
研究集会 PPM2004
「偏微分方程式と現象：
PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004」
2004年11月19日(金)～11月21日(日)
アブストラクト

研究集会　「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004 (略称：PPM2004)」

日時：　2004年11月19日（金）～ 11月21日（日）

会場：　宮崎大学工学部総合研究棟２階プレゼンテーション室 (D204)

案内：　http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2004.html

プログラム

11月19日（金）

午後の部

14:30-15:20　**満島 正浩**（東京大学大学院・数理科学研究科）

「反応拡散方程式系に現れる時間周期解」

15:40-16:30　**丸野 健一**（九州大学大学院・数理学研究院）

「いろいろな物理系における非線形局在モードについて」

16:40-17:30　**和田 健志**（熊本大学・工学部）

「Limit problem for the Maxwell-Schrödinger system」

11月20日（土）

午前の部

10:00-10:50　**笠井 博則**（福島大学・教育学部）

「実演!! 金平糖の実験とその生成過程のモデリングに向けて」

11:00-11:50　**大江 貴司**（岡山理科大学・総合情報学部）・**大中 幸三郎**（大阪大学・工学部）

「Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用と数値積分への応用」

午後の部

13:30-14:20　**平岡 裕章**（大阪大学大学院・基礎工学研究科）

「無限次元力学系における位相計算理論」

14:30-15:20　**谷内 靖**（信州大学・理学部）

「On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data」

15:40-16:30　**菱田 俊明**（新潟大学・工学部）

「L^q estimates for the Stokes equations around a rotating body」

16:40-17:30　**小池 茂昭**（埼玉大学・理学部）

「ペロンの方法 –revisited–」

11 月 21 日（日）

午前の部

10:00-10:50　**高坂 良史**（室蘭工業大学・工学部）

「表面拡散流方程式による 3 相境界運動の定常解の線形安定性について」

11:00-11:50　**井古田 亮**（九州大学大学院・数理学研究院）

「不変領域を持つ反応拡散系における擾乱の伝播速度の有界性について」

12:00-12:50　**梶木屋 龍治**（長崎総合科学大学・工学部）

「Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉、壁谷／若手 B：北、矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人：　辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、北 直泰、矢崎成俊（宮崎大学）

連絡先：　辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail：tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381／0985-58-7288（事務室）& FAX：0985-58-7289

反応拡散方程式系に現れる時間周期解

満島 正浩

東京大学大学院数理科学研究科 博士課程 3 年

本講演では次の反応拡散方程式系

$$
\text{(E)} \quad \begin{cases} \epsilon\tau u_t = \epsilon^2 u_{xx} + (u-1)(u+1)(v-f(u)), & -1 < x < 1,\ t > 0 \\ v_t = Dv_{xx} + u - \gamma v, & -1 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x = v_x = 0, & x = \pm 1,\ t > 0 \end{cases}
$$

の特異極限問題を考える. ここで ϵ, τ, D, γ は正のパラメータである. また $f(u)$ は

$$
f(-u) = -f(u),\ f'(0) > 0
$$

を満たす滑らかな関数である. (E) についてはこれまで, 拡散係数 ϵ を微小パラメータとすることにより, 遷移層と呼ばれる内部に急激な傾きを持つ定常解の存在が知られていた [1]. また, τ を分岐パラメータと見ることにより, 安定であった遷移層定常解が不安定化し, 遷移層の位置が時間周期的に振動するような解が出現することが数値シミュレーションにより予想されていた. このような振動解は breather と呼ばれている. さらに西浦, 三村 [3] は遷移層定常解でのスペクトルを計算し, 虚軸を横断的に横切る固有値の存在を証明した. 本講演では, (E) の $\epsilon \to 0$ の特異極限方程式を導出し, さらに Hopf 分岐理論を用いることにより遷移層定常解からの Hopf 分岐解 (時間周期解) の存在を証明する.

参考文献

[1] M. Mimura, M. Tabata and Y. Hosono, Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter, *SIAM J. Math Anal.* Vol. 11, pp. 613-631 (1981).

[2] Y. Nishiura and H. Fujii, Stability of singularly perturbed solutions to systems of reaction-diffusion equations, *SIAM J. Math. Anal.* Vol. 18, pp. 1726-1770 (1987).

[3] Y. Nishiura and M. Mimura, Layer oscillations in reaction-diffusion systems, *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 49, No. 2, pp. 481-514 (1989).

いろいろな物理系における非線形局在モードについて

九州大学大学院数理学研究院　　丸野健一

局在化現象はいろいろな物理系で頻繁に出現する重要な現象の１つである.

例えば、固体物理では, 結晶の離散並進不変性を壊すことにより局在構造が生ずる. 結晶中での不純物あるいは欠陥の周りに局在した振動フォノンモードや、乱れた媒質における電子のアンダーソン局在がこれにあたる.

