



研究集会 PPM2004

「偏微分方程式と現象：  
PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004」

2004年11月19日(金)～11月21日(日)

報告集

はじめに

昨年度に引き続き南国宮崎で研究集会を開催いたしました。本冊子はその証です。講演者の方々には、事前にメールにて以下のことをお願いしていました。

『理論、応用、実験の各分野で活躍されている方々に講演をお願いしております。講演者や聴衆の専門は多様でありますから、異分野交流による刺激とひらめきを楽しむことを趣旨に、気楽に意見交換できる場にしたいと思っております。動機、面白い所、展望などをざっくばらんにお話しいただければ幸いです。昨年度の参加者はのべ30人ほどでした。』

誠に僭越なお願いではございましたが、講演者の方々は、予想に違わず刺激ある講演、あるいは専門の深い部分を触りつつ、表や図、もしくは典型例を多用して直観的にわかりやすい講演をなさってくださいました。この場を借りて、謝意を表します。

さて、講演後も「報告集を作りたいので、日本語でわかりやすい講演録を書いて下さい」とのこちらの依頼に—実際はもう少し注文を出しましたが—皆様気持ちよく応えてくださり、本研究集会の“証”を発刊することができました。講演者の方々には重ねて御礼を申し上げます。

尚、本報告集のPDF ファイルは、

<http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2004.html>

より入手できます。カラー図版等の閲覧にご利用ください。また、昨年度の研究集会 PPM2003 の報告集も上記 WEB サイトから辿ることができますので、合わせてご参照いただくと幸いです。

本研究集会は、いくつかの科学研究費補助金の援助を受けました。補助金番号の一覧は次々ページのプログラムの最後に掲載してあります。最後に、研究集会開催にあたり、ご協力くださった関係者の方々全てに感謝の意を表したいと思います。

2005 年 5 月 世話人一同

## 目次

1. 満島 正浩 (東京大学大学院・数理科学研究科)  
反応拡散方程式系に現れる時間周期解 ..... 6–13
2. 丸野 健一 (九州大学大学院・数理学研究院)  
いろいろな物理系における非線形局在モードについて ..... 14–21
3. 和田 健志 (熊本大学・工学部)  
Limit problem for the Maxwell-Schrödinger system ..... 22–28
4. 笠井 博則 (福島大学・教育学部)  
実演!! 金平糖の実験とその生成過程のモデリングに向けて ..... 30–40
5. 大江 貴司 (岡山理科大学・総合情報学部)・大中 幸三郎 (大阪大学・工学部)  
Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用と数値積分への応用  
..... 42–51
6. 平岡 裕章 (大阪大学大学院・基礎工学研究科)  
無限次元力学系における位相計算理論 ..... 52–60
7. 谷内 靖 (信州大学・理学部)  
On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data  
..... 62–69
8. 菱田 俊明 (新潟大学・工学部)  
 $L^q$  estimates for the Stokes equations around a rotating body ..... 70–89
9. 小池 茂昭 (埼玉大学・理学部)  
ペロンの方法 –revisited– ..... 90–97
10. 高坂 良史 (室蘭工業大学・工学部)  
表面拡散流方程式による 3 相境界運動の定常解の線形安定性について ..... 98–108
11. 井古田 亮 (九州大学大学院・数理学研究院)  
不変領域を持つ反応拡散系における擾乱の伝播速度の有界性について ..... 110–116
12. 梶木屋 龍治 (長崎総合科学大学・工学部)  
Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations ..... 118–124

## 研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004 (略称：PPM2004)」

日時： 2004年11月19日(金)～11月21日(日)

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2004.html>

### プログラム

#### 11月19日(金)

##### 午後の部

14:30-15:20 満島 正浩(東京大学大学院・数理科学研究科)

「反応拡散方程式系に現れる時間周期解」

15:40-16:30 丸野 健一(九州大学大学院・数理学研究院)

「いろいろな物理系における非線形局在モードについて」

16:40-17:30 和田 健志(熊本大学・工学部)

「Limit problem for the Maxwell-Schrödinger system」

#### 11月20日(土)

##### 午前の部

10:00-10:50 笠井 博則(福島大学・教育学部)

「実演!! 金平糖の実験とその生成過程のモデリングに向けて」

11:00-11:50 大江 貴司(岡山理科大学・総合情報学部)・大中 幸三郎(大阪大学・工学部)

「Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用と数値積分への応用」

午後の部

13:30-14:20 平岡 裕章 (大阪大学大学院・基礎工学研究科)

「無限次元力学系における位相計算理論」

14:30-15:20 谷内 靖 (信州大学・理学部)

「On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data」

15:40-16:30 菱田 俊明 (新潟大学・工学部)

「 $L^q$  estimates for the Stokes equations around a rotating body」

16:40-17:30 小池 茂昭 (埼玉大学・理学部)

「ペロンの方法 -revisited-」

11月21日(日)

午前の部

10:00-10:50 高坂 良史 (室蘭工業大学・工学部)

「表面拡散流方程式による3相境界運動の定常解の線形安定性について」

11:00-11:50 井古田 亮 (九州大学大学院・数理学研究院)

「不変領域を持つ反応拡散系における擾乱の伝播速度の有界性について」

12:00-12:50 梶木屋 龍治 (長崎総合科学大学・工学部)

「Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金(基盤C(2)):辻川、仙葉、壁谷/若手B:北、矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人: 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先: 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail: [tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp](mailto:tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp)

