^{t\mathcal{L}}Qu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - \mathcal{L})^{-1} u d\lambda$$

($\gamma > 0$, 定数) と表示する．(13) 中の $(\lambda - \mathcal{L})^{-1}$ を自由な作用素のレゾルベントで展開し (Born 近似)，現れた各項を Yajima [12] に従って評価をする． \mathcal{L} は自己共役作用素ではないが，空間 3 次元以上の場合に波動作用素の存在を証明した Cuccagna [4] の場合同様，特に問題はおこらない．また我々の問題では，半群が多項式オーダーで増大することを許すので，[4]，[12] とことなり，resonance の非存在などの条件を仮定する必要がない．

REFERENCES

- [1] J. C. Alexander and R. Sachs, Linear instability of solitary waves of Boussinesq-type equation: A computer assisted computation, *Nonlin. World* **2**, pp. 471–507, 1995.
- [2] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires. *C. R. Acad. Sci.* **293** (1981), 489–492.
- [3] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), 549–561.
- [4] S. Cuccagna, Stabilization of solutions to nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Pure. Appl. Math.* **54** (2001), 1110–1145.
- [5] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in \mathbb{R}^n , *Mathematical analysis and applications, Part A*, pp. 369–402, *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, 7a, Academic Press, New York-London, 1981.
- [6] M. Grillakis, Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 747–774.
- [7] M. Hirose and M. Ohta, Structure of positive radial solutions to scalar field equations with harmonic potential, *J. Differential Equations* **178** (2002), 519–540.
- [8] J. Iaiia and H. Warchall, Nonradial solutions of semilinear elliptic equation in two dimensions, *J. Diff. Eq.* **119** (1995), 533–558.

- [9] M. K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in \mathbb{R}^n , Arch. Rat. Mech. Anal. **105** (1989), 243–266.
- [10] R. L. Pego and H. A. Warchall, Spectrally stable encapsulated vortices for nonlinear Schrödinger equations, J. Nonlinear Sci. **12** (2002), 347–394.
- [11] M. I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1982/83), 567–576.
- [12] K. Yajima, L^p -boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators, Comm. Math. Phys. **208** (1999), 125–152.
- [13] E. Yanagida and S. Yotsutani, Pohozaev identity and its applications, Surikaisekikenkyusho Kokyuroku **834**, 80–90, 1993.
- [14] E. Yanagida and S. Yotsutani, Classification of the structure of positive radial solutions to $\Delta u + K(|x|)u^p = 0$ in \mathbf{R}^n , Arch. Rat. Mech. Anal. **124** (1993), 239–259.

E-mail address: mizumati@yokohama-cu.ac.jp

Laplace 方程式の Cauchy 問題および逆向き熱伝導問題の 任意多点差分法を用いた数値解法

飯島健太郎

茨城大学大学院理工学研究科 大西研究室

〒 310-8512 水戸市文京 2-1-1, E-mail: nd2401a@mcs.ipc.ibaraki.ac.jp

Abstract

The Cauchy problem of the Laplace equation and the backward heat conduction problem are typical examples of ill-posed problems in the sense that the solution is unstable for errors in data. Our aim is to create a meshless high order finite difference method in which quadrature points do not need to have a lattice structure. In order to develop our method we show a tool using the Taylor expansion. We interpret our method from the viewpoint of the exponential interpolation. From numerical experiments we confirmed that our method is effective in order to solve the two-dimensional Cauchy problem of the Laplace equation and the backward heat conduction equation subject to mixed boundary conditions.

Keywords: Exponential interpolation, Meshless finite difference method, Inverse problem

1 はじめに

次の 2 つの問題を扱う。

Laplace 方程式の Cauchy 問題

領域 $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^2$ と境界 $\partial\Omega_2$ の一部 Γ_d をとる。境界 Γ_d の点 $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2) \in \Gamma_d$ における外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = {}^t(n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}))$ と置く。このとき、与えられた Cauchy データ $\bar{u} : \Gamma_d \rightarrow \mathbf{R}$ と $\bar{q} : \Gamma_d \rightarrow \mathbf{R}$ に対して

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_2 \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_d \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \Gamma_d \quad (3)$$

を満たす関数 $u : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{R}$ を求める問題を Laplace 方程式の Cauchy 問題とよぶ。

逆向き熱伝導問題

最終時刻 $T > 0$ に対して 2 次元熱伝導体を表す領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ と、時空領域 $\Omega_3 = D \times (0, T) \subset \mathbf{R}^3$ をとる。ここでは、領域 Ω_3 の点を $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, t) = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と表す。境界 $\partial\Omega_3$ に含まれる二つの面 $\Gamma_B = \partial D \times [0, T]$ と $\Gamma_F = D \times \{T\}$ をとる。さらに Γ_B を二つの面 $\Gamma_{B1} \subset \Gamma_B$ と $\Gamma_{B2} = \Gamma_B \setminus \Gamma_{B1}$ に分ける。このとき、与えられた Dirichlet データ $\bar{u} : \Gamma_{B1} \rightarrow \mathbf{R}$, Neumann データ $\bar{q} : \Gamma_{B2} \rightarrow \mathbf{R}$ および最終データ $u_F : \Gamma_F \rightarrow \mathbf{R}$ に対して、

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \Delta u \quad \text{in } \Omega_3 \quad (4)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_{B1}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_{B2} \quad (5)$$

$$u = u_F \quad \text{on } \Gamma_F \quad (6)$$

を満たす関数 $u(\mathbf{x})$ を求める問題を考える。ただし Δ を Laplacian $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ とし、ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = {}^t(n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}), 0)$ を境界 ∂D の点 \mathbf{x} における外向き単位法線ベクトルとする。問題 (4)–(6) を 2 次

元の混合境界値逆向き熱伝導問題とよぶ。

Laplace 方程式の Cauchy 問題 [1], [2] および逆向き熱伝導問題 [3] は与えられた最終データに対して、解が不安定となる非適切問題の典型例として知られている。本研究の目的は、非適切問題の数値解法を得ることである。近年、解が不安定となる非適切問題に対して、高精度の数値計算手法が有効であるという研究が報告されている [4], [5]。この研究は、観測データに誤差が含まれない場合、問題の離散化誤差と計算機内で生じる丸め誤差を小さくすることによって、非適切問題であっても数値解が再構成できるという考えに基づく。具体的には、離散化誤差に対してスペクトル選点法を用い、丸め誤差に対しては任意多倍長計算を用いている。しかしスペクトル選点法では、特殊な選点である Chebyshev-Gauss-Lobatto 選点 [6] が用いられており、複雑な領域形状をもつ問題に対して、スペクトル選点法を用いるのは困難である。

本研究では、複雑な領域形状をもつ逆向き熱伝導問題に対する数値解法を開発する。そのために必要な高精度離散化手法としては、任意多点差分法を導入する。さらに、指数補間を用いることにより、任意多点差分近似の意味を明らかにする。

2 差分近似

表記を簡略化するために多重指数を用いる。非負整数全体 $Z_+ := \{z \in Z : z \geq 0\}$ の直積集合を $Z_+^m = \overbrace{Z_+ \times Z_+ \times \cdots \times Z_+}^m$ と表す。このとき $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in Z_+^m$ を多重指数という。記号 $\mathbf{0}$ は $(0, 0, \dots, 0)$ を表す。

多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in Z_+^m$ に対していくつかの演算を定義する。長さを $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ によって定める。ただし、ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ の長さは $|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ であり、多重指数の長さ $|\cdot|$ とは区別する。ベクトル \mathbf{x} のべき乗を $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$ によって定義する。階乗 α を $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_m!$ と定める。微分作用素 $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$ は $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$ を表す。形式的に $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$,

$\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m)$ と置くことで、 $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \partial^\alpha$ と書くことにする。

この節では差分近似を導出する。関数 u を有界領域 $\Omega \subset R^m$ 上の解析関数とする。このとき、関数 u の Taylor 展開

$$u(\mathbf{y}) = \sum_{\alpha \in Z_+^m} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad (7)$$

は一様絶対収束する。領域 Ω 内に $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$ と、 N 個の求積点 $\mathbf{x}^{(j)} = {}^t(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, N$ をランダムに配置する。実定数 a_α , $\alpha \in Z_+^m$ を、ある $\mu_0 \in N$ に対して $a_\alpha = 0$, $|\alpha| > \mu_0$ となるようにとり、微分作用素 $P(\partial)$ を

$$P(\partial) := \sum_{\alpha \in Z_+^m} a_\alpha \partial^\alpha \quad (8)$$

と置く。このとき、導関数の値 $P(\partial)u(\mathbf{x})$ を関数値 $u(\mathbf{x}^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, N$ の一次結合で表すことを考える。すなわち、重み $w_j(\mathbf{x}) \in R$, $j = 1, 2, \dots, N$ を適切に選ぶことによって、 $P(\partial)u(\mathbf{x})$ を

$$P(\partial)u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}^{(j)}) + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u) \quad (9)$$

によって表す。ここで、 $\varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u)$ は離散化誤差を表す。近似 (9) を $P(\partial)$ の $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$ に関する任意多点差分近似とよぶ。

実際に重み $w_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, N$ を以下のように決定する。微分作用素 (8) を式 (9) へ代入すると、式 (9) の左辺は

$$P(\partial)u(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in Z_+^m} a_\alpha \partial^\alpha u(\mathbf{x}), \quad \alpha \in Z_+^m \quad (10)$$

となる。Taylor 展開 (7) を用いると式 (9) の右辺

第 1 項は

$$\sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}^{(j)}) = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{\alpha \in Z_+^m} \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha \partial^\alpha u(\mathbf{x}) \right\} \quad (11)$$

となる. 近似式 (9) から

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \left\{ a_\alpha - \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha \right\} \partial^\alpha u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

を得る. 従来の差分法では, できるだけ大きな自然数 μ に対して連立一次方程式

$$a_\alpha = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \frac{1}{\alpha!} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha, \quad |\alpha| \leq \mu \quad (12)$$

満たす $w_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, \dots, N$ を重みとして選ぶ.

本手法では重みの決定法を次のように修正する. 相異なるベクトル $\xi^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N$ を \mathbf{R}^m から選ぶ. 等式 (12) の両辺に $(\xi^{(i)})^\alpha$ をかけ, すべての $\alpha \in \mathbf{Z}_+^m$ について和をとると, 等式は

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} a_\alpha (\xi^{(i)})^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} (\xi^{(i)})^\alpha (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x})^\alpha \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

となる. 一般に, 等式

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} \prod_{k=1}^m \frac{1}{\alpha_k!} \xi_k^{\alpha_k} x_k^{\alpha_k} \\ &= \prod_{k=1}^m \sum_{\alpha_k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k!} \xi_k^{\alpha_k} x_k^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^m e^{\xi_k x_k} \\ &= e^{\xi \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}, \xi \in \mathbf{R}^m \quad (14) \end{aligned}$$

が成り立つ. 等式 (14) と多項式 $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^m} a_\alpha \xi^\alpha$,

$\xi \in \mathbf{R}^m$ から, 等式 (13) は

$$P(\xi^{(i)}) e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}^{(j)}}, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

と変形される. 行列 $L = (l_1, l_2, \dots, l_N) := (e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}^{(j)}})_{i,j=1}^N$, $Q := (P(\xi^{(i)}) \delta_{ij})_{i,j=1}^N$ と列ベクトル $\mathbf{l}(\mathbf{x}) := (e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}})_{i=1}^N$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}) := (w_j(\mathbf{x}))_{j=1}^N$ を用いることで, 連立一次方程式 (15) は

$$Q\mathbf{l}(\mathbf{x}) = L\mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (16)$$

と表される. ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタである. ゆえに, もし L が正則ならば, 重み $w_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, \dots, N$ は

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = L^{-1}Q\mathbf{l}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

によって与えられる. 列ベクトル $\mathbf{u} := (u(\mathbf{x}^{(j)}))_{j=1}^N$ を用いると, 本手法における差分近似は

$$\begin{aligned} P(\partial)u(\mathbf{x}) &= {}^t\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u) \\ &= {}^t(L^{-1}Q\mathbf{l}(\mathbf{x}))\mathbf{u} + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u). \quad (18) \end{aligned}$$

によって表現される.

本手法で用いたベクトル $\xi^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N$ の選び方によっては, 行列 L が正則にならないことがある. 例として, $N = 2$ において $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ を $(\xi^{(1)} - \xi^{(2)}) \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}) = 0$ となるように選ぶと, 行列 L は正則にならない. 本研究では, 行列 L が正則になるための十分条件をまだ得ていない. また, パラメータ $\rho > 0$ を用いて $\xi^{(i)} = \rho \mathbf{x}^{(i)}$ と置く例では, 行列 L が対称となり, (17) 式の計算において行列の対称性を考慮した技法を使用できる.

3 指数補間

本差分近似の性格を明らかにするために, 指数補間との間の関係を示す. 指数関数の一次結合からなる関数 \tilde{u} を各求積点 $\mathbf{x}^{(j)}, j = 1, 2, \dots, N$ において関数 u と値が一致するようにとる. すなわち, ある定係数 $b_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, N$ が存在し, $\mathbf{b} := (b_i)_{i=1}^N$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N b_i e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}} = {}^t\mathbf{l}(\mathbf{x})\mathbf{b}, \\ \tilde{u}(\mathbf{x}^{(j)}) &= u(\mathbf{x}^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

が成り立っているとする. このとき, 関数 \tilde{u} を u の指数補間公式とよぶ. 等式 $\mathbf{u} = (\tilde{u}(\mathbf{x}^{(j)}))_{j=1}^N = ({}^t\mathbf{l}_j \mathbf{b})_{j=1}^N = {}^tL\mathbf{b}$, が成り立つことから, 一次結合の係数は $\mathbf{b} = {}^tL^{-1}\mathbf{u}$ を満たす. ゆえに, 指数補間公式は

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = {}^t(L^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{x}))\mathbf{u} \quad (19)$$

と書くことができる.