一方, 流体のような連続系では, 非線形性と分散性のバランスによりソリトンもしくは孤立波と呼ばれる局在構造が出現する.

局在構造の生成原因として, 上記のものが古くからよく知られているが、最近広い分野で注目を集めている'Intrinsic Localized Mode (ILM)'('Discrete Breather' とか'Discrete Soliton' とも呼ばれている) と呼ばれる別の局在構造がある [1]. この現象は、系が持つ周期（離散）的構造と非線形性の働きにより出現するものであり, 離散系特有の現象である. Anderson 局在が基本的には線形の範囲での現象であるのに対して, この ILM は非線形の現象である. ILM は, 固体物理はもちろんのこと, DNA や電気回路,Optical waveguide, Photonic Crystal,Bose-Einstein 凝縮, 音響等、様々な分野で出現することがわかっており, 様々な応用可能性を秘めている.

ILM を研究する上で頻繁に使用されるモデルとしては離散非線形 Schrödinger 方程式 (DNLS 方程式) がある:

$$i\frac{dA_n}{dt} + \gamma|A_n|^2 A_n + \epsilon(A_{n+1} + A_{n-1}) = 0\,. \tag{1}$$

これは連続極限でよく知られた非線形 Schrödinger(NLS) 方程式になるが, NLS 方程式が持っていた可積分性は持っていない. DNLS 方程式は DNA や Optical waveguide arrays, BEC 等と関連した研究が行われている [2, 3, 4]. Optical waveguide arrays においては実験が数多く行われており, レーザーの強度を上げいくと回折効果と非線形効果がつりあって Discrete Soliton が現れることが示されている.

NLS 方程式の空間離散モデルとしては,Ablowitz-Ladik 方程式

$$i\frac{dA_n}{dt} + \gamma|A_n|^2(A_{n+1} + A_{n-1}) + \epsilon(A_{n+1} + A_{n-1}) = 0\,, \tag{2}$$

があるが, これは厳密解が具体的に構成できる可積分な方程式であり, いろいろな解が具体的に構成できる. このモデルは物理的な意味付けが難しいものの,DNLS 方程式の性質を調べる際にしばしば比較に使用され, 重要である.

本講演では, いろいろな物理系で現れる DNLS 方程式の局在構造に関連した話題を解説する. 特に, 流体のある波動現象において,DNLS 方程式が導かれ, 局在構造が生じる場合がある, ことを示す. また,BEC と関連した DNLS 方程式の話題にも触れる.

参考文献

[1] A.J. Sievers and S. Takeno, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 970-973.

[2] D.N. Christodoulides and R.I. Joseph, Opt. Lett. **13** (1988) 794-796.

[3] F. Lederer, S. Darmanyan, and A. Kobyakov, Eds. S. Trillo and W. E. Toruellas,in “Spatial Solitons”, Springer, Berlin, 311 (2001).

[4] P.G. Kevrekidis, K.O. Rasmussen and A.R. Bishop, Int. J. Mod. Phys. B, **15** (2001) 2833-2900.

Limit problem for the Maxwell-Schrödinger system

和田健志 (熊本大学工学部)

Maxwell-Schrödinger 方程式系 (MS) はミクロな荷電粒子とそれが作り出す電磁場との相互作用の時間発展を記述する以下の方程式である.

$$i\partial_t u + (\nabla - ic^{-1}\boldsymbol{A})^2 u = \phi u,$$
$$-\Delta\phi - c^{-1}\partial_t \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \rho(u),$$
$$(c^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\boldsymbol{A} + \nabla(\partial_t\phi + c^{-1}\operatorname{div} \boldsymbol{A}) = c^{-1}\boldsymbol{J}(u, \boldsymbol{A})$$

ここで $(u, \phi, \boldsymbol{A}) : \boldsymbol{R}^{1+3} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^3$, $\rho(u) = |u|^2$, $\boldsymbol{J}(u, \boldsymbol{A}) = 2\operatorname{Im}\bar{u}(\nabla - ic^{-1}\boldsymbol{A})u$ である. また $c > 0$ は光速を表すパラメターである. ここで形式的に $c \to \infty$ とすると形式的には第 1 式, 第 2 式は

$$i\partial_t u + \Delta u = \phi u,$$
$$-\Delta\phi = \rho(u)$$

となり ϕ を消去すれば少なくとも形式的には Hartree の方程式

$$i\partial_t u + \Delta u = (4\pi)^{-1}(|x|^{-1} * |u|^2)u$$

を得る. 本講演においては適当なゲージ条件の下で上の推論が正しいことを示す.