TEL: 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX: 0985-58-7289

# 反応拡散方程式系に現れる時間周期解

満島 正浩

東京大学大学院数理科学研究科

本稿では次の反応拡散方程式系

$$(E) \quad \begin{cases} \epsilon\tau u_t = \epsilon^2 u_{xx} + (1-u^2)(u-f(v)), & t > 0, -1 < x < 1, \\ v_t = Dv_{xx} + u - \gamma v, & t > 0, -1 < x < 1, \\ u_x = v_x = 0, & t > 0, x = \pm 1 \end{cases}$$

を考える. ここで  $\epsilon, \tau, D, \gamma$  は正のパラメータ,  $f$  は次を満たす滑らかな関数である.

$$(A1) \quad f'(v) > 0, \quad f(-v) = -f(v)$$

(E) についてはこれまで, 拡散係数  $\epsilon$  を微小パラメータとすることにより, 遷移層と呼ばれる内部に急激な傾きを持つ定常解の存在が知られていた [4]. これらの定常解の安定性については, SLEP 法を用いてスペクトルを計算することにより  $\tau = \epsilon^{-1}$  のときには線形安定であることがわかっている [5, 6]. また,  $\tau$  を分岐パラメータと見ることにより, 虚軸を横断的に横切る不安定化固有値の存在も知られている [7]. このことから, これらの定常解からの時間周期解の分岐 (Hopf 分岐) が予想され, 実際に数値シミュレーションでも確認されている. このような振動解は breather と呼ばれている.

本稿では特に 1 つの内部遷移層を持つ定常解に着目し,  $\epsilon \rightarrow 0$  の特異極限方程式を考える. そして分岐方程式を詳しく計算することにより Hopf 分岐解の存在を証明する.

## 1 特異極限方程式の導出

(E) の 1-遷移層定常解を  $(u^\epsilon, v^\epsilon)$ , 遷移層の位置を  $\phi^\epsilon$  とおく. ここでは接合漸近展開法を用いて特異極限方程式を導出する.

はじめに, 遷移層の外側で  $(u^\epsilon, v^\epsilon)$  は

$$\begin{aligned} u^\epsilon(t, x) &= u_0(t, x) + \epsilon u_1(t, x) + \epsilon^2 u_2(t, x) + \dots \\ v^\epsilon(t, x) &= v_0(t, x) + \epsilon v_1(t, x) + \epsilon^2 v_2(t, x) + \dots \end{aligned}$$

と展開されているとする (外部展開). また,  $\phi^\epsilon$  も

$$\phi^\epsilon(t) = \phi_0(t) + \epsilon \phi_1(t) + \epsilon^2 \phi_2(t) + \dots$$

と展開されているとする. これらを (E) に代入し,  $\epsilon^0$  の係数を比較すると次を得る.

$$\begin{aligned} (1 - u_0^2)(u_0 - f(v_0)) &= 0, \\ v_{0t} &= Dv_{0xx} + u_0 - \gamma v_0 \end{aligned}$$

第 1 式において

$$u_0(t, x) = \begin{cases} -1, & t > 0, -1 < x < \phi_0, \\ 1, & t > 0, \phi_0 < x < 1 \end{cases}$$

を採用すると、第 2 式は次のようになる.

$$\begin{cases} v_{0t}^- = Dv_{0xx}^- - 1 - \gamma v_0^-, & t > 0, -1 < x < \phi_0, \\ v_{0t}^+ = Dv_{0xx}^+ + 1 - \gamma v_0^+, & t > 0, \phi_0 < x < 1, \\ v_{0x}^-(t, -1) = v_{0x}^+(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

次に、遷移層の付近で  $(u^\epsilon, v^\epsilon)$  は

$$\begin{aligned} u^\epsilon(t, x) &= U_0(t, y) + \epsilon U_1(t, y) + \epsilon^2 U_2(t, y) + \dots \\ v^\epsilon(t, x) &= V_0(t, y) + \epsilon V_1(t, y) + \epsilon^2 V_2(t, y) + \dots \end{aligned}$$

と展開されているとする (内部展開). ここで  $y = (x - \phi^\epsilon)/\epsilon$  である. これらは外部展開の各項と連続的につながるために次の条件を満たす (接合条件).

$$\begin{aligned} U_k(t, \pm\infty) &= u_k(t, \phi_k \pm 0) \\ V_k(t, \pm\infty) &= v_k(t, \phi_k \pm 0) \end{aligned}$$

これらを (E) に代入, 係数比較すると次を得る.

$$\begin{aligned} U_{0yy} + \tau \dot{\phi}_0 U_{0y} + (1 - U_0^2)(U_0 - f(V_0)) &= 0, \\ V_{0yy} &= 0 \end{aligned}$$

第 2 式および適合条件より

$$V_0(t, y) = v_0^-(t, \phi_0) = v_0^+(t, \phi_0)$$

となる. また第 1 式において, 方程式

$$\begin{cases} \psi'' + c\psi' + (1 - \psi^2)(\psi - c/\sqrt{2}) = 0, & y \in \mathbb{R}, \\ \psi(\pm\infty) = \pm 1 \end{cases}$$

が一意解  $\psi(y) = \tanh((y - \theta)/\sqrt{2})$  ( $\theta$  は任意の定数) を持つことより

$$\begin{aligned} U_0(t, y) &= \tanh((y - \theta)/\sqrt{2}), \\ \tau \dot{\phi}_0 &= \sqrt{2}f(V_0) \end{aligned}$$

となる.