ここで微分作用素 $P(\partial)$ を公式 (19) の両辺に作用させる. 等式 $P(\partial)\mathbf{l}(\mathbf{x}) = (P(\partial)e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}})_{i=1}^N$

$= \left(P(\xi^{(i)}) e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}} \right)_{i=1}^N = Q\mathbf{l}(\mathbf{x})$ が成り立つことから、等式

$$P(\partial)\tilde{u}(\mathbf{x}) = {}^t(L^{-1}Q\mathbf{l}(\mathbf{x}))\mathbf{u} \quad (20)$$

を得る。さらに関係

$${}^t(L^{-1}Q\mathbf{l}(\mathbf{x}))\mathbf{u} = {}^t(L^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{x})){}^t(L^{-1}Q\mathbf{l})\mathbf{u}$$

を用いると、等式 (20) は

$$P(\partial)\tilde{u}(\mathbf{x}) = {}^t(L^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{x})){}^t(L^{-1}Q\mathbf{l})\mathbf{u}$$

となる。線形空間 $\Lambda_N := \text{span}\{e^{\xi^{(i)} \cdot \mathbf{x}} : i = 1, 2, \dots, N\}$ においては、指数補間を経由することで、行列 $\hat{P} := {}^t(L^{-1}Q\mathbf{l})$ と微分作用素 $P(\partial)$ は同値であることが図1から分かる。

等式 (20) から差分近似 (18) は

$$P(\partial)u(\mathbf{x}) = P(\partial)\tilde{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}; P(\partial)u) \quad (21)$$

によって表される。

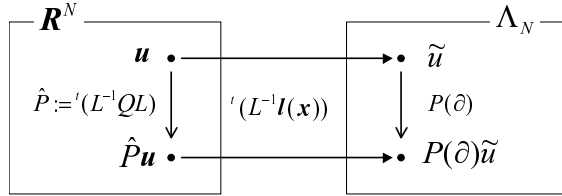


図1: \hat{P} と $P(\partial)$ の同値性

次元 m や求積点数 N が大きくなると、従来の (12) 式を用いた重みの決定には、煩雑な多重指数の演算を多用しなければならない。一方 (17) 式は指数関数とベクトルの内積を用いて表現されており、数値的に扱いやすい。

4 差分法

逆向き熱伝導問題を例として任意多点差分法を導出する。求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ を領域 $\Omega = \Omega_3$ の閉包 $\bar{\Omega}$ 内にとる。求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k =$

$1, 2, \dots, N$ に対して微分作用素

$$P_k(\partial) := \begin{cases} \partial^{(0,0,1)} - (\partial^{(2,0,0)} + \partial^{(0,2,0)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Omega, \\ n_1(\mathbf{x}^{(k)})\partial^{(1,0,0)} + n_2(\mathbf{x}^{(k)})\partial^{(0,1,0)}, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B2}, \\ I, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B1} \cup \Gamma_F \end{cases}$$

とデータ

$$f_k := \begin{cases} 0, & \mathbf{x}^{(k)} \in \Omega, \\ \bar{u}(\mathbf{x}^{(k)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B1}, \\ \bar{q}(\mathbf{x}^{(k)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_{B2}, \\ u_F(\mathbf{x}^{(k)}), & \mathbf{x}^{(k)} \in \Gamma_F \end{cases}$$

をとる。ただし I は恒等作用素である。問題 (4)–(6) を

$$P_k(\partial)u(\mathbf{x}^{(k)}) = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

と書き直して、各求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ 上へ制限する。関数値 $u(\mathbf{x}^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, N$ の近似値を u_j と置く。パラメータ $\rho > 0$ に対して列ベクトル $\xi^{(i)} = \rho\mathbf{x}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ と置く。このとき、与えられたデータ f_k , $k = 1, 2, \dots, N$ から近似解 u_j , $j = 1, 2, \dots, N$ を以下のようにして求める。

各求積点 $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ における近傍 $S_k \subset \mathbb{R}^m$ を、その和集合 $\bigcup_{k=1}^N S_k$ が閉領域 $\bar{\Omega}$ を覆うようにとる。近傍 S_k に属する求積点のインデックスの集合を $N(S_k) := \{j \in \{1, 2, \dots, N\} : \mathbf{x}^{(j)} \in S_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$ と置く。ただし M_k は $N(S_k)$ の要素数である。表 $\{m_{kj}\}$ を $m_{kj} \in N(S_k)$, $j = 1, 2, \dots, M_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ となるように作る。任意に $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ をとり固定する。近似式

$$P_k(\partial)u(\mathbf{x}^{(k)}) \approx \sum_{j \in N(S_k)} w_{kj} u(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (23)$$

から、重み w_{kj} , $j \in \{m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kM_k}\} = N(S_k)$ を以下のように決定する。

近似式 (9) における重みが方程式 (15) によって与えられることから、重み w_{kj} , $j \in N(S_k)$ を連立一次方程式

$$P_k(\rho\mathbf{x}^{(i)})e^{\rho\mathbf{x}^{(i)} \cdot \mathbf{x}^{(k)}} = \sum_{j \in N(S_k)} w_{kj} e^{\rho\mathbf{x}^{(i)} \cdot \mathbf{x}^{(j)}}, \quad (24)$$

$$i \in N(S_k)$$

の解, および $w_{kj} = 0, j \notin N(S_k)$ から定める. 方程式 (22) と近似式 (23) から, 連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^N w_{kj} u_j = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

の解を近似解 $u_j, j = 1, 2, \dots, N$ として求める. 行列 $W := (w_{kj})_{k,j=1}^N$ と列ベクトル $\hat{u} := (u_j)_{j=1}^N, f := (f_k)_{k=1}^N$ を用いることで連立一次方程式 (25) は $W\hat{u} = f$ と表現される. ゆえに, 近似値 $u_j, j = 1, 2, \dots, N$ は

$$\hat{u} = W^{-1}f \quad (26)$$

となる. 以上の方法を任意多点差分法とよぶ.

5 数値例

任意多点差分法を Laplace 方程式の Cauchy 問題と逆向き熱伝導問題へ適用する. この節では各近傍 S_k がすべての求積点を含むように選ばれる例のみを示す. ゆえに, 各近傍に対するインデックスの集合を $N(S_k) = \{1, 2, \dots, N\}$ ととる. 今後の課題として, 一般の近傍系を用いた数値実験を行う.

また, パラメータ ρ の選定基準が得られていないため, 数値実験を繰り返すことで, 数値解の誤差が小さくなるように ρ を選んだ.

Laplace 方程式の Cauchy 問題

例 1

領域 $\Omega_2 = (0, 1) \times (0, 1)$ の境界 $\Gamma_d = [0, 1] \times \{0\}$ 上で Cauchy データ $\bar{u}^{(l)} = 0, \bar{q}^{(l)} = -\sin lx_1$ を与える. このとき, Laplace 方程式の Cauchy 問題の解は

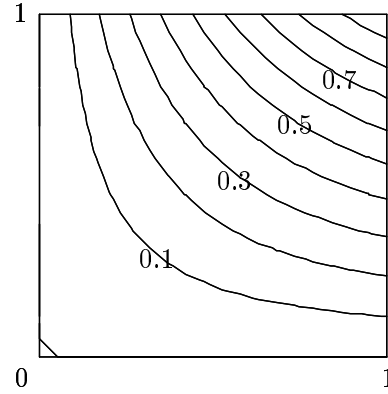
$$u^{(l)}(x_1, x_2) = \frac{1}{l} \sin lx_1 \sinh lx_2$$

である.

パラメータ $l = 1$ に対する数値解, および数値解と真の解を重ねた等高線を図 2 に示す. 真の解と数値解の等高線は良く一致していることが分かる.

パラメータ $l = 2$ に対する数値解, および数値解と真の解を重ねた等高線を図 3 に示す. 数値解は真の解からわずかにずれているが, 解の不安定をもつ問題の数値解としては良い精度である.

数値解



数値解と真の解

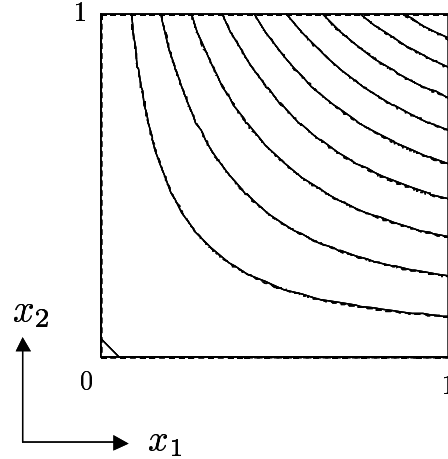


図 2: 数値解 (—) と真の解 (- - -) ($l = 1$)

パラメータ $l = 10$ に対する数値解のグラフを図 4 に, 真の解のグラフを図 5 に示す. 両者のグラフは値が大きく異なっているが, 似た形状であることが分かる.

以上の数値結果から, 非適切性の弱い例に対して, 任意多点差分法は比較的良好な精度の近似解を導出できることが分かった.

逆向き熱伝導問題

例 2

領域を $D = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$ とし, 最終時刻を $T = 1$ とする. 境界データは平面 $\Gamma_{B1} =$

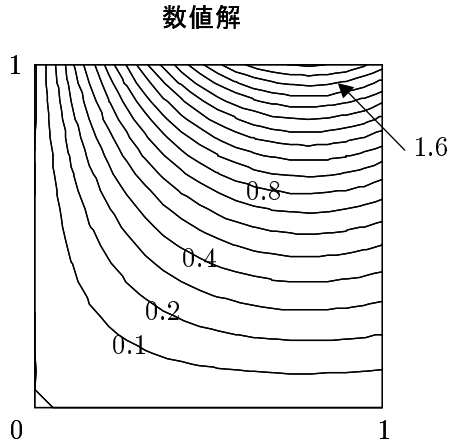


図 4: 数値解 ($l = 10$)

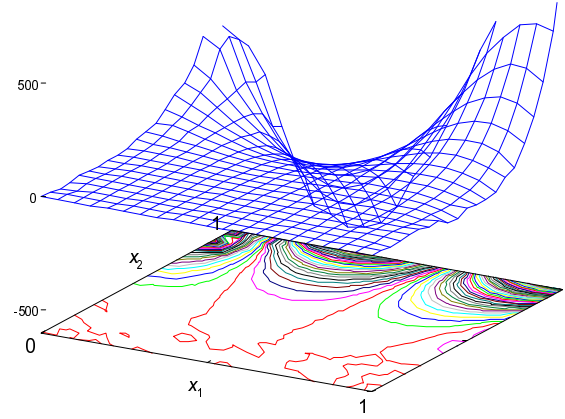


図 5: 真の解 ($l = 10$)

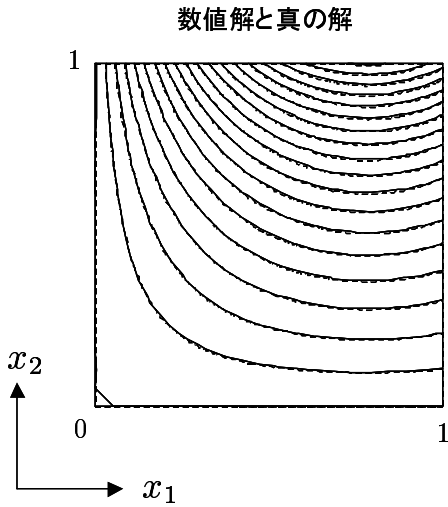
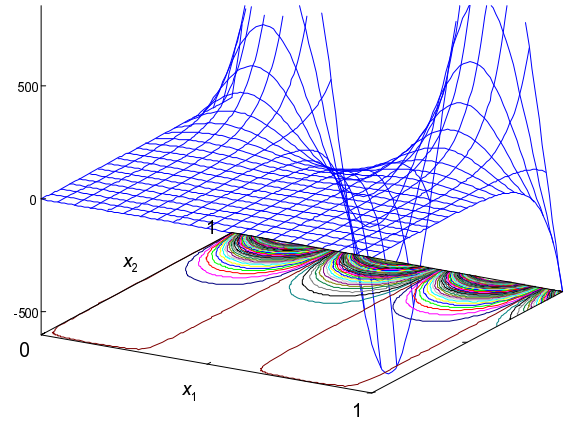


図 3: 数値解 (—) と真の解 (---) ($l = 2$)



$\{t(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega_3 : x_1 = -0.5, 0.5\}$ および $\Gamma_{B2} = \{t(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega_3 : x_2 = -0.5, 0.5\}$ 上で与えられる。パラメータ $l \in N$ に対して、関数

$$u^{(l)}(\mathbf{x}) = e^{-2l^2 x_3} \sin l x_1 \sin l x_2$$

は熱方程式 (4) を満たす。境界データと最終データを、それぞれ $\bar{u}^{(l)}(\mathbf{x}) = u^{(l)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_{B1}$, $\bar{q}^{(l)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u^{(l)}}{\partial n(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_{B2}$, および $u_F^{(l)}(\mathbf{x}) = u^{(l)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_F$ と与える。求積点数が $N = 500$ としたときの、問題 (4)–(6) の数値解を求める。求積点配置は図 6 のとおりである。図 7 にパラメータ $l = 1$, $\rho = 4$, および時刻 $x_3 = 0$ における数値解と真の解の等高線図を示す。得られた数値解は、非適切問

題の数値解としては安定である。図 8 にパラメータ $l = 2$, $\rho = 4$, および時刻 $x_3 = 0$ における数値解と真の解の等高線図を示す。数値解の精度は $l = 1$ の場合に比べて悪くなった。

実際、パラメータが $l = 1, 2, 3$ のとき、数値解の絶対誤差 $\text{err} := \max_{j=1, 2, \dots, N} |u_j - u(\mathbf{x}^{(j)})|$ はそれぞれ 1.6×10^{-4} , 2.4×10^{-2} , および 8.2 である。パラメータ l が増加するに従って誤差が急に増加することが分かる。不等式 $\left| \frac{u^{(l)}(\mathbf{x})}{u_F^{(l)}(\mathbf{y})} \right| \leq \frac{e^{-2l^2 \times 0}}{e^{-2l^2 T}} = e^{2l^2 T}$, $\mathbf{x} \in \Omega_3$, $\mathbf{y} \in \Gamma_F$ から、最終データ $u_F^{(l)}(\mathbf{x})$ に対する解 $u^{(l)}(\mathbf{y})$ の比率の最大値は $C_l = e^{2l^2 T}$ であることが分かる。パラメータ $l = 2, 3$ に対する比率

は $C_2 \approx 10^{3.5}$ および $C_3 \approx 10^{7.8}$ である. パラメータ $l = 3$ における数値解の精度が悪い原因として, 丸め誤差が急激に拡大したことが予想される.