実演!! 金平糖の実験とその生成過程のモデリングに向けて

笠井博則（福島大学・教育学部）

金平糖のゴツゴツした形状はどのようにして出来てくるのかは完全に理解されていない。核となるゴマや細かく欠けた米の形状がそのままでないのは明かであり、また表面が光沢を持っていることから結晶としての構造は持っていると思われる。

本講演では、実験で作った金平糖、氷砂糖 (どちらも糖の結晶) のサンプルを提示し、実際に一部作る過程を見てもらいながら金平糖の生成過程の数理モデルの試案を紹介する。(実際の出来る過程をお見せすることでディズカッションの機会となり多くのコメントを頂けることを期待しています。)

Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用と数値積分への応用

大江貴司　(岡山理大・総合情報)
大中幸三郎　(阪大・工)

本講演では, 単位円周上 Γ で定義された 2 つの実関数 f, g について,

$$\left\{\begin{array}{rcll} u &=& f, & \text{on } \Gamma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &=& g, & \text{on } \Gamma, \end{array}\right. \tag{1}$$

を満たすような Γ の近傍で定義された調和関数 u を数値的に求める方法について考える. ただし, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ は u の Γ における外向き法線方向微分とする. この問題は Laplace 方程式の Cauchy 問題と呼ばれ, f, g が解析的であれば Cauchy-Kowalewski の定理および Holmgren の定理より問題の実解析的な解が Γ の近傍でただ一つ存在する. この問題の代用電荷法による近似解 $u^{(N)}$ を不変スキームを用いて次式で構成する.

$$u^{(N)}(\boldsymbol{x}) = q + \sum_{s=1}^{2}\sum_{j=0}^{N-1} Q_{s,j}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\log|\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_{s,j}|, \tag{2}$$

ただし

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_{s,j} = (R_s\cos\theta_j,\ R_s\sin\theta_j), \quad s=1,2,\ j=0,1,\cdots,N-1, \\ \theta_j = 2\pi j/N, \quad j=0,1,\cdots,N-1, \\ R_2 < 1 < R_1, \\ q\in\mathbb{R},\quad Q_{s,j}\in\mathbb{R},\quad s=1,2,\ j=0,1,\cdots,N-1, \end{array}$$

である. 係数 q および $Q_{s,j}$ は,

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{j=0}^{N-1} Q_{s,j} = 0, \quad \text{(室田の不変条件)} \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} u^{(N)}(\boldsymbol{x}_j) &=& f(\boldsymbol{x}_j), & j=0,1,\cdots,N-1, \\ \dfrac{\partial u^{(N)}}{\partial \nu}(\boldsymbol{x}_j) &=& g(\boldsymbol{x}_j), & j=0,1,\cdots,N-1, \end{array}\right. \quad \text{(選点条件)} \tag{4}$$

を満たすように決定する. ただし選点 $\boldsymbol{x}_j$ は

$$\boldsymbol{x}_j = (\rho_1\cos\theta_j,\ \rho_1\sin\theta_j)\in\Gamma, \quad j=0,1,\cdots,N-1,$$

にとる.

講演では式 (2) により定義される近似解 $u^{(N)}$ について, その一意性, 収束性, およびノイズに対する安定性について述べる. また, ここに示す代用電荷法の適用法は円周上で定義された関数の数値積分に応用することができる. 講演ではこの方法の概略についても述べる.

無限次元力学系における位相計算理論

平岡裕章（大阪大学大学院・基礎工学研究科）

本講演では Conley 指数とよばれる位相的な情報を用いて，無限次元力学系に現れる平衡点，及びそれ等を結ぶヘテロクリニック軌道の存在証明を与える計算理論についての解説を行なう．特に，Conley 指数の情報から代数的な議論を経ることで，大域的なダイナミクスの検出が可能となる点に重点をおいて解説を試みる．これは位相的量を数値検証法に用いる最大の特長である．講演においては Swift-Hohenberg 方程式を例に挙げ，幾つかの具体的な計算結果も示す予定である．

On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data

谷内　靖（信州大学理学部）

２次元非圧縮性粘性流体による熱対流を記述する次の２次元 Boussinesq 方程式を考える。本講演では遠方で減衰しない初期条件に対する大域的可解性について議論する。

$$
\text{(B)} \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = g\theta, \qquad t>0, \quad x\in R^2, \\ \partial_t \theta - \Delta\theta + u\cdot\nabla\theta = 0, \qquad t>0, \quad x\in R^2, \\ \quad \mathrm{div}\ u = 0, \qquad t>0, \quad x\in R^2, \\ \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \end{cases}
$$

ここで、$u = (u^1(x,t), u^2(x,t))$, $\theta = \theta(x,t)$, $p = p(x,t)$ はそれぞれ流体の未知速度場、未知温度分布、および圧力場を記述する。また、$g = (g^1, g^2)$ は与えられた一様な重力加速度である。 本講演では初期条件 u_0 が L^∞ に属し、初期温度分布 θ_0 が $\dot{B}^0_{\infty,1}$ に属する場合を考える。ここで、$\dot{B}^0_{\infty,1}$ は L^∞ と同様に遠方で減衰しない関数を含んでいる。例えば、$\sin(a\cdot x) \in \dot{B}^0_{\infty,1}$. また、一方向だけ減衰する次のような関数も含んでいる。$(1+x_1^2)^{-1} \in \dot{B}^0_{\infty,1}$.