以上より, 特異極限方程式

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\sqrt{2}f(v^-(t, \phi))}{\tau}, & t > 0, \\ v_{-t}^- = Dv_{-xx}^- - 1 - \gamma v^-, & t > 0, -1 < x < \phi, \\ v_{-t}^+ = Dv_{-xx}^+ + 1 - \gamma v^+, & t > 0, \phi < x < 1, \\ v_{-x}^-(t, -1) = v_{-x}^+(t, 1) = 0, & t > 0, \\ v^-(t, \phi) = v^+(t, \phi), & t > 0 \end{cases}$$

を得る. ここで  $\phi_0, v_0$  の添字は省略した. ここで第 2 式を  $y = (x - \phi)/(\phi + 1)$ , 第 3 式を  $y = (x - \phi)/(1 - \phi)$  と変数変換することにより, 方程式は次のようになる.

$$(SE_0) \quad \begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\sqrt{2}f(v^-(t, 0))}{\tau}, & t > 0, \\ v_{-t}^- = \frac{\sqrt{2}f(v^-(t, 0))(y + 1)v_{-y}^-}{\tau(\phi + 1)} + \frac{Dv_{-yy}^-}{(\phi + 1)^2} - 1 - \gamma v^-, & t > 0, -1 < y < 0, \\ v_{-t}^+ = \frac{\sqrt{2}f(v^-(t, 0))(y - 1)v_{-y}^+}{\tau(\phi - 1)} + \frac{Dv_{-yy}^+}{(\phi - 1)^2} + 1 - \gamma v^+, & t > 0, 0 < y < 1, \\ v_{-y}^-(t, -1) = v_{-y}^+(t, 1) = 0, & t > 0, \\ v^-(t, 0) = v^+(t, 0), & t > 0. \end{cases}$$

## 2 固有値問題

(SE<sub>0</sub>) を次の発展方程式として考える.

$$(SE) \quad \frac{d\Theta}{dt} = \mathcal{F}(\tau, \Theta), \quad \Theta \in X$$

ここで  $X = \mathbb{C} \times H_N^2(-1, 1)$  ( $H_N^2(-1, 1)$  は  $H^2(-1, 1)$  での  $\{\cos n\pi y\}_{n=0}^\infty$  の閉包),

$$\mathcal{F}(\tau, \Theta) = \left( \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}f(v(0))}{\tau} \\ \frac{\sqrt{2}f(v(0))(y-\chi)v'}{\tau(\phi-\chi)} + \frac{Dv''}{(\phi-\chi)^2} + \chi - \gamma v \end{array} \right), \quad \Theta = \left( \begin{array}{c} \phi \\ v \end{array} \right) \in X,$$

$$\chi = \chi(y) = \begin{cases} -1, & -1 < y < 0, \\ 1, & 0 < y < 1 \end{cases}$$

である. (SE) は任意の  $\tau > 0$  に対して定常解  $\Theta_0 = (0, V)$  を持つ. ここで

$$V = V(y) = \frac{\chi(y)}{\gamma} \left( 1 - \frac{\cosh \sqrt{\gamma/D}(y - \chi(y))}{\cosh \sqrt{\gamma/D}} \right)$$

である.

補題 1 次を仮定する.

$$(A2) \quad D = O(\gamma) \quad (\gamma \rightarrow 0)$$

このとき, 十分小さな  $\gamma > 0$  に対して  $\tau_0 > 0, \omega_0 > 0$  および  $\Phi_0 \in X$  が存在して次を満たす.

$$\mathcal{F}_{\Theta}(\tau_0, \Theta_0)\Phi_0 = i\omega_0\Phi_0$$

さらに虚軸上には  $\pm i\omega_0$  の他に固有値は存在しない.

証明.

$$\mathcal{F}_{\Theta}(\tau, \Theta_0)\Phi = \left( \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}f'(0)w(0)}{\tau} \\ \frac{\sqrt{2}f'(0)w(0)(1-\chi y)V'}{\tau} + 2D\eta\chi V'' + Dw'' - \gamma w \end{array} \right), \quad \Phi = \left( \begin{array}{c} \eta \\ w \end{array} \right) \in X$$

である. 固有値問題  $\mathcal{F}_{\Theta}(\tau, \Theta_0)\Phi = \lambda\Phi$  は

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\sqrt{2}f'(0)w(0)}{\tau} &= \lambda\eta, \\ \frac{\sqrt{2}f'(0)w(0)(1-\chi y)V'}{\tau} + 2D\eta\chi V'' + Dw'' - \gamma w &= \lambda w \end{aligned}$$

となる. この式を整理すると次のようになる.

$$(2) \quad \mathcal{H}(\tau, \lambda) := \lambda - \frac{\sqrt{2}f'(0)}{\tau} (\lambda \langle \delta, K_\lambda(1-\chi y)V' \rangle + 2D \langle \delta, K_\lambda \chi V'' \rangle) = 0$$



ここで  $\langle \delta, \cdot \rangle$  は原点に台を持つデルタ関数,  $K_\lambda$  は  $T_\lambda = -Dd^2/dx^2 + \gamma + \lambda$  の逆写像, つまり

$$K_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi_n, \cdot)}{Dn^2\pi^2 + \gamma + \lambda} \phi_n,$$

$$\phi_n = \phi_n(y) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0, \\ \cos n\pi y, & n \geq 1 \end{cases}$$

である. また (A1) より  $f'(0) > 0$  である. (2) を  $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$  と実数値表示すると次の方程式になる.

$$(3) \quad \lambda_R - \frac{\sqrt{2}f'(0)}{\gamma\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\lambda_R(Dn^2\pi^2 + \gamma + \lambda_R) + \lambda_I^2) - \gamma B_n(Dn^2\pi^2 + \gamma + \lambda_R)}{(Dn^2\pi^2 + \gamma + \lambda_R)^2 + \lambda_I^2} = 0,$$

$$\lambda_I \left( 1 - \frac{\sqrt{2}f'(0)}{\gamma\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(Dn^2\pi^2 + \gamma) + \gamma B_n}{(Dn^2\pi^2 + \gamma + \lambda_R)^2 + \lambda_I^2} \right) = 0$$