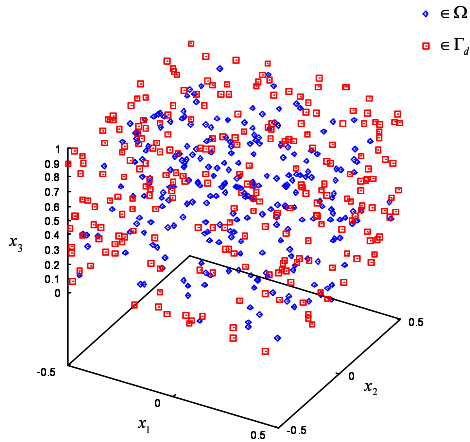


図 6: 求積点

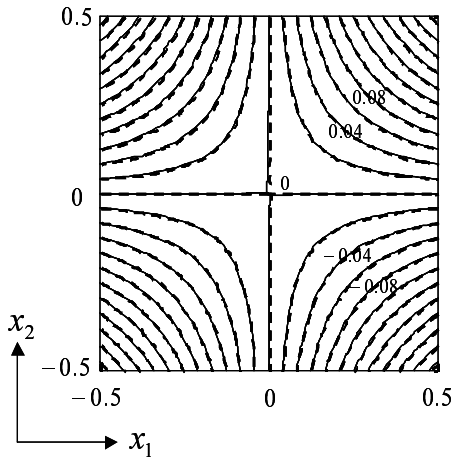


図 7: 数値解 (—) と真の解 (- - -) ($l = 1, x_3 = 0$)

例 3

領域を $D = \{^t(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 0.5^2\} \cup (0, 1) \times (-0.25, 0.25)$ とし, 最終時刻を $T = 1$ とする. 境界データは曲面 $\Gamma_{B2} = \{^t(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega_3 : x_1^2 + x_2^2 = 0.5^2\}$ および $\Gamma_{B1} = \Gamma_B \setminus \Gamma_{B2}$ で与えられる. 境界 Γ_{B2} の外向き単位法線ベクトル $n(x)$ は $^t(2x_1, 2x_2, 0)$ で表される. パラメータ

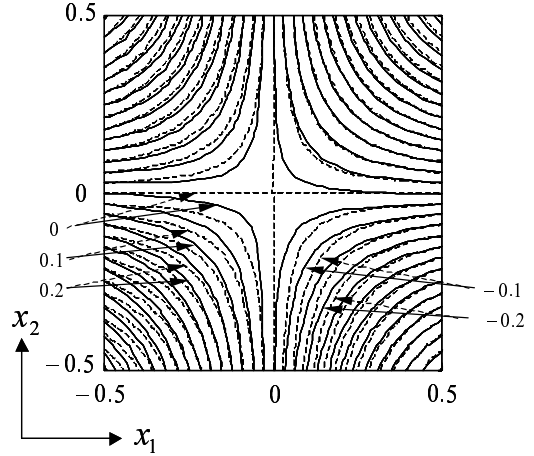


図 8: 数値解 (—) と真の解 (- - -) ($l = 2, x_3 = 0$)

$y = ^t(y_1, y_2, y_3) \notin \Omega_3$ に対して, x の関数

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi(x_3 - y_3)} \text{Exp} \left[-\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{4(x_3 - y_3)} \right]$$

は熱方程式 (4) を満たす. パラメータが $y = ^t(0, 0, -0.3)$ のとき境界データと最終データをそれぞれ $\bar{u}(x) = G(x, y)$, $x \in \Gamma_{B1}$, $\bar{q}(x) = \frac{\partial G}{\partial n(x)}(x, y)$, $x \in \Gamma_{B2}$, および $u_F(x) = G(x, y)$, $x \in \Gamma_F$ によって与える. 任意多点差分法におけるパラメータが $N = 500$, $\rho = 3$ のとき, 問題 (4)–(6) の数値解を求める. 図 9 に時刻 $x_3 = 0.5$ の数値解と真の解の等高線図を示し, 図 10 に時刻 $x_3 = 0$ の数値解と真の解の等高線図を示す. 数値解の誤差は $\text{err} = 4.9 \times 10^{-3}$ であった.

逆向き熱伝導問題は解が不安定であるが, 数値解には数値的な不安定現象は見られない. 数値解から真の解のおおよその形状を推定できる. また, 円と長方形を組み合わせた簡単な形状ではあるが, 長方形以外の領域に本手法が適用可能であることを示すことができた. このことから, より複雑な形状の領域に対し, 本手法の応用が期待できる.

6 まとめ

本研究では, 任意多点差分法を用いた Laplace 方程式の Cauchy 問題と逆向き熱伝導問題の数値解法について考察した. 任意多点差分近似法は, 各求積

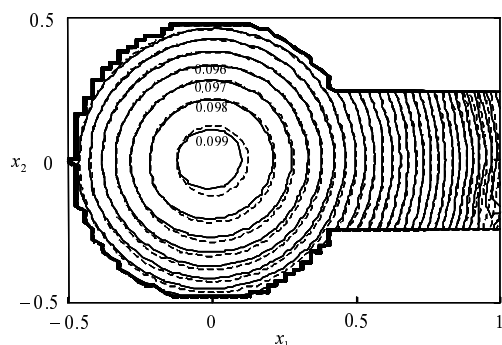


図 9: 数値解 (—) と真の解 (- - -) ($x_3 = 0.5$)

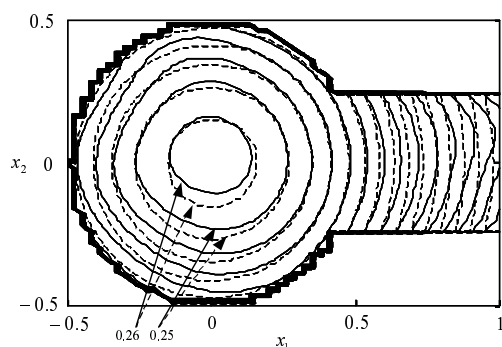


図 10: 数値解 (—) と真の解 (- - -) ($x_3 = 0$)

点における関数値の一次結合によって導関数の値を近似する方法である。一次結合の重みは Taylor 展開を用いて定められる。

本手法は、求積点を任意の位置に配置できるため、領域の形状に依存せずに適用可能である。各求積点における導関数の値を近似するとき、求積点の格子構造や隣接情報を必要としないことから、本手法はメッシュフリーの特性をもつ。また、本手法によって得られる近似導関数が、与えられた求積点に関する指数補間公式の導関数と一致することを示した。

混合境界条件が与えられた 2 次元逆向き熱伝導問題を時空領域における 3 次元問題として捉え、本手法を適用した。数値例において、非適切問題の数値解が、数値的安定に得られた。最終データに対する解の拡大率が大きい場合は、数値解が丸め誤差の影響を大きく受けると考えられる。

多倍長計算との併用を今後の課題とする。

参考文献

- [1] K. Hayashi, Y. Ohura, and K. Onishi, Direct method of solution for general boundary value problem of the Laplace equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, pp. 763–771 (2002).
- [2] S. I. Kabanikhin and A. L. Karchevsky, Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, Vol. 3, No. 1, pp. 21–46 (1995).
- [3] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences, Vol.82, Springer-Verlag, New York (1989).
- [4] H. Imai, T. Takeuchi, and M. Kushida, On numerical simulation of partial differential equations in infinite precision, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Gakkōtoshō, Tokyo, Vol. 9, No. 2, pp. 1007–1016 (1999).
- [5] H. Fujiwara and Y. Iso, Numerical challenge to ill-posed problems by fast multiple-precision system, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 50, pp. 419–424 (2001).
- [6] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1988).

反応拡散モデルの情報処理への応用

櫻井 建成

宇部工業高等専門学校

1. はじめに

近年、“自己組織化”という言葉が耳にする機会が増えてきた。その概念を使い、脳内での機能の発現（情報処理）や生体信号の伝搬など多くの現象が説明できることがわかってきた。また、多くの自然現象もこれらの枠組みで理解しようとする試みが行われている。本研究では、自己組織化における時間・空間的秩序構造の代表的なモデルとして知られる、反応拡散モデル（Fitz-Hugh&Nagumo(FHN)方程式）を用いた秩序構造の発現とその情報処理への応用を考える。反応拡散モデルは、多数の反応素子が拡散によって繋がっているシステムであり、従来は、連続近似できる数値解法を利用して、コンピュータにより計算されてきた。各反応素子がある距離を保っているような離散的な系において、従来の連続的な反応拡散モデルでは実現されなかった情報抽出機能が実現されることを示す。また、我々が提案するモデルに対し確率共鳴効果により、外的ノイズにより情報抽出能力（SN比）が向上することを示す。

2. FHN方程式

本研究では、軸策における興奮伝達モデルとして提案されているFitz-Hugh&Nagumo(FHN)モデルを用いている。 $u = u(x,y,t)$ を活性因子濃度、 $v = v(x,y,t)$ を抑制因子濃度、 D_u 、 D_v を各因子の拡散係数とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} \{u(1-u)(u-a) - v\}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + u - bv$$

と表される。ここで、 a 、 b 、 ε は定数パラメータであり、 $D_u = 0.002$ 、 $D_v = 0.008$ 、

$a = 0.4$ 、 $b = 10.0$ 、 $\varepsilon = 0.001$ を使う。

3. 画像処理への応用

処理対象画像として、図1に示す画像（サイズ200×200）を用いる。入力画像（初期画像）の領域の輝度値は178、地の領域の輝度値は0(黒)である。FHNモデルにおいて、各因子濃度によって輝度を変えてグレースケール表示する（ $u=1.0$: 255(白)、 $u=-0.05$: 0(黒)）。すなわち、処理対象画像の各画素の輝度値を $f(x,y)$ とすると、各素子の活性因子濃度の初期値 u は、 $f(x,y) = 255 \times \{(u(x,y) + 0.05) / (1.0 + 0.05)\}$ で計算される。なお、抑制因子濃度の初期値には、全ての画素に $v=0.0$ を代入した。単位時間毎の各素子の (u,v) の値は、式(1),(2)の反応拡散方程式を陽的解法公式を用いて全素子が定常状態に落ち着くまで計算する。空間刻みの違う二つの数値計算結果を図1、2に示す。刻み幅が小さい場合（図1）、通常のチューリングライクパターンのように伝搬波が発生し、まあ自己複製パターンが発生した。一方、刻み幅を大きくした場合（図2）、与えた初期画像の境界部分だけを抽出し、その場で定在波が得られた。



図1 入力画像（左）とパターンの時間変化（空間刻み $dx = 0.25$ ）

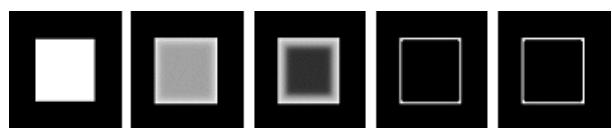
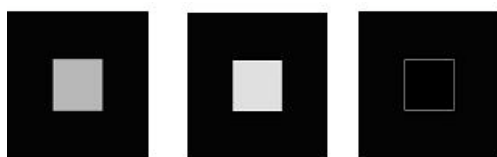


図2 入力画像（左）とパターンの時間変化（空間刻み $dx = 1.0$ ）

次に、領域分割：双安定系（図3(b)）、エッジ検出：単安定系（図3(c)）の例を示す。双安定系においては、与えられた刺激が大きい(活性因子濃度 u 大/高輝度)図の領域にあたる素子は u の高い定常状態へ遷移し、与えられた刺激が小さい(u 小/低輝度)地の領域にあたる素子は u の低い定常状態へと遷移する。また境界部分では、拡散不安定性を引き起こすチューリング条件により、境界が静止する。これにより、領域分割が可能となる。単安定系においては、与えられた刺激が大きい場合においても、定常状態へと遷移し、最終的には系全体が低い定常状態になる。

初期値として、ノイズを付加した入力画像における結果を図4に示す。ここで、入力画像としてコントラストの低い画像（図4(a)）を与えている。その画像にノイズを付加した例を図4(b)に示す。ここでは、コントラスト強調して示している（実際には見えないほど暗い画像である）。ノイズ強度を変えた場合の結果を図4(c-h)に示す。ノイズ強度が小さい場合（図4(c,d)）、領域分割やエッジ検出はできていない。ノイズ強度が増すと（図4(e,f)）、領域分割やエッジ検出が可能となる。更にノイズ強度が増すと（図4(g,h)）、検出精度が悪くなる。図5にノイズ強度とその検出精度を示す。これより、適度な強度のノイズを加えることで、より高い領域分割精度が得られることがわかった。すなわち、適度なノイズの存在が情報抽出のS/N(信号対ノイズ)比を向上させていると言える。



(a)入力 (b)双安定系 (c)単安定系

図3 領域分割とエッジ検出。(c)単安定系は図1と同じパラメータを用いる。(b)双安定系では、 $b = 20.0$ とし、他は同じパラメータを用いる。

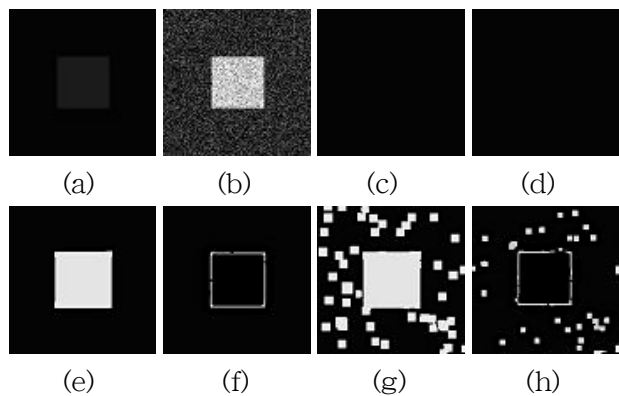


図4 低コントラスト画像の処理におけるノイズ印加の有効性：(a)原画像、(b)ノイズを付加した入力画像 ($u_0'(x,y) = u_0(x,y) + c \times \text{rnd}(x,y)$)、(c)(d) $c=0.0$ 、(e)(f) $c=0.11$ 、(g)(h) $c=0.15$ 。(c)(e)(g)：双安定系、(d)(f)(h)：単安定系。

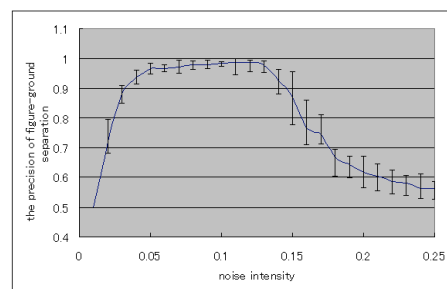


図5 ノイズ強度と検出精度の関係

4. 議論

生体内での情報伝達はそれぞれが軸索で結合されたいわば離散的なシステムであるニューロン群を介して行われている。我々の視覚系機能の一つであるエッジ抽出も、目に入ってきた物体のエッジだけを残したパターンが定在化したものと考えられる。ニューロンや網膜上でのセンサー（錐体など）を一つの反応素子と見立て、振動子間の結合が弱い場におけるパターンの発生や発生したパターンの安定性などを研究する。また、従来、外的・内的を問わず、ノイズは”かたち”を壊す働きがあるなど、ネガティブに作用すると考えられてきた。しかし、確率共鳴など、ノイズによる現象の誘発や反応拡散波伝搬におけるノイズのサポート的効果など、自己組織的に発生するパターンにおいて、ノイズの重要性が明らかにした。本研究では、エッジ検出のS/N比を向上することにノイズが大きな寄与すること示した。新たな情報処理手法の提案に結びつくと考えられる。

極渦のある球面上での渦層の運動

坂上 貴之 (SAKAJO, Takashi)
北海道大学大学院理学研究科数学専攻
E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp

1 研究の背景

流れの速度場が急激に変化して高い渦度が局所的に存在する領域は“せん断流領域”と呼ばれ、流れ全体の運動を強く支配する。そのため、せん断流領域の運動を考えることは、流体力学における重要な研究テーマの一つとなっている。

このせん断領域の運動の数理モデルとして導入されたのが渦層である。まず、流れは非圧縮・非粘性とする。次に、渦層モデルでは渦度が分布する領域の厚さが極めて薄いと仮定する。すなわち、高渦度領域を全空間に埋め込まれた一つの速度場の不連続面として定義し、その面上で渦度が δ 関数的に分布しているものを渦層と呼ぶ。