Giga-Matsui-Sawada[2] は２次元 Navier-Stokes 方程式:

$$
\text{(N-S)} \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, \qquad t>0, \quad x\in R^2, \\ \quad \mathrm{div}\ u = 0, \qquad t>0, \quad x\in R^2, \\ \quad u|_{t=0} = u_0 \end{cases}
$$

に対し $u_0 \in L^\infty(R^2)$ の場合に時間大域解の存在を証明している。さらに、$\|u\|_\infty$ に対し”double exponential”な評価

$$
\|u(t)\|_\infty \le K e^{K e^{Kt}}
$$

を得ている。(n 次元 Navier-Stokes 方程式の $u_0 \in L^\infty$ に対する局所解の存在に関しては [1] によって得られている。) [2] では２次元渦度方程式

$$
\text{(V-NS)} \begin{cases} \partial_t \omega - \Delta\omega + u\cdot\nabla\omega = 0, \quad \mathrm{div}\ u = 0 \qquad t>0, \quad x\in R^2, \\ \quad \omega|_{t=0} = \mathrm{rot}\ u_0 \end{cases}
$$

に最大値原理を適用することにより得られる次の渦度 $\omega = \mathrm{rot}\ u$ に対する評価:

$$
\|\omega(t)\|_\infty \le \|\mathrm{rot}\ u_0\|_\infty \tag{0.1}
$$

が利用されている。

一方、２次元 Boussinesq 方程式に対しては、渦度の方程式は次のようになり、

$$
\text{(V-B)} \begin{cases} \partial_t \omega - \Delta\omega + u\cdot\nabla\omega = \mathrm{rot}\ (g\theta), \quad \mathrm{div}\ u = 0 \qquad t>0, \quad x\in R^2, \\ \quad \omega|_{t=0} = \mathrm{rot}\ u_0 \end{cases}
$$

(0.1) の評価は得られない。そこで、Sawada-Taniuchi[3] は $\theta_0 \in L^q$ $(2 \le q < \infty)$ の仮定の下で、

$$
\|\omega(t)\|_{L^\infty + L^q} \le C\cdot\left(\|\mathrm{rot}\ u_0\|_{L^\infty} + q^{1/2}\left(\int_0^t \|g\theta(s)\|_q^2 ds\right)^{1/2}\right)
$$

となることを利用して、初期条件が $(u_0, \theta_0) \in L^\infty \times L^q$ の場合の２次元 Boussinesq 方程式の大域可解性を示した。さらに、Serfati[4] の用いた議論と Littlewood-Paley 分解を用いて、次の”single exponential”な評価：

$$
\|u(t)\|_\infty \le K e^{K t^{3/2}}
$$

を証明した。　しかし、この結果は初期温度分布に減衰条件 $\theta_0 \in L^q$ 　$(1 < q < \infty)$ が仮定されている点で満足いくものではなかった。

本講演では、この減衰条件を取り除き、$(u_0, \theta_0) \in L^\infty \times \dot{B}^0_{\infty,1}$ の条件で２次元 Boussinesq 方程式の大域可解性を示す。

Theorem 1 (global existence) *Let the initial data* $(u_0, \theta_0) \in L^\infty(R^2) \times \dot{B}^0_{\infty,1}(R^2)$ *with* $\mathrm{div}\ u_0 = 0$*. Then there exists a unique global solution* $(u, \theta) \in C_w([0,\infty); L^\infty(R^2)) \times C([0,\infty); \dot{B}^0_{\infty,1}(R^2))$ *to (B) with* $\nabla p \in C((0,\infty); \dot{B}^0_{\infty,1})$*. Moreover there holds*

$$\|u(t)\|_\infty \le K e^{Kt^3},$$

where the constant K *depends only on* $\|u_0\|_\infty$ *and* $\|\theta_0\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}$*.*

この定理の証明には次の補題が重要である。

Lemma 0.1 *Let* $\omega(0) \in L^\infty$ *and let* $\omega \in L^\infty(0,T; L^\infty(R^2))$ *be a solution of*

$$\partial_t \omega - \Delta\omega + u \cdot \nabla\omega = \mathrm{rot}\ (g\theta) \quad 0 < t < T,$$

where $u \in L^\infty(0,T; W^{1,\infty})$ *(vector valued), with* $\mathrm{div}\ u = 0$, $\theta \in L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(R^2))$*. Then*

$$\|\omega(t)\|_{L^q_{ul}} \le C \cdot \left(1 + t + \int_0^t \|u(\tau)\|_\infty d\tau\right)^{2/q} \left\{ \|\omega(0)\|_{L^q_{ul}} + q^{1/2} \left(\int_0^t \|g\theta(\tau)\|^2_{L^q_{ul}} d\tau\right)^{1/2} \right\}$$

for all $0 < t < T$ *and all* $2 \le q < \infty$*. Here* C *is an absolute constant.*