ここで

$$A_n = \gamma(\phi_n, (1 - \chi y)V')\phi_n(0)$$

$$= \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{D}{\gamma}} \tanh \sqrt{\frac{\gamma}{D}}, & n = 0, \\ 2 \left( \sqrt{\frac{\gamma}{D}} n^2 \pi^2 \tanh \sqrt{\frac{\gamma}{D}} + \frac{\gamma}{D} n^2 \pi^2 \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2}{D^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{D}{\gamma}} \tanh \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \right) \right) / \left( n^2 \pi^2 + \frac{\gamma}{D} \right)^2, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$B_n = -2D(\phi_n, \chi V'')\phi_n(0)$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{\frac{D}{\gamma}} \tanh \sqrt{\frac{\gamma}{D}}, & n = 0, \\ 4 \left( \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \tanh \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \right) / \left( n^2 \pi^2 + \frac{\gamma}{D} \right), & n \geq 1 \end{cases}$$

である.  $A_n, B_n$  は共に正で,  $\gamma \rightarrow 0$  のとき共に正の極限值  $A_n^*, B_n^*$  を持つ.

(3) において  $\lambda_R = 0, \lambda_I > 0$  なる解を考える. このとき

$$(4) \quad -\frac{\sqrt{2}f'(0)}{\gamma\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \lambda_I^2 - \gamma B_n (Dn^2\pi^2 + \gamma)}{(Dn^2\pi^2 + \gamma)^2 + \lambda_I^2} = 0,$$

$$\lambda_I \left( 1 - \frac{\sqrt{2}f'(0)}{\gamma\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n (Dn^2\pi^2 + \gamma) + \gamma B_n}{(Dn^2\pi^2 + \gamma)^2 + \lambda_I^2} \right) = 0$$

である. まず, (4) 第 1 式を解くために次のように関数  $p$  を定義する.

$$p(\gamma, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \xi^2 - B_n \left( \frac{D}{\gamma} n^2 \pi^2 + 1 \right)}{\left( \frac{D}{\gamma} n^2 \pi^2 + 1 \right)^2 + \xi^2}$$

$D/\gamma \rightarrow \kappa > 0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) とすると

$$p(0, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^* \xi^2 - B_n^* (\kappa n^2 \pi^2 + 1)}{(\kappa n^2 \pi^2 + 1)^2 + \xi^2}$$

である. 方程式  $p(0, \xi) = 0$  はただ 1 つの正值解  $\xi = \xi^*$  を持ち, さらに

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(0, \xi^*) = 2\xi^* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_n^*(\kappa n^2 \pi^2 + 1) + B_n^*)(\kappa n^2 \pi^2 + 1)}{((\kappa n^2 \pi^2 + 1)^2 + \xi^{*2})^2} > 0$$

となる. 従って陰関数定理より十分小さな  $\gamma > 0$  に対して関数  $\xi = \xi_0(\gamma)$  が存在して  $p(\gamma, \xi_0(\gamma)) = 0$  を満たす. このとき  $\lambda_I = \omega_0 = \gamma \xi_0(\gamma)$  は (4) 第 1 式を満たす. また,

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}f'(0)}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(Dn^2\pi^2 + \gamma) + \gamma B_n}{(Dn^2\pi^2 + \gamma)^2 + \omega_0^2},$$

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 K_{i\omega_0}(1 - \chi y)V' + 2DK_{i\omega_0}\chi V'' \end{pmatrix}$$

とおくと, (1), (4) よりこれらは固有値問題  $\mathcal{F}_\Theta(\tau_0, \Theta_0)\Phi_0 = i\omega_0\Phi_0$  を満たす. 証明終.

注意. 容易にわかるように, 固有値  $-i\omega_0$  に対応する固有ベクトルは  $\Phi_1 = \overline{\Phi_0}$  である. また,  $\mathcal{L} = \mathcal{F}_\Theta(\tau_0, \Theta_0)$  の共役作用素  $\mathcal{L}^*$  も  $\mathcal{L}$  と等しい固有値を持ち,  $-i\omega_0, i\omega_0$  に対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\Phi_0^* = \begin{pmatrix} 2D\langle \delta, K_{-i\omega_0}\chi V'' \rangle \\ -i\omega_0 K_{i\omega_0}^* \delta \end{pmatrix}$$

および  $\Phi_1^* = \overline{\Phi_0^*}$  と計算される. (ここで  $K_\lambda^*$  は  $K_\lambda$  の共役作用素である.)

また,  $\partial \mathcal{H} / \partial \lambda(\tau_0, i\omega_0) \neq 0$  となるので  $(\tau, \lambda) = (\tau_0, i\omega_0)$  の近傍で (2) の一意解  $\lambda = \lambda_0(\tau)$  が定義され, さらに (3) より

$$(5) \quad \frac{d \operatorname{Re} \lambda_0}{d\tau}(\tau_0) < 0$$

が示される. (証明は略す.)