本研究では球面上にある渦層の安定性について論じるが、その前に二次元渦層について知られている重要な事実をいくつか紹介する。二次元渦層は複素数値を持つ以下のような空間 1 パラメータ関数として定義される。

$$z(\Gamma, t) = x(\Gamma, t) + iy(\Gamma, t), \quad -\infty < \Gamma < \infty.$$

ここで Γ は渦層に沿った循環パラメータ、 t は時間を表している。この時、渦層の時間発展は Birkhoff-Rott 方程式によって記述される。

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma'}{z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)}.$$

ただし、右辺の積分は Cauchy の主値積分の意味で定義し、 \bar{z} は z の複素共役を表すものとする。この時、数学的および数値的な研究から、次の三つの性質が知られている。

1) Kelvin-Helmholtz 不安定性 [8]

Birkhoff-Rott 方程式の定常解 $z(\Gamma, t) = \Gamma$ の線形安定性を調べる。この定常解に次のようなフーリエ級数型の微小な摂動を加える。

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) \exp(in\Gamma).$$

この時、各モード n の微小摂動係数 $a_n(t)$ の線形化方程式から、それらは次のように時間発展することがわかる。

$$|a_n(t)| \sim |a_n(0)| \exp(\pi|n|t).$$

これは、大きいモードの摂動ほど、急激に成長することを意味している。したがって、この Birkhoff-Rott 方程式の初期値問題は Hadamard の意味で Ill-posed である。このような線形不安定性を Kelvin-Helmholtz 不安定性と呼ぶ。

2) 有限時間での曲率特異点の生成

Moore[4] は Birkhoff-Rott 方程式の漸近解析によって、滑らかな初期値から始めた解に有限時間で特異点が発生することを示唆した。すなわち、彼は初期値 $z(\Gamma, t) = \Gamma + i\epsilon \sin \Gamma$ に対する漸近解析から、十分時間が経過した後の解のフーリエ係数が次の漸近形になることを示した。

$$|a_n(t)| \sim Cn^{-\frac{5}{2}} \exp\left(n\left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\log \epsilon t\right)\right).$$

したがって、時刻 t_c が

$$1 + \frac{1}{2}t_c + \frac{1}{4}\log \epsilon t_c = 0,$$

を満たす時、解の二階微分すなわち渦層の曲率が発散することがわかる。

3) Roll-up 構造の出現

最後の結果は、渦層の長時間発展に関するものである。しかし、上で示したように渦層の方程式は Ill-posed であり、かつ有限時間で解は滑かさを失うので、その時間を超えて渦層の長時間発展を考えることはできない。それに対して、Krasny[1] は以下のような Birkhoff-Rott 方程式の正則化方程式を考えて、その長時間発展を数値計算した。

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{z}(\Gamma, t) - \bar{z}(\Gamma', t)}{|z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)|^2 + \sigma^2} d\Gamma'.$$

ただし $\sigma > 0$ は正則化パラメータである。この時、渦層には曲率の爆発が起らず、長時間経過すると二重螺旋渦巻形に巻き上がる (Roll-up) ことが知られるようになった。この渦巻解はもちろん Birkhoff-Rott 方程式の厳密解ではないが、数学的には Birkhoff-Rott 方程式の解を弱い意味で近似する解であることが知られている [3]。また、物理的に渦の二重螺旋構造は現実の流体現象に普遍的に見られるものであり、数値的には正則化渦層の方程式が高レイノルズ数を持つ現実流体の運動を精度よく近似する例 [6] 等も報告されており、応用上も重要なモデル方程式である。

2 球面上の渦層の運動

我々は、こうした二次元渦層について得られた知見を基に球面上にある渦度密度一定の渦層の時間発展を取り扱う。さらに、今回は球の両極に渦糸を固

定した系を考える。北極渦と南極渦の強さをそれぞれ Γ_1, Γ_2 とし、時刻 t として α を渦層に沿った曲線パラメータとする時、渦層の位置を球面座標系で $(\theta(\alpha, t), \varphi(\alpha, t))$ と表せば、極渦付きの球面渦層は以下の運動方程式に従う。

$$\theta_t = -\frac{1}{4\pi} \text{PV} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta' \sin(\varphi - \varphi')}{1 - \cos \gamma} d\alpha', \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t = & -\frac{1}{4\pi} \text{PV} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') - \sin \theta \cos \theta'}{\sin \theta (1 - \cos \gamma)} d\alpha' \\ & + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Gamma_1}{1 - \cos \theta} - \frac{\Gamma_2}{1 + \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

この方程式に対して、我々は、定常解 $\theta(\alpha, t) = \theta_0, \varphi(\alpha, t) = \alpha$ の線形安定性、および曲率爆発の有無とその極渦からの影響を調べた。さらに方程式を二次元の場合と同様に渦法によって正則化し、数値計算して二重螺旋 Roll-up 構造と極渦の影響についても調べた。

3 線形安定性

まず、渦層方程式 (1) と (2) の定常解を求める。今、渦層が同一緯度の上にある、すなわち $\theta(\alpha, t) = \theta_0, \varphi(\alpha, t) = \alpha$ とする。これを方程式に代入して、

$$\begin{aligned} \theta_t &= -\frac{1}{4\pi \sin \theta_0} \text{PV} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{1 - \cos(\alpha - \alpha')} d\alpha' = 0, \\ \varphi_t &= \frac{\cos \theta_0}{2 \sin^2 \theta_0} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Gamma_1}{1 - \cos \theta_0} - \frac{\Gamma_2}{1 + \cos \theta_0} \right) \equiv V_0. \end{aligned}$$

を得るので、これから $\theta = \theta_0, \varphi = \alpha + V_0 t$ は渦層方程式の定常解であることがわかる。我々はこの定常解の線形安定性を調べる。

この定常解に以下のようなフーリエ級数型の微小摂動を加える。

$$\theta(\alpha, t) = \theta_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(t) \exp(in\alpha), \quad \varphi(\alpha, t) = \alpha + V_0 t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \exp(in\alpha).$$

この時、摂動のフーリエスペクトル $\theta_n(t)$ と $\varphi_n(t)$ に対する線形化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_n}{dt} &= \frac{|n|}{2 \sin \theta_0} \varphi_n, \\ \frac{d\varphi_n}{dt} &= \left(\frac{|n|}{2 \sin^3 \theta_0} - \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\pi)(1 + \cos^2 \theta_0)}{4\pi \sin^3 \theta_0} - \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2) \cos \theta_0}{2\pi \sin^3 \theta_0} \right) \theta_n. \end{aligned}$$

この線形化方程式の固有値 λ_n は次のように与えられる。

$$\lambda_n = \pm \frac{1}{2 \sin^2 \theta_0} \sqrt{(|n| - \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0) - \kappa_2 \cos \theta_0) |n|},$$

ただし $\kappa_1 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\pi}{2\pi}$, $\kappa_2 = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\pi}$ である. したがって, もし n が

$$|n| < \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0) + \kappa_2 \cos \theta_0, \quad (3)$$

を満たしていれば, 摂動のフーリエスペクトル $\theta_n(t)$ と $\varphi_n(t)$ は中立安定になる. 一方で十分大きな n に対しては正の固有値は漸近的に $\frac{|n|}{2 \sin^2 \theta_0}$ に近づくので, 平面における Kelvin-Helmholtz 不安定性と同様の成長をする. このことから, 極渦の存在により, 摂動の低次モードのいくつかが中立安定になるが, 十分高次のモードの不安定化は抑えられないことがわかる.

この線形安定性の結果を二つの具体的な場合で考察する. まず第一は二つの極渦の大きさが等しい時, $\kappa_2 = 0$ を考える. 安定性の条件 (3) は

$$|n| < \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0). \quad (4)$$

のようになる. したがって, 極渦がない場合, すなわち $\kappa_1 = 1$ の時, 摂動の第一スペクトル $\theta_1(t)$ と $\varphi_1(t)$ は赤道を除く任意の場所で中立安定になっている. 一方, κ_1 を固定して考えると, 渦層の位置 θ_0 が極に近づくにつれて, 中立安定になるフーリエ係数の数は増加する.

次に地球上の渦度の総和が 0 になっている場合を考える. この時 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -2\pi$ なので, 安定性の条件は

$$|n| < \kappa_2 \cos \theta_0. \quad (5)$$

に等価である. これによると北極渦が南極渦より強い場合, つまり $\Gamma_1 > \Gamma_2$ の時, 北半球にある渦層はいくつかの中立安定な低次のフーリエスペクトルを持つ. 逆に南半球にある渦層については, すべてのフーリエスペクトルは不安定である.

4 特異点の発生

球面渦層に発生する特異点を数値計算によって検出する. 特異点を数値的に精度よく調べる方法として, Sulem らによるスペクトル検出法 [14] が知られているので, 我々もこれを利用する. この方法では, まず解のフーリエ係数が十分時間が経過した後には次の漸近形を持つと仮定する.

$$\begin{aligned} |\theta_n(t)| &\sim C_\theta n^{-p_\theta} \exp(-\delta_\theta n), \\ |\varphi_n(t)| &\sim C_\varphi n^{-p_\varphi} \exp(-\delta_\varphi n), \end{aligned}$$

なお C_θ や C_φ , p_θ , p_φ , δ_θ , δ_φ は n よらないパラメータである. それから, 渦層方程式を数値的に解いて, 各時間ステップ毎に得られた数値データから上の解の漸近形への最小二乗法によるあてはめを行って, これらのパラメータの値を求める. そして最後に δ_θ と δ_φ が 0 になる時刻を推定する. この時間

において、解のフーリエスペクトルはベキ減衰となり、ここで解は特異性を持つことになる。パラメータ p_θ と p_φ は解の何階微分が爆発するかを決定するパラメータである。なお、このような方法で渦層に現れる特異点を検出する研究はこれまでも数多く行われている [2, 5, 7, 10, 13].

さて、このような数値検出法がうまく働くためには、かなり精度の高い数値計算が要求されるが、渦層の方程式は Kelvin-Helmholtz 不安定性から Hadamard の意味で非適切な問題なので、僅かな数値的な丸め誤差が混入するだけでも、その誤差が急激に拡大して数値計算は破綻してしまう。また方程式には特異積分が含まれているため単純な台形公式では精度が上らない。こうした問題について、我々は Krasny によるフーリエフィルタリングの方法 [2] と Sidi と Israeli[12] による交代選点台形公式を用いて、高精度の数値計算を実現した。また、時間方向の積分には 4 段 4 次の Runge-Kutta 法を用い、渦層は $N = 4096$ 点で離散近似している。なお、数値計算の初期値として次を用いた。

$$\theta(\alpha, 0) = \theta_0 + 0.01 \sin \alpha, \quad \varphi(\alpha, 0) = \alpha + 0.01 \sin \alpha, \quad (6)$$

図 1 は $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\pi$ および $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \pi$ の場合の解の特異点の生成時刻を渦層の位置 θ_0 に対してそれぞれプロットしたものである。前述の安定性の条件 (4) によると、第一の場合すべての摂動のスペクトルは不安定、第二の場合は第一スペクトル $\theta_1(t)$ と $\varphi_1(t)$ が中立安定、第三の場合は第一と第二スペクトルが中立安定である。この図からわかることは、中立安定なモードが多い程、解の存在時間は長くなっているが、いずれの場合でも特異性が発生するということである。したがって、極渦が存在しても特異性の発生は抑制できない。その理由は、極渦によって低次のスペクトルが安定になるものの、方程式の持つ非線形性により初期の摂動が徐々に高次のスペクトルの摂動を励起するため、結局のところ極渦による線形安定性で抑えきれない高次モードの不安定性が解の特異点の生成につながるからである。また、渦層の位置 θ_0 が極に近付くと、解の存在時間が短くなっているが、これは回転速度が $\theta_0 \rightarrow 0$ で $V_0 \rightarrow \infty$ になることに由来する。ちなみに、このいずれの場合も発生する特異性は平面の場合と同様曲率の爆発 $p_\theta \sim 2.5$, $p_\varphi \sim 2.5$ である。

次に、 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -2\pi$ とし $\Gamma_1 > \Gamma_2$ の場合の特異性の発生時刻を図 2 に示す。線形安定性から、この場合は北半球の渦層の方が多くの安定な低次フーリエスペクトルを持つが、この図も安定なモードが多い程解の存在時間が長くなる傾向にあることを示している。なお、本来であれば渦層が北極に近付く程安定なモードは多くなり、極ほど解の存在時間は長くなりそうだが、実際には中緯度領域でピークを迎えている。これは北極付近では渦層の線形安定性による特異化よりも極に近付くことによる特異性の方が強く寄与しているためである。

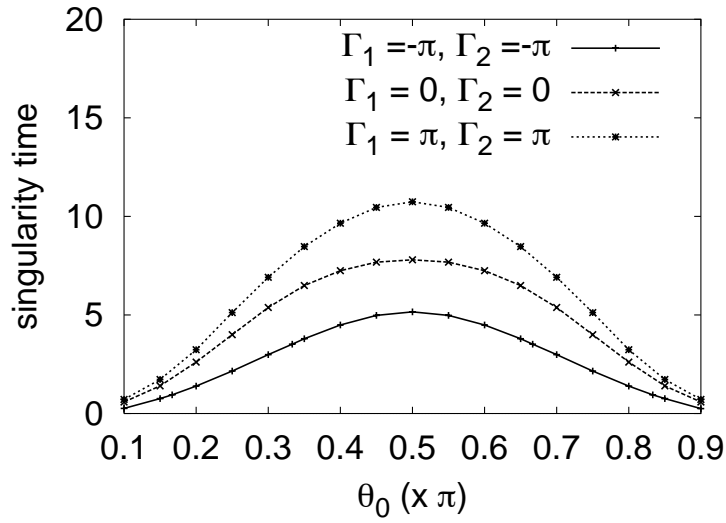


図 1: 極渦の大きさが $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \pm\pi$ の場合の, 渦層の位置 θ_0 に対する特異点発生時刻. 二つの渦糸の強さの和 $\Gamma_1 + \Gamma_2$ が増加して安定な低次のモードが増える程, 解の存在時間は長くなる.

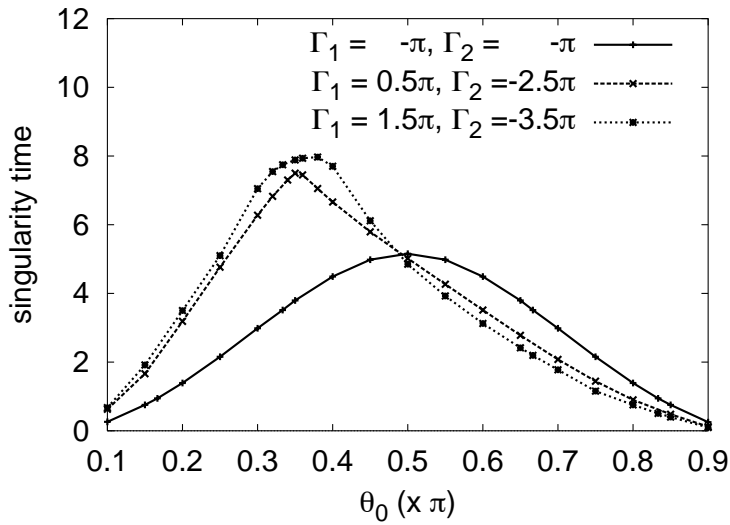


図 2: 極渦の強さが $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -2\pi$ かつ $\Gamma_1 > \Gamma_2$ の場合の, 渦層の位置 θ_0 に対する渦層の解の特異点発生時刻の様子. 安定な中立モードを多く持つ傾向にある北極渦層の方が存在時間が長い.