ここで、$\|f\|_{L^q_{ul}} \equiv \sup_{x \in R^2} \left(\int_{|x-y|<1} |f(y)|^q dy \right)^{1/q}$ である。

なお、本講演では Besov 空間 $\dot{B}^0_{\infty,1}$ は以下のように定義する。$\{\phi_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ (Littlewood-Paley 分解) を、$\hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}_0(2^{-j}\xi) \in C_0^\infty(R^n)$, $\mathrm{supp}\ \phi \subset \{1/2 < |\xi| < 2\}$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_j(\xi) = 1$ $(\xi \ne 0)$ となるようにとる。

$$\begin{aligned} \dot{B}^0_{\infty,1} &\cong \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} < \infty,\ f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j * f \text{ in } \mathcal{S}'\} \\ \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} &\equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\varphi_j * f\|_\infty, \end{aligned}$$

References

[1] Giga, Y., Inui, K., Matsui, S., *On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data*, Quaderni di Mathematica, **4** (1999), 28-68.

[2] Giga,Y., Matsui, S., Sawada, O., *Global existence of two-dimensional Navier-Stokes flow with nondecaying initial velocity*, J. Math. Fluid Mech. **3**, (2002), 302–315.

[3] Sawada, O., Taniuchi, Y. *On Boussinesq flow with nondecaying initial data*, Funkcial. Ekvac. **47** (2004), 225–250.

[4] Serfati, P., *Solutions* C^∞ *en temps,* $n - \log$ *lipshitz bornées en espace et équation d'Euler*, C.R.Acad. Sci. Paris, t. **320** Série I, (1995), 555-558.

[5] Taniuchi, Y., *Remarks on global solvability of 2-D Boussinesq equations with non-decaying initial data*, preprint

L^q estimates for the Stokes equations around a rotating body

菱田 俊明（新潟大学・工学部）

3 次元物体の周りの非圧縮粘性流の運動は, Navier-Stokes 方程式の外部問題として定式化される. 物体が運動 (並進, 回転) する場合は興味深いが, 特に回転の影響を数学的に捉えるため, 物体が等速回転運動のみする場合を論ずる. 変数変換により一定外部領域における問題に書き直すと, 方程式は剛体の回転をあらわす非有界係数をもつ移流項を伴い, 物体が静止の場合と比べて, 問題が質的に異なる (質的な変化は, 定常および非定常の基本解の性質を見ることによりわかる). この研究では, L^q 空間での解析を目指し, 方程式に現れる線型作用素の基本的性質を明らかとするべく, 線型定常問題の解の評価, 特に $(\nabla u, p)$ の L^q 評価を導く.

ペロンの方法 –revisited–

小池茂昭（埼玉大学・理学部）

調和関数の存在を示すペロンの方法は石井仁司氏によって非発散型方程式の粘性解の存在を示すために拡張された。これは半連続な関数に対して定義が与えられている粘性解の定義にうまく適応しており、比較定理が成立する方程式に対しては、ペロンの方法で構成した粘性解が自動的に一意の連続な粘性解となる事を保証している。

本講演では、比較定理（一意性定理）が分からない問題（反例がある場合もあるし、regularity が上がると比較できる場合もある）に対して有効な「ささやかな」ペロンの方法の拡張を試みる。

また、いくつかの応用も述べる。

表面拡散流方程式による３相境界運動の定常解の線形安定性について

高坂良史* (室蘭工業大学)

本講演では，$\mathbb{R}^2$ 内の有界領域 Ω における３相境界運動が幾何学的発展方程式の１つである表面拡散流方程式によって記述されるモデルについて考える。より具体的には以下のモデルを考える。

今，領域 Ω 内に存在する３相境界 $\Gamma^i(t)\,(i=1,2,3)$ が，一方の端では互いに交わり ($\boldsymbol{p}(t)$ (triple junction) とおく)，もう一方の端では $\partial\Omega$ に直角に交わりながら時間発展している状況を考える。このとき，$t>0$ および $i=1,2,3$ に対し，

$$
\begin{cases}
[\Gamma^i(t) \text{ に沿って}] \\
\quad V^i = -m^i\gamma^i\kappa^i_{ss} \ (\text{表面拡散流方程式}), \\
[\boldsymbol{p}(t)\,(\text{triple-junction}) \text{ において}] \\
\quad \angle(\Gamma^i(t), \Gamma^j(t)) = \theta^k \ (\text{角度条件}), \\
\quad \gamma^1\kappa^1 + \gamma^2\kappa^2 + \gamma^3\kappa^3 = 0 \ (\text{化学ポテンシャルの連続性}), \\
\quad m^1\gamma^1\kappa^1_s = m^2\gamma^2\kappa^2_s = m^3\gamma^3\kappa^3_s \ (\text{流量の平衡に関する条件}), \\
[\Gamma^i(t)\cap\partial\Omega \text{ において}] \\
\quad \Gamma^i \perp \partial\Omega \ (\text{直交条件}), \quad \kappa^i_s = 0 \ (\text{流量 } 0), \\
[\text{初期条件}] \\
\quad \Gamma^i(0) = \Gamma^i_0, \quad \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}_0.
\end{cases}
$$