### 3 分岐方程式

時間周期解を考えるため, 次の関数空間を導入する.

$$X_{2\pi} = H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, X)$$

$$\langle \langle \Psi^*, \Psi \rangle \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \Psi^*(t), \Psi(t) \rangle_X dt \quad (\Psi^* \in X_{2\pi}^*, \Psi \in X_{2\pi})$$

(SE) を  $s = \omega_0(1 + \nu)t$  と変数変換すると,

$$\mathcal{G}(\tau, \nu, \Theta) := \omega_0(1 + \nu) \frac{d\Theta}{ds} - \mathcal{F}(\tau, \Theta)$$

として, 問題は  $\mathcal{G}(\tau, \nu, \Theta) = 0$  の解を  $\{(\tau, \nu, \Theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X_{2\pi} \mid \tau > 0, \Theta = \overline{\Theta}\}$  の中で考えることになる. ここで  $\Theta = \Theta_0$  は任意の  $\tau > 0, \nu \in \mathbb{R}$  に対して  $\mathcal{G} = 0$  の解である.

$$\mathcal{J} := \mathcal{G}_\Theta(\tau_0, 0, \Theta_0) = \omega_0 \frac{d}{ds} - \mathcal{L}$$

とおくと, 補題 1 より

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathcal{J} &= \text{span}\{\Psi_0, \Psi_1\} \\ \text{Ker } \mathcal{J}^* &= \text{span}\{\Psi_0^*, \Psi_1^*\} \\ \left( \begin{array}{l} \Psi_0 = e^{is}\Phi_0, \Psi_1 = e^{-is}\Phi_1 = \overline{\Psi_0} \\ \Psi_0^* = e^{is}\Phi_0^*, \Psi_1^* = e^{-is}\Phi_1^* = \overline{\Psi_0^*} \end{array} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで  $X_{2\pi}, Y_{2\pi}$  をそれぞれ次のように分解する.

$$\begin{aligned} X_{2\pi} &= \text{Ker } \mathcal{J} \oplus \mathcal{U} \\ Y_{2\pi} &= \text{Ran } \mathcal{J} \oplus \mathcal{V} \end{aligned}$$

$\mathcal{J}$  は  $\mathcal{U}$  から  $\text{Ran } \mathcal{J}$  への同型写像であり, また任意の  $Z \in Y_{2\pi}$  に対して

$$\mathcal{J}\Xi = Z \quad (\Xi \in X_{2\pi})$$

の可解性の必要十分条件は

$$\langle \langle \Psi_i^*, Z \rangle \rangle = 0, \quad i = 0, 1$$

である. このことから次の分岐方程式が得られる.

$$\Pi_i(\tau, \nu, z, \bar{z}) := \langle \langle \Psi_i^*, \mathcal{G}(\tau, \nu, \Theta_0 + z\Psi_0 + \bar{z}\overline{\Psi_0} + \Xi_0(\tau, \nu, z, \bar{z})) \rangle \rangle = 0, \quad i = 0, 1$$

ここで  $\Xi_0(\tau, \nu, z, \bar{z})$  は

$$\mathcal{Q}\mathcal{G}(\tau, \nu, \Theta_0 + z\Psi_0 + \bar{z}\overline{\Psi_0} + \Xi) = 0$$

の一意解である. ( $\mathcal{Q}$  は  $Y_{2\pi}$  から  $\text{Ran } \mathcal{J}$  への射影作用素)

定理 1 (A2) を仮定する. さらに  $f'''(0) \neq 0$  とする. このとき十分小さな  $\gamma > 0$  に対して  $(\tau, \nu, \Theta) = (\tau_0, 0, \Theta_0)$  より分岐解が存在する. さらに  $f'''(0) > 0$  ならばこの分岐は super-critical,  $f'''(0) < 0$  ならば sub-critical である.

証明. まず次のことが容易にわかる.

$$\begin{aligned} \overline{\Xi_1} &= \Xi_0, \\ \overline{\Pi_1} &= \Pi_0. \end{aligned}$$

特に第 2 式より  $\Pi_0 = 0$  の解だけ調べれば十分である.  $\Pi_0 = \sum \Pi_{k_j l m}(\tau - \tau_0)^k \nu^j z^l \bar{z}^m$  と展開すると, 係数について次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Pi_{k_j l m} &= 0 \quad (k + j + l + m = 1), \\ \Pi_{k_j l m} &= 0 \quad (l \neq m + 1), \\ \Pi_{0110} &= i\omega_0, \\ \Pi_{1010} &= -\langle \Phi_0^*, \mathcal{F}_{\tau\Theta}\Phi_0 \rangle_X - \langle \Phi_0^*, \mathcal{F}_{\Theta\Theta}[\Phi_0, \mathcal{L}^{-1}\mathcal{F}_\tau] \rangle_X, \\ \Pi_{0021} &= \langle \Phi_0^*, \mathcal{F}_{\Theta\Theta}[\Phi_0, \mathcal{L}^{-1}\mathcal{F}_{\Theta\Theta}[\Phi_0, \overline{\Phi_0}]] \rangle_X \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \Phi_0^*, \mathcal{F}_{\Theta\Theta}[\overline{\Phi_0}, (2i\omega_0 - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{F}_{\Theta\Theta}[\Phi_0, \Phi_0]] \rangle_X \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \Phi_0^*, \mathcal{F}_{\Theta\Theta\Theta}[\Phi_0, \Phi_0, \overline{\Phi_0}] \rangle_X. \end{aligned}$$

ここで  $\mathcal{F}_\tau, \mathcal{F}_{\tau\Theta}$  等は  $(\tau_0, \Theta_0)$  での値である. これにより分岐方程式は次のようになる.

$$\Pi_0(\tau, \nu, z, \bar{z}) = z(\Pi_{0110}\nu + \Pi_{1010}(\tau - \tau_0) + \Pi_{0021}|z|^2 + \dots) = 0$$

定常解  $\Theta_0$  に対応する解が  $z = 0$  である. 一方  $\text{Re}\Pi_{1010} \neq 0$  ならば, 非定常解は

$$\begin{aligned}\tau - \tau_0 &= -\frac{\text{Re}\Pi_{0021}}{\text{Re}\Pi_{1010}}|z|^2 + O(|z|^4) \\ \nu &= -\frac{\text{Re}\Pi_{1010}\text{Im}\Pi_{0021} + \text{Im}\Pi_{1010}\text{Re}\Pi_{0021}}{\omega_0\text{Re}\Pi_{1010}}|z|^2 + O(|z|^4)\end{aligned}$$