5 長時間発展

最後に渦法により渦層の方程式を以下のように正則化して、その長時間発展を数値計算する。

$$\theta_t = -\frac{1}{4\pi}PV \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta' \sin(\varphi - \varphi')}{1 - \cos \gamma + \sigma^2} d\alpha', \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t = & -\frac{1}{4\pi}PV \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') - \sin \theta \cos \theta'}{\sin \theta (1 - \cos \gamma + \sigma^2)} d\alpha' \\ & + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Gamma_1}{1 - \cos \theta} - \frac{\Gamma_2}{1 + \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

$\sigma > 0$ は渦法の正則化パラメータである。初期値は次を用いている。

$$\begin{aligned} \theta(\alpha, 0) &= \frac{\pi}{3} + 0.01 \sin \alpha, \\ \varphi(\alpha, 0) &= \alpha + 0.01 \sin \alpha. \end{aligned}$$

その数値計算結果を三つ示す。図3は極に渦がない時の正則化渦層の長時間発展である。時刻 $t < 10$ まで、渦層は安定に時間発展するが、それ以後不安定化して4つの螺旋渦を持つ渦構造に発展する。次に図4は $\Gamma_1 = -2.5\pi$ および $\Gamma_2 = 0.5\pi$ の場合の数値解である。この場合は解がすぐに不安定化して螺旋に巻き上がるが、渦巻は一つしか発生しない。最後の図5は北極渦と南極渦の強さがそれぞれ $\Gamma_1 = 1.5\pi$ そして $\Gamma_2 = -3.5\pi$ の時の時間発展である。こちら時刻 $t = 18$ になるまで渦層は安定であるが、結局は不安定化して、5つの二重螺旋渦巻を構成する。

これら結果と極渦の存在との関連について述べる。まず、極渦のない場合は初期摂動 $\theta_1(t)$ と $\varphi_1(t)$ が中立安定であり、二番目の例ではすべてのスペクトルが不安定、最後の例では第一と第二フーリエスペクトルが中立安定になっている。次に最終的に現れる渦巻の数は、それぞれ4つ、1つ、5つとなっている。最後に解が不安定化して巻き上がる時刻は、中立安定なモードの数が多いほど、遅くなっている。この事実から次のように考察できる。線形中立安定なモードの数が増えると安定性が増すので、解が不安定化するのに長い時間がかかるが、方程式の非線形性より高次の不安定モードにエネルギーが移行すると、そのモードが急激に成長して結果として解全体が不安定になる。さらに、この不安定なモードのうち、どれかが選択的に大きくなって解全体の形状を決まるので、低次の中立安定モードの数が多い程、最終的に出現する渦巻の数は多くなる。

6 まとめ

極渦を持つ球面上にある渦層の線形安定性と特異点形成、長時間発展を数理的および数値的に調べた。それによると、極渦の大きさと渦層の位置に応じ

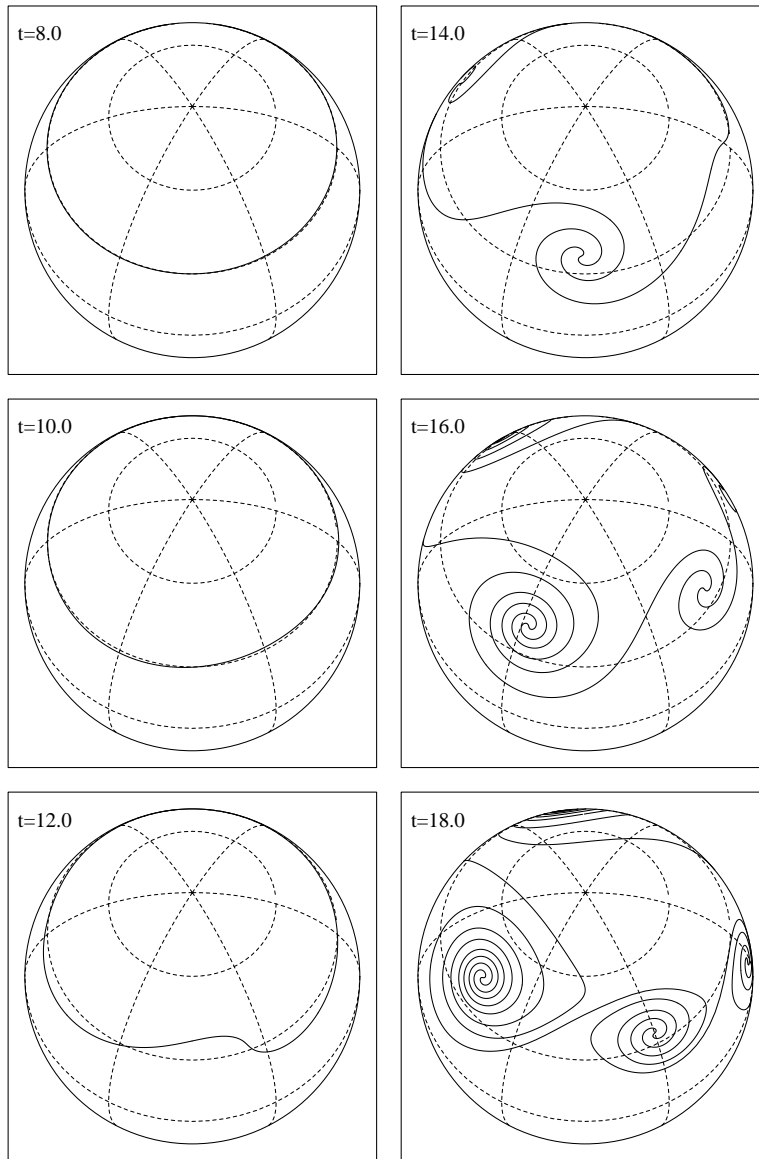


図 3: 極渦がない場合の渦層の長時間発展

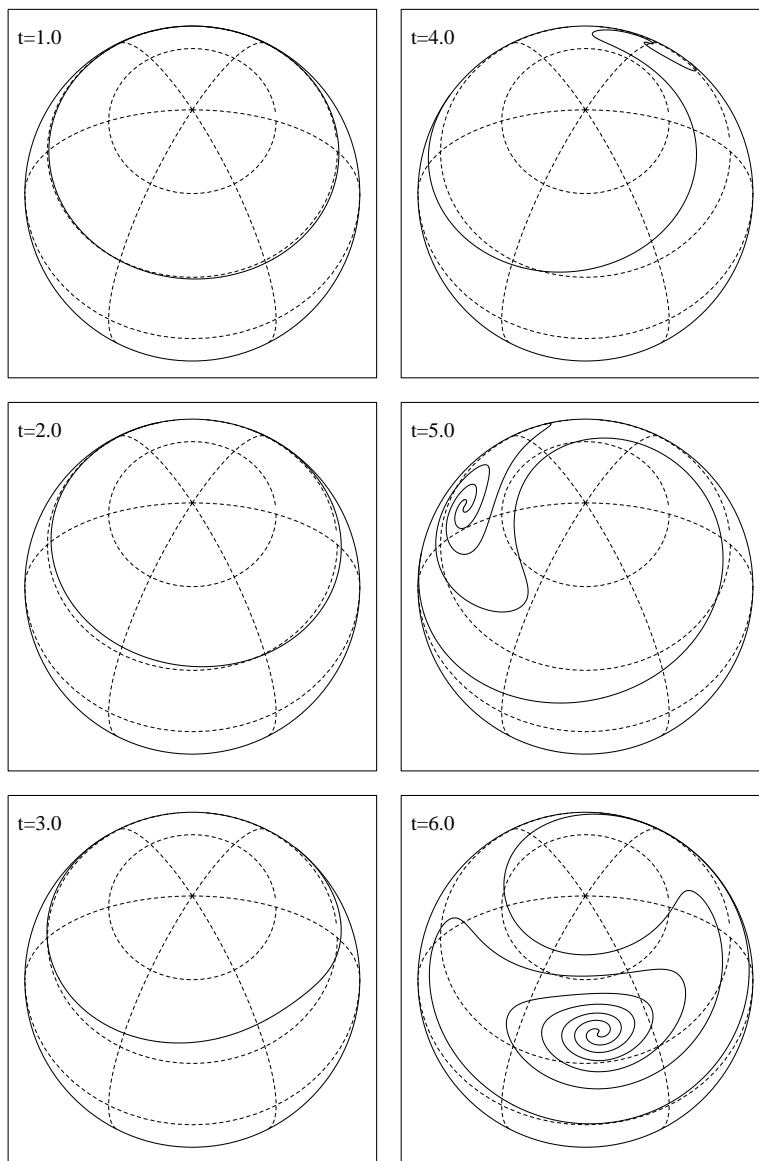


図 4: 極渦の大きさが $\Gamma_1 = -2.5\pi$, $\Gamma_2 = 0.5\pi$ の時の渦層の長時間発展

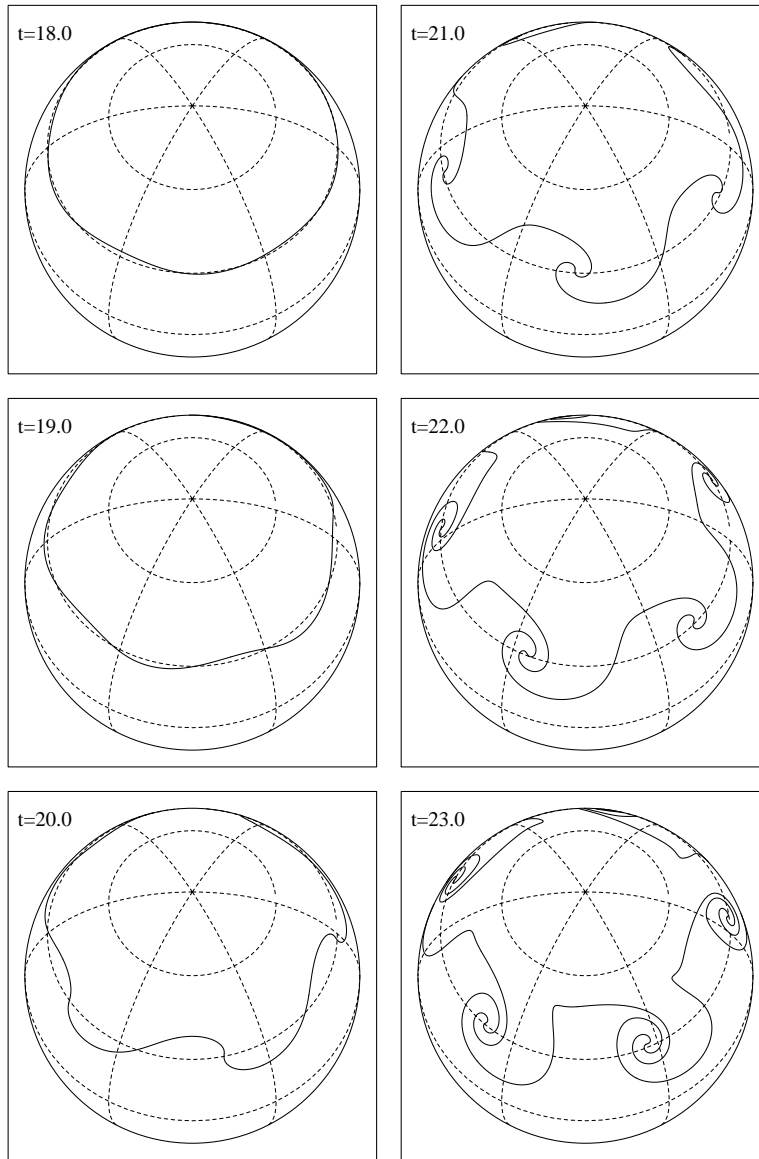


図 5: 極渦の大きさが $\Gamma_1 = 1.5\pi$, $\Gamma_2 = -3.5\pi$ の時の長時間発展

て、いくつかの低次の摂動のフーリエモードが線形中立安定になることがわかった。この安定性により、安定なモードが増える程、解は安定に長時間存在する。しかし、方程式の持つ非線形効果により初期の安定モードに加えた摂動から徐々に高次の不安定モードが励起され、それが急激に不安定化することで解全体も不安定化し、その結果、渦層には二次元と同様の曲率特異性が有限時間で発生する。さらに、渦法による正則化方程式の長時間発展の数値計算からは、解が安定なモードを持てば持つほど、より多くの渦巻きを持つ複雑な形状へ移行することがわかった。このような線形安定性が増す程、運動が複雑になって行く過程は、せん断流を持つ二次元渦層の運動 [11] においても見られた現象である。

最後に正則化渦層の長時間発展について議論しておく。数値計算の結果が示すように、中立安定なモードが増えれば現れる渦巻きの個数が増える。しかし、例えば図 3 の場合、モード 1 の摂動が中立安定だからといって 2 個の渦巻きが現れるわけではなく 4 つの渦巻が現れる。すなわち安定なモードの番号と現れる渦巻の数には単純な関係がないことを示している。どのようなメカニズムでこの渦巻の個数が選択されるかを考えることは今後の面白い課題である。

また、図 3 の渦巻きの中心は時間がたつにつれて緯度方向に大きくずれ運動を伴うが、一方図 5 では、渦巻の数が多いながらも、その中心は緯度方向に運動せず経度方向に回転するのみである。長時間発展後の渦巻き構造のこうした運動の違いが何によるのかを調べるために現在は極渦を持つ球面の上の渦糸系の安定性などを調べており、その解釈が可能になっているが、この点については別のところで報告したい。

参考文献

- [1] R. Krasny, Desingularization of periodic vortex sheet roll-up, *J. Comput. Phys.* vol. **65**, 292–313 (1986).
- [2] R. Krasny, A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation, *J. Fluid Mech.* vol. **167**, 65 (1986).
- [3] J. Liu and Z. Xin, “Convergence of vortex methods for weak solutions to the 2-D Euler equation with vortex sheet data,” *Comm. Pure Appl. Math.* **48**, pp.611-628 (1995).
- [4] D.W. Moore, The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. **365**, 105–119 (1979).