ここで, V^i および κ^i はそれぞれ $\Gamma^i(t)$ の法速度および曲率を表し，s は弧長パラメータである。また、m^i は動的係数に関する正定数，γ^i は $\Gamma^i(t)$ の表面エネルギーに関する正定数である。さらに，θ^i は正定数であり，

$$
\frac{\gamma^1}{\sin\theta^1} = \frac{\gamma^2}{\sin\theta^2} = \frac{\gamma^3}{\sin\theta^3} \quad (\text{Young's law})
$$

を満たす。このモデルでは，$\Gamma(t) := \bigcup_{i=1}^3 \Gamma^i(t)$ と $\boldsymbol{p}(t)\,(i=1,2,3)$ を未知量とする。

(注) このモデルは，非平衡状態における３成分系合金の時間発展モデルとして, ある退化動的係数をもつ Cahn-Hilliard 方程式のシステムにおいて，特異極限をとることによって導かれたものである (形式的)。

この講演では，上記のモデルに対する定常解 (線分や円弧) の線形安定性の判定基準を導くことを目的とする。より具体的には，非線形放物型方程式としてあらわされる上記のモデルを定常解の周りで線形化し，その線形化問題に対応する固有値問題を考え，固有値の符号の変化に着目することで安定性の判定基準を導出することを目的とする。

*e-mail: kohsaka@mmm.muroran-it.ac.jp

不変領域を持つ反応拡散系における擾乱の伝播速度の有界性について

井古田 亮 (九州大学・大学院数理学研究院)

本研究では，反応拡散系における擾乱の伝播速度について考察する．1 次元空間上の反応拡散系は以下の形に書ける：

$$(1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}_t(x,t) = D\boldsymbol{u}_{xx}(x,t) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x,t)), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ここで $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ は $\mathbb{R}^n$ に値をとり，D は対角行列である:

$$(2)\qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \qquad d_i \geq 0\ \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

反応項もまた $\mathbb{R}^n$ 値である:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = (f_1(\boldsymbol{u}), \ldots, f_n(\boldsymbol{u})).$$

本研究では反応項 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ にいくつかの仮定をおく． 記号 $\mathcal{R}$ は方形領域 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ を表すものとする．ここで a_i と b_i は $a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす定数である. 以下を仮定する:

(A1) 反応項 $\boldsymbol{f}$ は， $\mathcal{R}$ から $\mathbb{R}^n$ への滑らかな関数であるとする.

(A2) 反応項 $\boldsymbol{f}$ は $\mathcal{R}$ の中に零点を持つとする:

$$(3)\qquad \boldsymbol{f}(c_1, \ldots, c_n) = 0,$$

ここで c_i は $a_i \leq c_i \leq b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす定数である.

(A3) 方形領域 $\mathcal{R}$ は不変である:

$$(4)\qquad \begin{aligned} f_i(\boldsymbol{u}) \geq 0 \quad \text{on } \{\boldsymbol{u} \in \partial\mathcal{R} \mid u_i = a_i\}, \\ f_i(\boldsymbol{u}) \leq 0 \quad \text{on } \{\boldsymbol{u} \in \partial\mathcal{R} \mid u_i = b_i\}. \end{aligned}$$

本研究では，条件 (**A1**)–(**A3**) の下で，反応拡散系 (1) における擾乱の伝播速度を評価する．今回採用する手法の長所は，上記のような一般的な設定の下で広い範囲の初期値を扱えることである．そのために，以下の Fisher 方程式の進行波解を用いる．

$$(5)\qquad u_t = u_{xx} + u(1-u), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

ここで u はスカラー値である．

関数 $\phi(z)$ を以下のように定める：

$$\phi(z) = 1/\{1+\exp(z/\sqrt{6})\}^2. \tag{6}$$

定数 θ_{e} を $\theta_{\mathrm{e}} = 5/\sqrt{6}$ とおくと， $\phi(x-\theta_{\mathrm{e}}t)$, は (5) の進行波解になっていることに注意する．