と表される. これにより  $\text{Re}\Pi_{0021}/\text{Re}\Pi_{1010} < 0 (> 0)$  ならば  $\tau = \tau_0$  より super-(sub-)critical な分岐解が存在する. 分岐方程式の各係数を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned}\Pi_{1010} &= -\langle \Phi_0^*, \mathcal{F}_{\tau\Theta}\Phi_0 \rangle_X \\ &= -\frac{\sqrt{2}f'(0)\omega_0^2}{\gamma^2\tau_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(Dn^2\pi^2 + \gamma) + \gamma B_n}{(Dn^2\pi^2 + \gamma)^2 + \omega_0^2} < 0\end{aligned}$$

また, (A1) の  $f$  の対称性より  $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{F}_{\Theta\Theta}, (2i\omega_0 - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{F}_{\Theta\Theta}$  はともに 0 となるので

$$\begin{aligned}\Pi_{0021} &= -\frac{1}{2}\langle \Phi_0^*, \mathcal{F}_{\Theta\Theta\Theta}[\Phi_0, \Phi_0, \bar{\Phi}_0] \rangle_X \\ &= \frac{f'''(0)}{f'(0)} \cdot \frac{\alpha}{\gamma^2} + o(\gamma^{-2})\end{aligned}$$

となる. ここで  $\alpha > 0$  は  $\gamma$  によらない定数である. よって  $f'''(0) > 0 (< 0)$  ならば十分小さな  $\gamma > 0$  に対して  $\Pi_{0021} > 0 (< 0)$  となる. 証明終.

## 4 考察

[7] によると, (E) において 1-遷移層定常解におけるスペクトルは,  $\{\lambda \in \mathbb{C} | \text{Re}\lambda \geq 0\}$  において虚軸を横切る不安定化固有値しか存在しない. このことから (SE) においても,  $\tau = \tau_0$  において  $\{\lambda \in \mathbb{C} | \text{Re}\lambda \geq 0\}$  における固有値は  $\pm i\omega_0$  しか存在しないと予想される. この予想が正しければ, (5) も鑑み, 定理 1 より得られる sub-critical な分岐解は安定であることが言える.

また, (E) から形式的漸近展開で求めた (SE) への  $\epsilon \rightarrow 0$  での収束の問題も今後の課題である.

## 参考文献

- [1] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer, Singularities and groups in bifurcation theory, Applied Mathematical Sciences 51, Springer-Verlag (1985).
- [2] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff and Y. H. Wan, Theory and applications of the Hopf bifurcation, Cambridge University Press (1980).
- [3] J. Marsden and M. McCracken, Hopf bifurcation and its applications, Applied Mathematical Sciences 19, Springer-Verlag (1976).
- [4] M. Mimura, M. Tabata and Y. Hosono, Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter, SIAM J. Math. Anal. 11 (1980), 613-631.

- [5] Y. Nishiura, Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit, *Dynamics Reported*, 3 (1994), 25-103.
- [6] Y. Nishiura and H. Fujii, Stability of singularly perturbed solutions to systems of reaction diffusion equations, *SIAM J.Math Anal.* 18 (1987), 1726-1770.
- [7] Y. Nishiura and M. Mimura, Layer oscillations in reaction-diffusion systems, *SIAM J. Appl. Math.* 49 (1989), 481-514.

# いろいろな物理系における非線形局在モード

丸野健一

九州大学・数理学研究院

## 1 序論

局在化現象はいろいろな物理系で頻繁に出現する重要な現象の1つである。

例えば、固体物理では、結晶の離散並進不変性を壊すことにより局在構造が生ずる。結晶中での不純物あるいは欠陥の周りに局在した振動フォノンモードや、乱れた媒質における電子の Anderson localization がこれにあたる。

一方、流体のような連続系では、非線形性と分散性のバランスによりソリトンもしくは孤立波と呼ばれる局在構造が出現する。

局在構造の生成原因として、上記のものが古くからよく知られているが、最近広い分野で注目を集めている 'Intrinsic Localized Mode (ILM)' ('Discrete Breather' とか 'Discrete Soliton' と呼ばれている) と呼ばれる別の局在構造がある [1, 2, 3, 4, 5]. この現象は、系が持つ周期 (離散) 的構造と非線形性の働きにより出現するものであり、離散系特有の現象である。Anderson 局在が基本的には線形の範囲での現象であるのに対して、この ILM は非線形の現象である [6]. ILM は、固体物理はもちろんのこと、DNA や電気回路, Optical waveguide, Photonic Crystal, Bose-Einstein 凝縮 (BEC) 等、様々な分野で出現することがわかっており、様々な応用可能性を秘めている。

ILM を研究する上で頻繁に使用されるモデルとしては離散非線形 Schrödinger 方程式 (DNLS 方程式) がある:

$$i\frac{dA_n}{dt} + \gamma|A_n|^2A_n + \varepsilon(A_{n+1} + A_{n-1}) = 0. \quad (1)$$

これは連続極限でよく知られた非線形 Schrödinger (NLS) 方程式になるが、NLS 方程式が持っていた可積分性は持っていない。DNLS 方程式は DNA [7, 8] や Optical waveguide arrays [9, 10, 11], BEC [12] 等と関連した研究が行われている。Optical waveguide arrays においては実験が数多く行われており、レーザーの強度を上げいくと回折効果と非線形効果がつりあって Discrete Soliton が現れることが示されている [9, 10, 11].