- [5] Q. Nie and G. Baker, Application of adaptive quadrature to axisymmetric vortex sheet motion, *J. Comput. Phys.* vol. **143**, 49 (1999).
- [6] M. Nitsche and R. Krasny, A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube, *J. Fluid Mech.* , vol. **276**, 139-161 (1994).
- [7] M. Nitsche, Singularity formation in a cylindrical and a spherical vortex sheet, *J. Comput. Phys.*, vol. **173**, 208 (2001).
- [8] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992)
- [9] T. Sakajo and H. Okamoto, “Numerical computation of vortex sheet roll-up in the background shear flow,” *Fluid Dyn. Res.* **17**, pp. 195–212 (1996).
- [10] T. Sakajo, Formation of curvature singularity along vortex line in an axisymmetric, swirling flow, *Phys. Fluids*, vol. **14** No.8, 2886-2897 (2002).
- [11] T. Sakajo, Motion of a vortex sheet on a sphere with pole vortices, to appear in *Phys. Fluids*.
- [12] A. Sidi and M. Israeli, “Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations,” *J. Sci. Comp.* **3**(2), pp.201–231 (1988).
- [13] M.J. Shelley, A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method, *J. Fluid Mech.* vol. **244**, 493 (1992).
- [14] C. Sulem, P.L. Sulem, and H. Frisch, Tracing complex singularities with spectral methods, *J. Comput. Phys.*, vol. **50**, 138 (1983).

反応拡散場での粒子運動の数理モデルについて

長山 雅晴 (京都大学・数理解析研究所・助手)

1 はじめに

界面活性剤の一種である樟脳粒は、樟脳分子を水面上に展開することによって表面張力を変化させ、水面上で自発的に運動することが知られている。最近の実験から、固形樟脳のスイッチング現象、2隻の樟脳舟の引き込み現象、固形カンフェンの間欠運動など、表面張力の変化だけでは理解できない運動が提示された。このような現象を数理的側面から理解するために、Newtonの運動方程式と反応拡散方程式の結合した数理モデルを提出し、樟脳粒の自発的周期運動の機構 [1] や樟脳舟の相互作用機構 [2] を明らかにした。特に、樟脳舟の相互作用には表面張力の変化によって生じる流れの効果が重要であることがわかった。

最近、水溶液中の化学物質と化学反応を起こす界面活性剤に対する実験において、これまでの樟脳運動では見られない新しい運動が報告された。一つはリン酸緩衝液上での樟脳酸舟の間欠運動であり [3]、もう一つは硝酸第一鉄溶液上でのフェナントロリン円盤の間欠運動である [4]。この論文では、これらの間欠運動の機構を数理的に理解するために数理モデルを構築し、数値計算によって間欠運動の仕組みを理解することを目標にする。

2 樟脳酸運動の数理モデル

リン酸緩衝液上の樟脳酸舟の運動を考察した実験により、リン酸濃度に依存して樟脳酸舟の速度が周期的に変動する現象を報告している。図 1 はリン酸イオン溶液上での樟脳酸舟の速度の時間変化を示している。初期のリン酸濃度がゼロのとき、樟脳酸舟は等速運動をしている (図 1(a))。リン酸の初期濃度を高くすると、樟脳酸舟は間欠運動する (図 1(b))。樟脳酸膜はリン酸と気水界面の近くで化学反応を起こし溶液中に溶け込みに、膜は界面上に展開できなくなる。従って、表面張力は変化しなくなり樟脳酸舟が動かないことは容易に理解できる。しかしながらこの説明だけでは速度の周期的変動を説明することはできない。そこで我々はこの樟脳酸舟に現れる現象を数理的に理解するために樟脳酸舟の数理モデルを構築し、振動現象の機構を理解する。

リン酸イオンの濃度に依存した樟脳酸舟の運動を数理的に理解するために、直線状水路内での樟脳酸舟の数理モデルを導入する。そして、数値計算によって数理モデルから舟の間欠振動現象を数理的に解釈することを考える。最初に、樟脳酸粒が非常に小さいと仮定し、樟脳酸粒を質点で表現し樟脳酸舟を次のような 2 質点剛体で近似する：

$$(x_1(t), x_2(t)) = (x_c(t) + \ell, x_c(t) - \ell) \quad (1)$$

ここで、 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_c(t)$ はそれぞれ樟脳酸舟の船首、船尾、舟の中心を表しており、 2ℓ は舟の長さとなる。このとき、樟脳酸舟の運動は次のような Newton の運動方

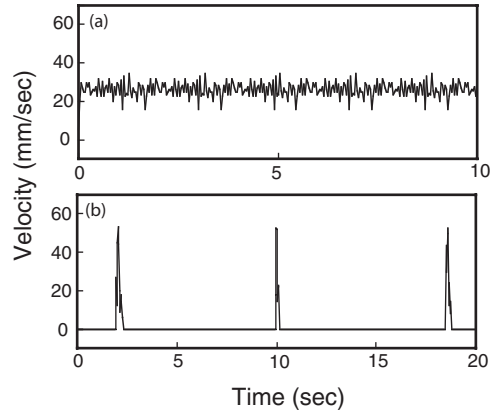


図 1: 異なるイオン強度のリン酸水溶液上での樟脳酸舟の速度の時間変化 ((a) 0 (pure water), (b) 0.4(PBS-04)).

程式で表現する ([1], [2]):

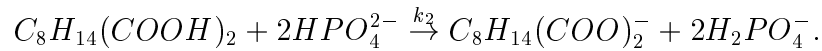
$$\rho \ddot{x}_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x} \gamma(u(x_i(t), t)) - \mu \dot{x}_c(t), \quad (2)$$

ここで, $\gamma(\text{N/m})$ は水面の表面張力, $u(x, t)(\text{mol/m}^2)$ は樟脳酸粒から供給される樟脳酸膜の表面濃度, $\rho(\text{kg/m}^2)$ は樟脳酸舟の表面積密度, μ は表面の粘性抵抗, $e_i(\text{s}\cdot\text{m}/\text{N})$ は対流項に対する定数で負の抵抗のような効果を持つ. 導出の詳しい方法は [2] を参照のこと. 表面張力と界面活性剤の関係として, 界面活性剤が増加すると表面張力は弱くなることを実験結果から得た [4]. 更に, 表面張力はわずかな界面活性剤の濃度によって変化しないことが実験によって知られている [5]. これらの実験結果に基づいて我々は表面張力と界面活性剤の関係を次のように仮定した:

$$\gamma(u) = \frac{\gamma_0}{1 + au^m} + \gamma_1, \quad (3)$$

ここで $\gamma_0 + \gamma_1$ は水の表面張力 (N/m), γ_1 は樟脳酸膜濃度に依存した最小の表面張力である.

次に樟脳酸膜の表面濃度 $u(x, t)$ とリン酸イオンの濃度 $v(x, t)$ に対するモデル方程式を考える. 樟脳酸分子は気水界面のまわりでリン酸イオンと次のような反応を起こしてイオン化し水溶液中に溶解する:



上記の化学反応は気水界面近くでしか起こらないことと樟脳酸舟の運動は界面上であることを考慮し, 気水界面だけの反応拡散系を用いて次のように記述する:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_1 u - k_3 u v^2 + F(x, x_2(t); r_0), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2k_3 u v^2, \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad (4)$$

ここで, $u = [C_8H_{14}(COOH)_2]$, $v = [HPO_4^{2-}]$, D_u (m/s²) は気水界面での樟脳酸膜濃度の拡散係数, D_v は溶液中でのリン酸イオン濃度の拡散係数, k_1 (1/s) と k_3 (mol/m²·s) はそれぞれ昇華率と反応率を表し, r_0 は樟脳酸粒の半径, L は直線状水路の長さを表す. 関数 F (mol/m²·s) は気水界面上での樟脳酸粒から樟脳酸膜に変化する影響を記述している. (2) では樟脳酸粒を質点で近似しているけれども, 樟脳粒の大きさの依存性を考えるために樟脳粒の半径を導入する. 従って関数 F を次のように定義する:

$$F(x, x_2; r_0) = \begin{cases} k_2 S_0, & |x - x_2| \leq r_0, \\ 0, & |x - x_2| > r_0, \end{cases} \quad (5)$$

ここで, S_0 は樟脳酸粒による供給量, k_2 は樟脳酸粒からの供給率である. 我々は「樟脳酸粒から樟脳酸膜への供給によって樟脳粒の大きさは変化しない」と仮定する. これにより r_0 は定数とすることができる.

境界条件として次のような条件をかす:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(L, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(L, t) = 0. \quad (6)$$

リン酸イオンの初期濃度依存性を調べるために, 次の初期条件を使う:

$$\begin{cases} u(x, 0) \equiv 0, & v(x, 0) = v_0(x), \\ x_c(0) = x_0, & \dot{x}_c(0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

ここで $v_0(x)$ はリン酸イオンの初期濃度関数であり, x_0 は舟の位置を表す定数である. 実験条件において水溶液中でのリン酸イオンは初期状態で一様に攪拌されていることから, ここでは $v_0(x)$ を定数関数とする. 最後に, 解が一意であるための条件として次を課す:

$$u(\cdot, t) \in C^1(0, L). \quad (8)$$

数値計算を行う前に(2)-(7)の無次元化を行う. 次のような無次元化定数と変数を導入する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = k_2 t, \quad y = \sqrt{\frac{k_2}{D_u}} x, \quad y_i = \sqrt{\frac{k_2}{D_u}} x_i, \quad (i = 1, 2, c), \\ U = \frac{u}{S_0}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad D = \frac{D_v}{D_u}, \quad \hat{\mu} = \frac{\mu}{\rho k_2}, \\ E_i = e_i D_u \rho k_2^2, \quad \hat{\ell} = \sqrt{\frac{k_2}{D_u}} \ell, \quad \Gamma_0 = \frac{\gamma_0}{D_u \rho k_2}, \quad \Gamma_1 = \frac{\gamma_1}{D_u \rho k_2}, \\ K_1 = \frac{k_1}{k_2}, \quad K_2 = \frac{k_3}{k_2} v_0^2, \quad K_3 = 2 \frac{k_3}{k_2} v_0 S_0. \end{array} \right. \quad (9)$$

そして, $\tau, y, y_i (i = 1, 2, c), \hat{\mu}, \hat{\ell}, L_y = \sqrt{k_2/D_u}L$ をそれぞれ $t, x, x_i (i = 1, 2, c), \mu, \ell, L$ と書き換えると, 我々は次のような無次元化モデル方程式を得る:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(U(x_i(t), t)) - \mu \dot{x}_c(t), \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - K_1 U - K_2 UV^2 + F(x, x_2(t); R_0), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - K_3 UV^2, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t > 0, \\ t > 0, \quad x \in (0, L), \end{array} \quad (10)$$

初期条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, 0) \equiv 0, \quad V(x, 0) \equiv 1, \\ x_c(0) = x_0, \quad \dot{x}_c(0) = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

境界条件:

$$\frac{\partial}{\partial x} U(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} U(L, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} V(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} V(L, t) = 0, \quad (12)$$

ここで $\Gamma(U)$ と $F(x, x_2; R_0)$ はそれぞれ

$$\Gamma(U) = \frac{\Gamma_0}{1 + AU^m} + \Gamma_1, \quad (13)$$

$$F(x, x_2; R_0) = \begin{cases} 1, & |x - x_2| \leq R_0, \\ 0, & |x - x_2| > R_0, \end{cases} \quad (14)$$

となる. このとき次の無次元化定数を用いた:

$$R_0 = \sqrt{\frac{k_2}{D_u}} r_0, \quad A = a S_0^m.$$

v_0 を自由パラメータとし, 他のパラメータを次のように固定しての数値計算をおこなう:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.1, & \ell &= 1.0, & R_0 &= 0.7, & D &= 0.000001, \\ k_1 &= 2.0, & k_2 &= 3.0, & k_3 &= 1.0, & S_0 &= 1.0, \\ m &= 3, & A &= 2.0, & \Gamma_0 &= 1.0, & \Gamma_1 &= 0.2. \end{aligned}$$

ここで, 樟脳酸膜の表面拡散は水溶液中のリン酸イオンの拡散と比較して非常に速いので, D は十分小さいと仮定した. 我々は無次元化方程式系(10)に基づいて数値計算を実行するが, 実験結果と数値計算結果の比較のために本文中では K_2 と K_3 の代わりに v_0 をパラメータとして表示する.

モデル方程式系(10)-(14)の数値計算により次の結果が得られた: v_0 が小さいとき ($v_0 = 1.0$), 樟脳酸舟は等速運動する (図 2(a)). v_0 を大きくすると ($v_0 = 50.0$), 舟の速

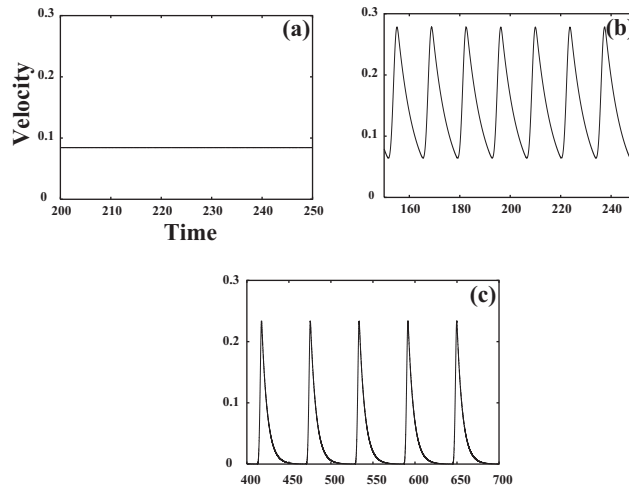


図 2: リン酸濃度に依存した樟脳酸舟の中心点 $x_c(t)$ の速度の時間変化．パラメータは(2)と同じ値: (a) 等速運動 ($v_0 = 1.0$); (b) 周期振動運動 ($v_0 = 50.0$); (c) 周期間欠運動 ($v_0 = 300.0$).

度は周期的に振動する (図 2(b)). この結果から, v_0 を大きくすると樟脳酸舟の運動は Hopf 分岐によって等速運動から周期振動運動に変化することを示唆している. さらに v_0 を大きくすると ($v_0 = 300.0$), 樟脳酸舟の運動は周期間欠運動となる (図 2(c)). この結果から, 周期間欠運動は等速運動から分岐した周期振動の一部であることが示唆されている. さらに, この数値計算において, 樟脳酸とリン酸の拡散係数の比が十分大きくないと間欠現象は出現しないことがわかった. これらの数値計算結果を整理することで, 間欠現象が出現するには, 水溶液中のリン酸濃度に加えて, 樟脳酸膜とリン酸の拡散係数の比が重要な要因であることがわかった [6].

また, 樟脳酸円盤の間欠振動に関しても, 間欠現象の数理的再現に成功した.