結果を述べる上で必要な定数をここで定義する．定数 γ_i^+, γ_i^-, ω は以下で定義される：

$$\gamma_i^+ = \begin{cases} \displaystyle\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in\partial\mathcal{R}\\ u_i=b_i}} \sup_{0\le\sigma<\tau\le 1} \frac{|f_i(\boldsymbol{c}+\tau(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{c}))-f_i(\boldsymbol{c}+\sigma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{c}))|}{|(b_i-c_i)(\tau-\sigma)|} & \text{if } b_i \neq c_i, \\ 0 & \text{if } b_i = c_i, \end{cases}$$

$$\gamma_i^- = \begin{cases} \displaystyle\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in\partial\mathcal{R}\\ u_i=a_i}} \sup_{0\le\sigma<\tau\le 1} \frac{|f_i(\boldsymbol{c}+\tau(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{c}))-f_i(\boldsymbol{c}+\sigma(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{c}))|}{|(a_i-c_i)(\tau-\sigma)|} & \text{if } a_i \neq c_i, \\ 0 & \text{if } a_i = c_i, \end{cases}$$

$$\omega = \max_{1\le i\le n}\{\gamma_i^{\pm}\},$$

ここで $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ である．さらに，

$$\theta_0 = 2\sqrt{6}\omega, \quad \theta_1 = \theta_{\mathrm{e}} \max_{1\le i\le n}\{d_i\}, \tag{7}$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_1, \tag{8}$$

とおく．

以上の準備の下，結果を述べる．

Theorem 1. 関数 $u_i(x,0) \in BUC^1(\mathbb{R})$ は $(a_i-c_i)\phi(x) \le u_i(x,0)-c_i < (b_i-c_i)\phi(x)$ を満たすとする $(i=1,2,\ldots,n)$．反応項 $\boldsymbol{f}$ は，条件 (**A1**)–(**A3**) を満たすものとする．このとき，(1) の解 $\boldsymbol{u}$ は以下を満たす：

$$(a_i-c_i)\phi(x-\theta t) \le u_i(x,t)-c_i \le (b_i-c_i)\phi(x-\theta t) \tag{9}$$

for all $x\in\mathbb{R}$ *and* $t>0$.

作用素分割法を用いることで，上記の定理を証明できる．本講演では，証明の概略について述べる．

Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations.

梶木屋 龍治　　長崎総合科学大学・工学部

本講演では, symmetric mountain pass lemma に関連した新しい critical point theorem について述べる．またその応用として, 劣線形楕円型方程式に対して無限に多くの解の存在を証明する．symmetric mountain pass lemma は, バナッハ空間上の実数値汎関数が, 適当な仮定のもとに critical value を無限に多く持つことを保証する．

定義 1. バナッハ空間の閉部分集合 A が「$x \in A$ ならば $-x \in A$」を満たすとき, **対称**であるという．A を対称な閉部分集合で, $0 \notin A$ とする．A から $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ への連続な奇関数が存在するような自然数 k の最小値を A の **genus** といい, $\gamma(A)$ で表す．どの様な自然数 k に対しても, その様な連続な奇関数が存在しないとき, $\gamma(A) = \infty$ と定義する．各自然数 k に対して, 集合族 Γ_k を次のように定義する．

$$\Gamma_k \equiv \{A :\ \gamma(A) \geq k\}. \tag{1}$$

仮定 (A). E は無限次元バナッハ空間, $I(u)$ は, E 上の C^1 級の実数値汎関数で, 次の条件 (A1), (A2) を満たすものとする．
(A1) $I(0) = 0$, $I(u)$ は 下に有界な偶汎関数で, パレ・スメイル条件を満たす．
(A2) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, $\sup_{u \in A_k} I(u) < 0$ を満たす $A_k \in \Gamma_k$ が存在する．

仮定 (A) のもとに, 次の値 c_k を定義する．

$$c_k \equiv \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} I(u). \tag{2}$$

定理 0. (symmetric mountain pass lemma [1], [2]) 仮定 (A) をおく．このとき c_k は, $I(\cdot)$ の critical value であり, $c_k \leq c_{k+1} < 0 \quad (k \in \mathbb{N})$, $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ が成り立つ．さらに, もし $c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+p} \equiv c$, ならば $\gamma(K_c) \geq p + 1$ である．ここで

$$K_c \equiv \{u \in E :\ I'(u) = 0,\ I(u) = c\}.$$

本講演の主結果は, 次の定理 1 と後に述べる定理 2 である．

定理 1. (A) を仮定する．このとき次のような列 $\{u_k\}$ が存在する．

$$I'(u_k) = 0,\ I(u_k) \leq 0,\ u_k \neq 0,\ \lim_{k\to\infty} u_k = 0.$$

注意 1. 定理 0 と定理 1 を比較すると,「定理 1 に出てくる u_k は, 定理 0 の c_k に対応する critical point として取れるのではないか.」という問題が考えられる．

これに関連して, 次の条件を考察する.

(A3) もし $I'(u) = 0$ かつ $I(u) = 0$ ならば, $u = 0$ である.

(A1), (A2), (A3) が成り立つとき, c_k に対応する u_k を取れば, パレ・スメイル条件により $\{u_k\}$ は, 0 に収束する. しかしながら, (A3) が成り立たないときは, c_k に対応する u_k は必ずしも 0 に収束しない. 実際に次の例がある.