NLS 方程式の空間離散モデルとしては, Ablowitz-Ladik (AL) 方程式

$$i\frac{dA_n}{dt} + \gamma|A_n|^2(A_{n+1} + A_{n-1}) + \varepsilon(A_{n+1} + A_{n-1}) = 0, \quad (2)$$

があるが,これは厳密解が具体的に構成できる可積分な方程式であり,いろいろな解が具体的に構成できる [13]. このモデルは物理的な意味付けが難しいものの,DNLS 方程式の性質を調べる際にしばしば比較に使用され,重要である.

本稿では,いろいろな物理系で現れる DNLS 方程式の局在構造に関連した話題を解説する.

## 2 Discrete Nonlinear Schrödinger 方程式と BEC

ここでは,BEC においてどのように DNLS 方程式が登場するかを見てみる.

Optical lattice でトラップされた BEC を考える. Optical lattice は周期的な格子をなしている. 平均場近似により,BEC のダイナミクスは Gross-Pitaevskii(GP) 方程式により支配される:

$$i\hbar \frac{d\psi(\vec{r},t)}{dt} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r},t)|^2 \right) \psi(\vec{r},t). \quad (3)$$

(ここで  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ ,  $a$  は  $s$ -wave scattering length,  $m$  は原子の質量.) 波動関数は粒子の総数  $N$  で規格化している. 外場からのポテンシャルは

$$V(\vec{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + V_0 \left( \sin^2 \left( \frac{\pi x}{d} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi y}{d} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi z}{d} \right) \right), \quad (4)$$

で,磁気トラップと Optical lattice(各軸に沿って, 2本の逆向きに進む波長  $\lambda$  のレーザーによって作られる)の両方のポテンシャルを含んでいる. 磁気トラップのおおのこの方向の角振動数は  $\omega_i$  で記され, Optical lattice は深さ  $V_0$  と格子の周期  $d = \lambda/2$  で特徴づけられる. ( $d$  は recoil momentum  $k_r = \pi/d$  を定義する.) 以下の議論では, Optical lattice のポテンシャルの深さを recoil エネルギー  $E_r = \hbar^2 k_r^2 / 2m$  で規格化している.

Optical lattice の深さ  $V_0$  が化学ポテンシャル  $\mu$  より十分大きいとき系の挙動は最低エネルギーバンドに閉じ込められると考えられる. その時,固体物理学でよく使われる Tight-binding 近似が適応でき,凝縮 order parameter を周期ポテンシャルのおおのこの谷に局在した波動関数の和で書くことができる:

$$\psi(\vec{r},t) = \sqrt{N} \sum_n \phi_n(t) \psi_n(\vec{r}), \quad (5)$$

( $\psi_n(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{r}_n)$  は on-site 波動関数,  $n$  は周期ポテンシャルの谷の位置である.) これを GP 方程式に代入すると,DNLS 方程式

$$i\hbar \frac{d\phi(\vec{r},t)}{dt} = -J(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) + (\epsilon_n + U|\phi_n|^2)\phi_n, \quad (6)$$

を得る. Tunneling rate  $J$  は

$$J = - \int d\vec{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi_n \vec{\nabla} \psi_{n+1} + \psi_n V(\vec{r}) \psi_{n+1} \right], \quad (7)$$

2体相互作用エネルギー  $U$  は

$$U = gN \int d\vec{r} \psi_n^A, \quad (8)$$

On-site エネルギー  $\varepsilon_n$  は

$$\varepsilon_n = \int d\vec{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \psi_n)^2 + V(\vec{r}) \psi_n^2 \right], \quad (9)$$

で与えられる。

BEC で最初に発見されたのは Dark Soliton であった [14]. これは実験的に自然な状況が repulsive interaction ( $a > 0$ ) の場合, つまり Defocusing NLS の場合であるからである. attractive interaction ( $a < 0$ ) は当初は実現が難しく, Bright Soliton を作ることができなかった. しかしながら, Optical lattice を用いることにより, repulsive interaction の場合にも Bright soliton が観測されることが理論的に示され, 後に実験で観測された [12, 15]. 現在では Feshbach 共鳴を用いて attractive interaction ( $a < 0$ ) を実現できており, 通常 (focusing NLS) の Bright soliton が観測されている [16, 17].

### 3 変形 Discrete Nonlinear Schrödinger 方程式

変形 DNLS equation

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \alpha(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + \beta |\psi_n|^2 \psi_n + F(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1}) = 0, \quad (10)$$

を考える. ここで  $F(x, y, z)$  は  $x, y, z$  の多項式で書ける関数とする. たとえば,

$$F(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1}) \equiv \gamma |\psi_n|^2 (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) \quad (11)$$

と選んだものは過去によく研究されている [18, 19, 20, 21, 22]. 関数  $F$  が (11) の場合の変形 DNLS 方程式 (10) は, DNLS 方程式 (1) に, inter-site の 3 次の非線形項が余分についた形となっている.  $\gamma = (\beta' - \beta)/2$  と置いたとき,  $\beta = \beta'$  とすると変形 DNLS 方程式は DNLS 方程式 (1) となるし,  $\beta \rightarrow 0$  とすると AL 方程式となる.

変形 DNLS 方程式の局在解の存在についてはよく知られている [23, 24, 25, 26]. 結合が弱い場合の局在解の安定性についても調べられている.

しかしながら, 変形 DNLS 方程式 (10) の局在解の具体的な形についてはこれまでわかっていない. もちろん, 変形 DNLS 方程式は明らかに非可積分系であるので, AL 方程式のようにいろいろな解を具体的に書き下すことはできないであろうけれども, ある場合には孤立波解を具体的に書ける場合があるかもしれない. もし具体的な解が特殊な場合にでも構成できれば, それを手がかりに, 非線形局在モードの解析ができる. ここで考える問題は以下のものである:

変形 DNLS 方程式 (10) は, 厳密非線形局在解を持ちうるか? 持ちうるならば, その場合を分類し, 具体的に解を構成せよ.