3 フェナントロリン粒子運動の数理モデル

界面活性作用を持つフェナントロリン粒子を使った実験により, フェナントロリン粒子が 2 価の鉄イオン濃度に依存して, 等速運動から間欠運動へ変化することが示された. この間欠運動は樟脳酸の間欠運動と同様に, 鉄イオンとの化学反応によってフェナントロリン膜が水面に展開されないことに起因していると考えられる. しかし, リン酸濃度をさらに高くすると停止してしまう樟脳酸に対して, フェナントロリン粒子は鉄イオン濃度をさらに高くすると再び等速運動をすることが実験により示された. この実験結果を説明するために次のような仮説が立てられている: (1) 「化学反応によって生成されたフェロインが化学反応を阻害する」という反応阻害説; (2) 「鉄イオンが高濃度の等速運動はフェロインが駆動となっている」というフェロイン駆動力仮説. このような仮説に基づいた数理モデルを構築し, 等速運動 間欠運動 等速運動という一連の変化が何に起因して起こるのかを数理的立場から明らかにし, 運動のメカニズムを数理の側面から提案することがこの章での目標である. そのために最初にフェナントロリン粒子運動の数理モデルを構築する. 実験結果から, フェナ

ントロリン粒子 (粒子) の位置 $x_c(t)$, 気水界面でのフェナントロリン膜濃度 $u(x, t)$ と 2 価鉄イオン濃度 $v(x, t)$, 気水界面上でのフェロイン濃度 $w(x, t)$, 溶液中でのフェロイン濃度 $c(x, t)$ を未知変数とし , 1 次元水路での粒子運動の数理モデルを考える . 粒子の運動方程式はこれまで研究してきた運動方程式を使って次のように与える ([1]) :

$$\rho \ddot{x}_c(t) = \frac{\partial}{\partial x} \gamma(u(x_c(t), t)) - \mu \dot{x}_c(t). \quad (15)$$

ここで ρ, μ は正定数でそれぞれ面密度 , 粘性抵抗である . $\gamma(u)$ は表面張力であり , フェナントロリン膜濃度とフェロイン膜濃度の関数として次のように仮定する :

$$\gamma(u) = \frac{\gamma_0}{1 + a_u u^{M_u} + a_w w^{M_w}} + \gamma_1 \quad (16)$$

ただし , $\gamma_0 + g a_1$ は水の表面張力 , γ_1 はフェナントロリン膜濃度とフェロイン膜濃度に依存して変化する最小の水の表面張力 , a_u, a_w, M_u, M_w は正定数である . 次に , u, v, w, c に対する数理モデルを与える . フェナントロリンと鉄イオンは気水界面の近くだけで反応しているので , 水溶液中の鉄イオン濃度の変化を無視して , 次のような界面近傍だけのモデル方程式を考える :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_1 u - 3k_3(w)u^3v + F(x, x_c(t); r_0), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - k_3(w)u^3v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_3(w)u^3v - k_4(c)w. \\ \frac{\partial c}{\partial t} = -k_4(c)w. \end{array} \right. \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad (17)$$

ただし , D_u, D_v, D_w はそれぞれフェナントロリン膜 , 2 価鉄イオン , フェロインの拡散係数 , k_1 は昇華率 , $k_3(w)$ はフェナントロリン膜と鉄イオンの反応率 (フェロインによる反応阻害効果を導入) であり , $k_4(c)$ はフェロインが溶液中に溶ける溶解率 (溶液中のフェロインによる飽和を考慮) , L は水路長である . ここで F は粒子からフェナントロリン膜が供給される項であり

$$F(x, x_c; r_0) = \begin{cases} k_2 S_0, & |x - x_c| \leq r_0, \\ 0, & |x - x_c| > r_0, \end{cases} \quad (18)$$

とおく . ただし , k_2, S_0, r_0 は正定数であり , それぞれ溶解率 , 粒子密度 , 粒子半径である . そして , 鉄イオン濃度に依存した粒子運動を調べるために次のように初期条件を与える :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) \equiv 0, \quad v(x, 0) \equiv v_0, \quad w(x, 0) \equiv 0, \quad c(x, 0) \equiv 0, \\ x_c(0) = x_0, \quad \dot{x}_c(0) = x_1. \end{array} \right. \quad (19)$$

我々は (15)–(19) を適当な境界条件下で数値計算をすることによって , v_0 に依存して粒子運動がどのように変化するかを調べる . (15)–(18) は樟脳酸運動の数理モデルを

拡張した形になっている． k_3 が定数の場合はほぼ樟脳酸運動の方程式と同等になり， v_0 が大きくなれば間欠運動することが期待できる．しかしながら我々の期待に反して数理モデル(15)-(18)においては間欠運動は再現されなかった．たとえ v_0 を大きくしたとしても等速運動を行なうことが数値計算結果から示唆された．この結果から間欠運動の機構すら樟脳酸と異なることがわかった．そこで間欠運動の要因として重要なものが何であるかを調べるために，次のような一般化した間欠運動の数理モデルを考える：

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_c(t) = \frac{\partial}{\partial x} \gamma(u(x_c(t), t)) - \mu \dot{x}_c(t), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_1 u - k_3 u^{m_1} v^{m_2} + F(x, x_c(t); r_0), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - k_3 u^{m_1} v^{m_2}, \\ \gamma(u) = \frac{\gamma_0}{1 + au^{M_u}} + \gamma_1. \end{array} \right. \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad (20)$$

(20) に対して $v_0 = 100.0$ と固定して数値計算を行った．その結果， $m_1 = 1, m_2 = 2$ の場合には間欠運動する現象が出現する (図 3(a)) が， $m_1 = 3, m_2 = 1$ の場合には振動運動すら起きないことがわかった (図 3(b))．さらに詳しく数値計算することによって，反応次数によって Hopf 分岐を起こすことがわかった (図 4)．この数値計算から化学反応に起因する間欠運動には反応次数が重要な要因となることがわかった．従って「フェナントロリン - 鉄イオン」反応系に現れる間欠運動のメカニズムは「樟脳酸 - リン酸」反応系に現れる間欠運動のメカニズムと異なっていると考えられる．現在のところフェナントロリンと鉄イオンの化学反応系に対する数理モデル化の成功には至っておらず，今後の課題となっている．

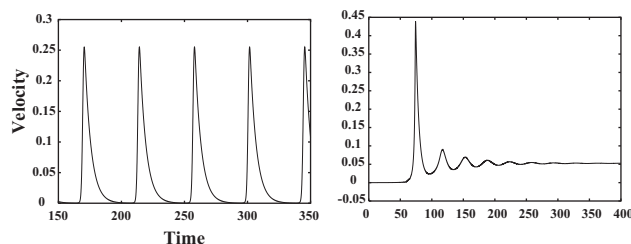


図 3: 反応次数に依存した $x_c(t)$ の速度の時間変化: (a) 間欠運動 ($m_1 = 1, m_2 = 2$); (b) 等速運動 ($m_1 = 3, m_2 = 1$) . パラメータは以下のとおりである: $\mu = 0.2, \gamma_0 = 2.0, \gamma_1 = 0.2, D = 0.000001, k_1 = 3.0, k_2 = 2.0, k_3 = 1.0, S_0 = 1.0, a = 2.0, M_u = 3, r_0 = 0.8$.

参考文献

- [1] Y. Hayashima, M. Nagayama and S. Nakata, “A camphor oscillates while breaking symmetry”, *Journal of Physical Chemistry B* **105**(22) (2001), 5353-5357.

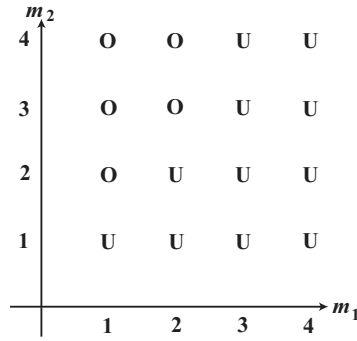


図 4: (m_1, m_2) を自由パラメーターとしたときの $x_c(t)$ の運動: U: 等速運動, O: 振動運動, $v_0 = 100.0$ を除きパラメータは図 4 と同じ.

- [2] M. I. Kohira, Y. Hayashima, M. Nagayama and S. Nakata, “Synchronized self-motion of two camphor boats ”, *Langmuir* **17** (2001), 7124-7129.
- [3] S. Nakata, Y. Hayashima, and T. Ishii, “Self-motion of a camphoric acid boat as a function of pH of aqueous solutions”, *Coll. Surf. A*, **182** (2001), 231-238.
- [4] S. Nakata, S. Hiromatsu and H. Kitahata, “Multiple Autonomous Motions Synchronized with Complex Formation”, *Journal of Physical Chemistry B* **107** (2003), 10557-10559.
- [5] I. Langmuir, “The Constitution and Fundamental Properties of Solids and Liquids. II. Liquids”, *J. Am. Chem. Soc.* **39** (1917), 1848–1906.
- [6] Y. Hayashima, M. Nagayama, Y. Doi, S. Nakata, M. Kimura and M. Iida, “Self-motion of a camphoric acid boat sensitive to chemical environment”, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **4**(2002), 1386-1392.

反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター

PDEs and Phenomena in Miyazaki: 2003/11/02

宇部工業高等専門学校・一般科 大崎浩一

〒755-8555 宇部市常盤台 2-14-1, osaki@ube-k.ac.jp

1. 序 .

1996年, 三村と辻川 [1] によって提案された次の反応・拡散・移流方程式系 (三村・辻川方程式) を考える:

$$(CG) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \nabla\{u\nabla\chi(\rho)\} + f(u)u, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = b\Delta \rho - c\rho + du, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界領域である. $u(x, t), \rho(x, t)$ はそれぞれ, 位置 $x \in \Omega$, 時刻 $t \in [0, \infty)$ における大腸菌の密度, 及び化学物質の濃度とする. 係数 a, b はそれぞれ大腸菌の拡散係数, 化学物質の拡散係数である. c, d はそれぞれ化学物質の崩壊率, 大腸菌による生成率を表す. (CG) 第1式, 右辺第2項は走化性の項である. $f(u)u$ は大腸菌 u の増殖を表す項であり, その割合が $f(u)$ であることを示す.

1991年, Budrene と Berg は実験によって大腸菌 (*E. coli*) が複雑な時空間パターンを形成することを観察した [2]. この様な走化性によるパターン形成のメカニズムを解明するため, 数々の数学モデルが提案されており [3, 4, 5, 6], 三村・辻川方程式はそのうちの1つである.

以下では次の仮定をする. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は C^3 級の境界を持つ有界領域. a, b, c , 及び d は正定数. 感応性関数 $\chi(\cdot)$ は $\rho \in [0, \infty)$ 上で定義された実数値をとる滑らかな関数で,

$$(X) \quad \sup_{\rho \geq 0} \left| \frac{d^i \chi}{d\rho^i}(\rho) \right| < \infty, \quad i = 1, 2, 3$$

を満たす. $\chi(\rho)$ の正規化された形としては $\rho, \log(\rho + 1), \frac{\rho}{\rho + 1}$ などがある (例えば [7]). 生成率 $f(\cdot)$ は $u \in [0, \infty)$ 上で定義された実数値をとる滑らかな関数で,

(f) 十分大きな u に対して

$$f(u) = -\mu u + \nu$$

を正定数 μ と定数 $-\infty < \nu < \infty$ について満たす. 関数 $f(u)$ の典型的な形は u が $[0, \infty)$ におけるある区間にあるときには2次関数 $-f_0(u - \alpha)(u - \beta)$, $0 < \alpha < \beta < \infty, f_0 > 0$, と一致し, u が十分大きければ, 1次関数 $-\mu u + \nu$ となるような関数である. 但し, $\mu > 0, -\infty < \nu < \infty$ ([1, 8] を参照).

三村・辻川方程式については，三村・辻川 [1] や辻川 [8] による特異摂動法と数値計算を用いたパターン形成，及び定常解の存在性とその安定性に関する結果がある．しかしながら，三村・辻川方程式そのものに対する時間発展解の存在や解の挙動に関する結果は得られていない．定常解の存在や安定性については，プラナー定常解の安定性に関する結果 [8] がある．

本講演では，(CG) の適切性，及び解の挙動を考察したい．適切性については，半群法を用いた時間局所解の構成と，アプリアリ評価による時間大域解の構成によって行う．解の挙動については，指数アトラクター (Exponential attractor) を構成することにより，これを行う．

H を Hilbert 空間とする．我々が半群法や無限次元力学系の理論を用いる際，(CG) を H における常微分方程式とみなして話を進めるが，その方法には，次の 2 通りが考えられる (もちろんそれ以外もあるだろう) ．

準線形設定
$$\frac{dU}{dt} + A(U)U = F(U), \quad U(0) = U_0 \quad \text{in } H$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}, \quad A(U) = \begin{pmatrix} -a\Delta + 1 & \nabla\{u\chi'(\rho)\nabla(\cdot)\} \\ 0 & -b\Delta + c \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} u \\ du \end{pmatrix}.$$

これは， $A(U)U$ を高次の項， $F(U)$ を低次の項とみなした場合，自然な設定である．ところが， H をうまく選ぶと，

半線形設定
$$\frac{dU}{dt} + AU = F(U), \quad U(0) = U_0 \quad \text{in } H$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a\Delta + 1 & 0 \\ 0 & -b\Delta + c \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} -\nabla\{u\chi'(\rho)\nabla(\cdot)\} \\ du \end{pmatrix}$$

が使える．我々は，半線形方程式に対する Temam 等の指数アトラクター存在定理を適用したいため，こちらを選択する．そして，もちろん半線形設定の方が準線形設定よりも扱いが楽である (例えば， $A(U)$ のリプシッツ条件を調べなくてよい) ．

2. 指数アトラクターの定義と存在定理．

可分 Hilbert 空間 H における次の半線形発展方程式を考える．

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), & 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

ここで， A は H において正定値自己共役であり，逆作用素 A^{-1} が H 上コンパクトであるような線形作用素． $F(U)$ は $D(A)$ から H への非線形作用素， U_0 は初期値で，集合 K に属する． K は初期値の集合で， H における連結部分集合とする． $U = U(t)$ は未知関数を表す．

我々は (E) が K において適切，すなわち，各 $U_0 \in K$ に対して一意時間大域解

$$U \in \mathcal{C}([0, \infty); K) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty); H) \cap \mathcal{C}((0, \infty); \mathcal{D}(A))$$

が存在し，初期関数に対して連続である (もし K で $U_{0,n} \rightarrow U_0$ ならば，各 $t \in (0, \infty)$ を固定するごとに $U_{0,n}$ に対する解 $U_n(t)$ が K において $U(t)$ に収束するという意味で) と仮定する．このことによって K 上の連続作用素 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ が定義される．特に， $S(t)$ は $t > 0$ に対して K から $\mathcal{D}(A) \cap K$ への作用素である．

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ に対するコンパクト吸収集合 $B \subset \mathcal{D}(A) \cap K$ の存在も仮定する． K におけるコンパクト吸収集合とは (それを B とすると) H においてコンパクトであり，任意の有界集合 ($B \subset K$) を有限時間 ($t_0: B$ に依存してもよい) で含んでしまう ($\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B \subset B$) 集合である．この集合の存在を仮定したとき，解の振る舞いを知る上で重要となる 2 つの集合の存在が保証される．1 つは，解が最終的に収束する場所であるグローバルアトラクターである．実際，定理 [9, Chapter I, Theorem 1.1] により $\mathcal{A} = \omega(B)$ がグローバルアトラクターとなる．もう 1 つはコンパクト吸収正不変集合である．これは B を用いて，例えば，

$$\mathcal{X} = \overline{\bigcup_{t \geq t_1} S(t)B}$$

と定義すれば得られる．但し， t_1 は $\bigcup_{t \geq t_1} S(t)B \subset B$ を満たすある数．いま \mathcal{X} は正不変かつ吸収集合であるから，時間が十分経過すれば，力学系 $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, K)$ はその部分力学系 $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, \mathcal{X})$ に帰着されることが分かる．