例 1. 次のような バナッハ空間 E と汎関数 $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ の例がある. $I(u)$ は (A1), (A2) を満たし, (A3) を満たさない. さらに, ある定数 $r_0 > 0$ が存在して, もし $I'(u) = 0$, $I(u) = c_k$ ならば $\|u\| \geq r_0$ である. ここで, r_0 は, u と k に無関係な正定数である.

例 1 の構成の概略. $E = \mathbb{R} \times H_0^1(0,1)$ とし, E 上の汎関数 $I(t,u)$ を次のように定義する.

$$I(t,u) \equiv f(t,u)(J(u) + g(t)). \tag{3}$$

$$J(u) \equiv \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'(x)^2 - \frac{1}{1+p} |u(x)|^{1+p} \right) dx, \quad u \in H_0^1(0,1).$$

ここで $0 < p < 1$ とする. $J(u)$ の critical point は, 次の問題の解である.

$$\begin{cases} -u''(x) = |u(x)|^p \operatorname{sgn} u(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

この問題の nodal solution は, 一意である. すなわち, 任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して, (4) の解 u で, $u'(0) > 0$ を満たし, 区間 $(0,1)$ にちょうど $k-1$ 個の零点をもつものがただ一つ存在する. それを $u_k(x)$ と書くと, (4) のすべての解は, $\{\pm u_k\}_{k=1}^{\infty}$ と零解である.

$f(t,u)$ の定義は, ほとんどの (t,u) に対して, 定数 1 とするが, $J(u)$ の critical point u_k の近くで 1 より少し小さくする. (厳密な定義は, 省略する.) $g(t)$ の定義は, $|t| \leq 1$ のとき, $g(t) = 0$ であり, $t > 1$ のとき単調増加で, $t \to \infty$ のとき $g(t) \to \infty$ とする. f, g ともに偶関数とする. このとき (3) に定義した $I(t,u)$ は, (A1), (A2) を満たし, (A3) を満たさない. (2) によって c_k を定義できる. しかし,

$$I_t(t,u) = 0, \quad I_u(t,u) = 0, \quad I(t,u) = c_k$$

を満たすものは, $(t,u) = (\pm 1, \pm u_k)$ のみであり, これは, $k \to \infty$ のとき 0 に収束しない. **(例 1 の構成終り)**

定理 1 の応用として次の劣線形楕円型方程式に対する無限に多くの解の存在を証明する.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

ただし, Ω は滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の有界領域, $n \geq 1$ とする.

仮定 (B). ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $f(x,u)$ は $\overline{\Omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ で定義されたヘルダー連続関数で, 次の (B1), (B2) を満たすものとする.
(B1) $f(x,u)$ は u に関して奇関数である.
(B2) 次を満たす $x_0 \in \Omega$ と $\delta > 0$ が存在する.

$$\limsup_{u\to 0} \left(\min_{|x-x_0|\leq\delta} u^{-2}F(x,u) \right) = \infty,$$

$$\liminf_{u\to 0} \left(\min_{|x-x_0|\leq\delta} u^{-2}F(x,u) \right) > -\infty,$$

$$F(x,u) \equiv \int_0^u f(x,s)ds.$$

定理 2. (B) を仮定する. このとき (5) は, その $C^2(\overline{\Omega})$ ノルムが 0 に収束する非自明な解の列をもつ.

定理 2 は, 次の事を意味する. ある点 $x_0 \in \Omega$ が存在して, 非線形項 $f(x,u)$ が, 点 $(x,u) = (x_0, 0)$ の近傍で劣線形ならば, 方程式 (5) は 無限に多くの小さな解をもつ.

系 1. $f(x,u) \equiv a(x)g(u)$ は $u = 0$ の近傍で定義されたヘルダー連続関数とする. $g(u)$ は奇関数であり, $\lim_{u\to 0} g(u)/u = \infty$ を仮定する. このとき, 次の 2 条件は同値である.
(i) その $C^2(\overline{\Omega})$ ノルムが 0 に収束する非自明な解の列 $\{u_k\}$ が存在する.
(ii) $a(x_0) > 0$ となる $x_0 \in \Omega$ が存在する.

例 2. 仮定 (B) を満たす $f(x,u)$ の例を述べる. 以下において, $a(x)$, $b(x)$ はヘルダー連続であり, $a(x_0) > 0$ となる $x_0 \in \Omega$ が存在するものとする.

(i) $f(x,u) = a(x)|u|^p \operatorname{sgn} u, \quad (0 < p < 1).$
(ii) $f(x,u) = -a(x)u \log |u|.$
(iii) $f(x,u) = a(x)|u|^p \operatorname{sgn} u + b(x)|u|^q \operatorname{sgn} u, \quad (0 < p < \min(1,q)).$

このような $f(x,u)$ に対して, (5) は $C^2(\overline{\Omega})$ ノルムが 0 に収束する解の列をもつ.

参考文献

[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[2] D. C. Clark, A variant of the Lusternik-Schnirelman theory, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972) 65–74.