指数アトラクターは，力学系 $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, \mathcal{X})$ に対して以下のように定義される [10]．

定義 2.1. \mathcal{M} が力学系 $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, \mathcal{X})$ に対する指数アトラクターであるとは次の性質 (i)–(iv) を持つときにいう：

- (i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ ．
- (ii) \mathcal{M} は H においてコンパクトであり， $S(t)$ に対して正不変．
- (iii) \mathcal{M} は有限のフラクタル次元 $d_F(\mathcal{M})$ を持つ．
- (iv) $h(S(t)\mathcal{X}, \mathcal{M}) \leq c_0 \exp(-c_1 t)$ ， $t \geq 0$ を満たす．

ここで， c_0, c_1 は正定数， $h(B_0, B_1) = \sup_{U \in B_0} \inf_{V \in B_1} \|U - V\|_H$ ．

これらの前提の下，次の指数アトラクター存在定理 [10, Theorem 3.1] が示される．

定理 2.2. 非線形作用素 $F(U)$ は Lipschitz 条件

$$(F) \quad \|F(U) - F(V)\|_H \leq C \|A^{\frac{1}{2}}(U - V)\|_H, \quad U, V \in \mathcal{X}$$

を満たし，写像 $G(t, U_0) = S(t)U_0 : [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ は Lipschitz 条件，任意の固定した $T > 0$ に対し，

$$(G) \quad \|G(t, U_0) - G(s, V_0)\|_H \leq C_T \{|t - s| + \|U_0 - V_0\|_H\}, \quad t, s \in [0, T], U_0, V_0 \in \mathcal{X}$$

を満たすとする．このとき， $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, \mathcal{X})$ に対する指数アトラクター \mathcal{M} が存在する．

証明は、次のスキューニング性と呼ばれる条件を示すことによる: ある $\delta \in (0, \frac{1}{4})$, 及び有限ランク N を持つ直交射影 P が存在し, 各々の組 $U, V \in \mathcal{X}$ に対して

$$\|S_*U - S_*V\|_H \leq \delta \|U - V\|_H$$

もしくは

$$\|(I - P)(S_*U - S_*V)\|_H \leq \|P(S_*U - S_*V)\|_H$$

が成り立つ. 但し, $S_* = S(t_*)$, t_* は十分大きな数.

実際, 条件 (G) によって $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, \mathcal{X})$ に対する指数アトラクター存在の問題は離散力学系 (S_*, \mathcal{X}) に対する指数アトラクター \mathcal{M}_* の存在のそれへと帰着され (離散力学系に対する指数アトラクターも上と同様に定義される), この \mathcal{M}_* の存在は条件 (F) によって示される [10, Proposition 3.1]. また, \mathcal{M}_* についてそのフラクタル次元が

$$d_F(\mathcal{M}_*) \leq N \max \left\{ 1, \frac{\log(\frac{2L}{\delta} + 1)}{\log \frac{1}{4\delta}} \right\}$$

で評価できるため (但し, L は写像 $S_* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ の Lipschitz 定数), \mathcal{M} の次元は $d_F(\mathcal{M}) \leq d_F(\mathcal{M}_*) + 1$ によって上から評価される.

Inertial manifold について. 指数アトラクターは, Inertial set とも呼ばれる. 指数アトラクターに多様体の構造があれば, これを Inertial manifold (慣性多様体) と呼ぶ (実は, 歴史的にはこちらの方が早く登場した概念). 指数アトラクターの存在定理があるように, Inertial manifold についてもその存在定理が得られている [9, Chapter VIII]. 定理の仮定には, 上で紹介した条件と重複するものも多いのだが, 1 点, スペクトルギャップ条件と呼ばれる大きく違うものがある. 具体的に述べれば, 例えば, 方程式 (E) を考える場合, スペクトルギャップ条件は作用素 A に対する固有値 λ_n のギャップに対する条件となる: ある γ , $0 \leq \gamma \leq 1/2$ に対して, 次の条件が成り立つ:

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > M(\lambda_n^\gamma + \lambda_{n+1}^\gamma),$$

ただし, M は吸收集合の半径などから決まる定数 (詳しくは [9, pp. 508]).

半線形設定の (CG) を考えるとき, λ_n はラプラシアン固有値となるから, 領域を, 仮に簡単に矩形領域にすれば, 固有値の増大オーダーは n^2 . よって, 条件を満たす γ のしきい値が $1/2$ であることが分かる (幸運な場合, 例えば, 走化性の強さを表すパラメータが小さくて力学系が単純になり, 結果 M が小となる場合など, を除いては, $\gamma = 1/2$ は無理である). 一方, 非線形作用素に対しては, 次の条件が課される: ある $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, F は $\mathcal{D}(A^\alpha)$ の有界集合から $\mathcal{D}(A^{\alpha-\gamma})$ へのリプシッツ連続な写像で, 全ての $U, V \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\|A^\alpha U\|_H \leq R$, $\|A^\alpha V\|_H \leq R$, に対して, 次の条件を満たす:

$$\|A^{\alpha-\gamma}\{F(U) - F(V)\}\|_H \leq C_R \|A^\alpha(U - V)\|_H.$$

上で述べたように, いま $\gamma < 1/2$ が必要である. このことは左辺と右辺の A のべきの差が $1/2$ 未満しか取れないことを意味する. しかし, 半線形設定では, 走化性の項を F に

まわしているため，本研究の $H = L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ などといった基礎空間の取り方をする限りは， $\alpha = \gamma = 1/2$ とせざるを得ず [11]，よって，この定理を適用するのは難しいようである．他方，指数アトラクター存在定理の方は， A をラプラシアン（を対角に設定）， F にギリギリのオーダーがきても，基礎空間をうまく取れば，Inertial manifold のような集合が（多様体構造を除いては）構成できるわけで，この点において，Inertial manifold に対する定理よりも適用範囲が広いといえる．

3. 時間大域解の構成．

時間局所解は半群法 [12]（またはガレルキン法 [11]）によって構成される．その解の延長は，いくつかのアプリオリ評価によって行える．このアプリオリ評価により時間大域解が構成されるだけでなく，解の一樣評価も示される．

命題 3.1. $0 \leq u_0 \in H_N^2(\Omega)$ ， $0 \leq \rho_0 \in H_N^3(\Omega)$ とする． u, ρ を $[0, T_{u,\rho})$ 上で定義された (CG) に対する任意の時間局所解

$$(3.1) \quad 0 \leq u \in H^1(0, T_{u,\rho}; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{u,\rho}); H_N^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_{u,\rho}; H_N^3(\Omega)),$$

$$(3.2) \quad 0 \leq \rho \in H^1(0, T_{u,\rho}; H_N^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T_{u,\rho}); H_N^3(\Omega)) \cap L^2(0, T_{u,\rho}; \mathcal{D}(A_2^2))$$

であるとする．そのとき， u, ρ には依存しないある連続増加関数 $p(\cdot)$ が存在し，

$$\|u(t)\|_{H^2} + \|\rho(t)\|_{H^3} \leq p(\|u_0\|_{H^2} + \|\rho_0\|_{H^3}), \quad 0 \leq t < T_{u,\rho}.$$

証明の概略．(CG) 第 1 式を Ω で積分することにより，

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx = \int_{\Omega} f(u)u \, dx.$$

(f) によって，ある 2 つの定数 $f_0, f_1 > 0$ が存在して

$$(3.3) \quad f(u)u \leq f_0 u - f_1 u^2, \quad u \geq 0.$$

故に，

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx \leq \int_{\Omega} (f_0 u - f_1 u^2) \, dx \leq \int_{\Omega} \left(-u + \frac{(f_0+1)^2}{4f_1}\right) \, dx.$$

この微分不等式を解けば，

$$\int_{\Omega} u \, dx \leq e^{-t} \|u_0\|_{L^1} + \frac{(f_0+1)^2}{4f_1} |\Omega| (1 - e^{-t}).$$

いま $u \geq 0$ であるから，

$$(3.4) \quad \|u(t)\|_{L^1} \leq C[e^{-t} \|u_0\|_{L^1} + 1], \quad 0 \leq t < T_{u,\rho}.$$

このようにして，次々と高次のアプリオリ評価を行っていく．その結果，時間大域解の存在が得られる．

定理 3.2. $0 \leq u_0 \in L^2(\Omega)$, $0 \leq \rho_0 \in H^{1+\varepsilon_0}(\Omega)$ とする ($0 < \varepsilon_0 < 1/2$ は固定). そのとき, (CG) の時間大域解

$$\begin{aligned} 0 \leq u &\in \mathcal{C}([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0, \infty); H_N^2(\Omega)), \\ 0 \leq \rho &\in \mathcal{C}([0, \infty); H^{1+\varepsilon_0}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, \infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}((0, \infty); H_N^3(\Omega)) \end{aligned}$$

が存在する.

4. 指数アトラクターの構成.

$H = L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ とする. 集合 K を

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega) \times H^{1+\varepsilon_0}(\Omega); u_0 \geq 0, \rho_0 \geq 0 \right\}$$

と定義し, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in K$ とする. このとき, 初期関数 $U_0 \in K$ に解 $U(t)$ を対応させるような連続な半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ が定められ, $S(t)$ は K から $K \cap (H_N^2(\Omega) \times H_N^3(\Omega))$ への写像となる. 命題 3.1 により次の命題が示される.

命題 4.1. ある定数 C が存在して次が成立する. 各々の有界な球

$$B_r = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in K; \|u_0\|_{L^2} + \|\rho_0\|_{H^{1+\varepsilon_0}} \leq r \right\}$$

に対し, ある時刻 t_r (B_r に依存してもよい) が存在して,

$$\sup_{t \geq t_r} \sup_{U_0 \in B_r} \|S(t)U_0\|_{H^2 \times H^3} \leq C.$$

この命題は, 有界集合

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \in H^2(\Omega) \times H^3(\Omega); \|u\|_{H^2} + \|\rho\|_{H^3} \leq C \right\} \cap K$$

が $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, K)$ に対するコンパクト吸收集合であることを意味する, 但し C は命題 4.1 のものとする. これにより, コンパクト連結なグローバルアトラクター $\mathcal{A} \subset K$ が存在する. また, $\mathcal{X} = \overline{\bigcup_{t \geq t_B} S(t)\mathcal{B}}$, 但し t_B は $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, $t \geq t_B$ となる時刻, とおけば, \mathcal{X} は K におけるコンパクト集合であり, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ を満たし, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ に対して吸収かつ正不変である.

この設定のもと, 定理 2.2 によって次の定理が得られる.

定理 4.2. 力学系 $(\{S(t)\}_{t \geq 0}, \mathcal{X})$ に対する指数アトラクター $\mathcal{M} \subset K$ が存在する.

5. 今後の展開 .

三村・辻川方程式への上で紹介したテクニックは、他の反応・拡散・移流方程式系に対しても有効であろう。実際、(CG) より強い非線形性を有する次のナノスケール表面化学反応方程式については、同様のテクニックにより指数アトラクターが構成されている [13, 14] .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + du(u+v-1)(1-u), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v - c\nabla\{v(1-v)\nabla\chi(u)\} - fe^{-\alpha\chi(u)}v - gv + h(1-v). \end{cases}$$

ここで、 $u \in [0, 1]$ はオーダーパラメータ、 $v \in [0, 1]$ は CO 分子の白金 Pt(110) 表面上における被覆率。関数 $\chi(v)$ の典型例としては、 $\chi(u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3$ が挙げられる。

また、(CG) より大規模な方程式系への発展も考えられる。これについては、現在、3 因子よりなる社会性昆虫の巣の建設過程に対するモデル方程式への適用を考えている [15] .

他方、無限次元力学系に関する発展の方向としては、非自励方程式

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(t, U), & 0 < t < \infty, \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

に対する指数アトラクター構成の問題などがある。具体的には、(CG) を非自励にした方程式、例えば簡単に $f(u)$ を $f(t, u)$ にした方程式が考えられるが、こういった摂動が加わっても、指数アトラクターは構成できる [16] .

参考文献

- [1] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Physica A*, Vol. 230, pp. 499–543, 1996.
- [2] E. O. Budrene and H. C. Berg, Complex patterns formed by motile cells of *Escherichia coli*, *Nature*, Vol. 349, pp. 630–633, 1991.
- [3] W. Alt and D. A. Lauffenburger, Transient behavior of a chemotaxis system modelling certain types of tissue inflammation, *J. Math. Biol.*, Vol. 24, pp. 691–722, 1985.
- [4] D. A. Lauffenburger and C. R. Kennedy, Localized bacterial infection in a distributed model for tissue inflammation, *J. Math. Biol.*, Vol. 16, pp. 141–163, 1983.
- [5] A. Stevens, *Trail following and aggregation of myxobacteria Proc. 2nd ECMBM*, World Scientific, Lyon.
- [6] D. E. Woodward, R. Tyson, M. R. Myerscough, J. D. Murray, E. O. Budrene, and H. C. Berg, Spatio-temporal patterns generated by *Salmonella typhimurium*, *Biophys. J.*, Vol. 68, pp. 2181–2189, 1995.

- [7] R. M. Ford and D. A. Lauffenburger, Analysis of chemotactic bacterial distributions in population migration assays using a mathematical model applicable to steep or shallow attractant gradients, *Bull. Math. Biol.*, Vol. 53, pp. 721–749, 1991.
- [8] T. Tsujikawa, Singular limit analysis of planar equilibrium solutions to a chemotaxis model equation with growth, *Method Appl. Anal.*, Vol. 3, pp. 401–431, 1996.
- [9] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, second edition*, Vol. 68 of *Applied mathematical sciences*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [10] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam, *Exponential attractors for dissipative evolution equations*, Vol. 37 of *Research in Applied Mathematics*. John-Wiley and Sons, New York, 1994.
- [11] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi, and M. Mimura, Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations , *Nonlinear Anal.* Vol. 51, 119–144, 2002.
- [12] K. Osaki and A. Yagi, Global Existence for a Chemotaxis-Growth System in \mathbb{R}^2 , *Adv. Math. Sci. Appl.* Vol. 12, 587–606, 2002.
- [13] T. Tsujikawa and A. Yagi, Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model, *Kyushu J. Math.* Vol. 56, 313–336, 2002.
- [14] Y. Takei, K. Osaki, T. Tsujikawa and A. Yagi, Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model with periodic boundary conditions , *submitted*.
- [15] K. Osaki and T. Sakurai, Exponential attractor to chemotaxis-diffusion-deposits model system for construction of nests of social insects , *in preparation*.
- [16] M. Efendiev and K. Osaki, Construction of exponential attractor for non-autonomous chemotaxis-growth system, *in preparation*.