まず, 以下の 4 次非線形項を付加した DNLS 方程式

$$i\frac{d\psi_n}{dt} + \alpha(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + \beta|\psi_n|^2\psi_n + \gamma|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \delta|\psi_n|^4(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) = 0, \quad (12)$$

を考える. この方程式 (規格化  $\alpha = 1, \gamma = -4\delta/\beta$  をしておく) は変形 Poisson brackets

$$\{\psi_n, \psi_m^*\} = i(1 + \gamma|\psi_n|^2 + \delta|\psi_n|^4)\delta_{nm}, \quad \{\psi_n, \psi_m\} = \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \quad (13)$$

$$\{B, C\} = i\sum_n \left( \frac{\partial B}{\partial \psi_n} \frac{\partial C}{\partial \psi_n^*} - \frac{\partial C}{\partial \psi_n} \frac{\partial B}{\partial \psi_n^*} \right) (1 + \gamma|\psi_n|^2 + \delta|\psi_n|^4), \quad (14)$$

を導入し, Hamiltonian

$$H = -\sum_n (\psi_n \psi_{n+1}^* + \psi_n^* \psi_{n+1}) - \frac{\beta}{2\delta} \sum_n \ln(1 + \gamma|\psi_n|^2 + \delta|\psi_n|^4), \quad (15)$$

を考えたとき, 運動方程式

$$\dot{\psi}_n = \{H, \psi_n\}, \quad (16)$$

から導出される.

今,  $\psi_n(t) = \phi_n e^{-i\omega t}$  ( $\phi_n$  は実数) で書ける解を考える. これを (12) に代入すると

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = \frac{(-\omega + 2\alpha)\phi_n - \beta\phi_n^3}{\alpha + \gamma\phi_n^2 + \delta\phi_n^4}, \quad \alpha, \beta, \delta \neq 0, \quad (17)$$

が得られる. 今, この非線形写像 (17) に Singularity confinement (SC) test と呼ばれる差分版の可積分性判定テストを適用してみる [27]. そうすると, ある特別な係数の場合に, SC property を持つことがわかる. これは, 係数がある特別な関係を満たすとき, 非線形写像は可積分である可能性がある, ということを示唆している.

では, 具体的な解を構成してみよう.  $\psi_n = \frac{g_n}{f_n} e^{-i\omega t}$  を方程式 (12) に代入してみると,

$$(\omega - 2\alpha)f_{n+1}f_n^3f_{n-1}g_n + \alpha f_n^4f_{n-1}g_{n+1} + \alpha f_{n+1}f_n^4g_{n-1} + \beta f_{n+1}f_n f_{n-1}g_n^3 + \gamma f_n^2f_{n-1}g_{n+1}g_n^2 + \gamma f_{n+1}f_n^2g_n^2g_{n-1} + \delta f_{n-1}g_{n+1}g_n^4 + \delta f_{n+1}g_n^4g_{n-1} = 0,$$

を得る. 今,  $f, g$  を指数関数に関する多項式とすると, 以下の解を得る.

**Bright Soliton 解**

$$\psi_n(t) = A \operatorname{sech}(n \log(p) + \log(n_0)) e^{-i\omega t}. \quad (18)$$

ここで  $\omega = \frac{\pm\beta\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\delta} + 4\alpha\delta + \beta\gamma}{2\delta}$ ,  $p = \frac{\pm\sqrt{\omega(\omega - 4\alpha)} + 2\alpha - \omega}{2\alpha}$ ,  $A = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta\omega(4\alpha - \omega)}{\alpha\delta(2\alpha - \omega)}}$ ,  $n_0$  は任意定数とする.

**Dark Soliton 解**

$$\psi_n(t) = A \tanh(n \log(p) + \log(n_0)) e^{-i\omega t}. \quad (19)$$

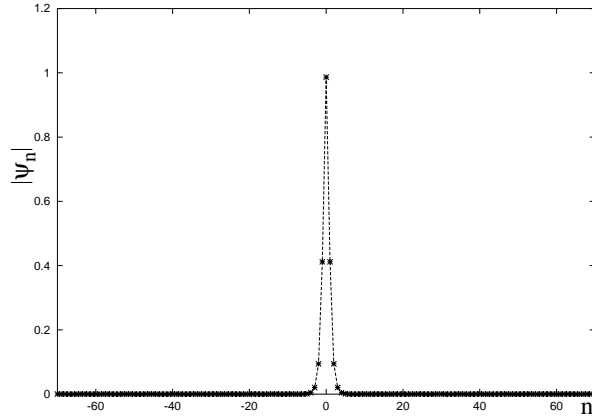


図 1: 方程式 (12) の Bright soliton 解の  $t=100$  での形. 数値計算は 4 次ルンゲ・クッタ法を用いた.  $\alpha = 1, \beta = 0.2, \gamma = 4.78701, \delta = -0.2$ .

ここで  $\omega = \frac{\pm\beta\sqrt{\gamma^2-4\alpha\delta+4\alpha\delta+\beta\gamma}}{2\delta}$ ,  $p = \sqrt{\frac{\pm\sqrt{2\alpha\omega+2\alpha+\omega}}{2\alpha-\omega}}$ ,  $A = \pm\sqrt{\frac{\beta\omega}{2\delta(2\alpha-\omega)}}$ ,  $n_0$  は任意定数とする.

以下に, 厳密解を初期値とした数値的な時間発展を示す.

SC test で非可積分と判定される場合のパラメーターでは何が起きているのだろうか? ここに  $(\phi_{n+1}, \phi_n)$ -相平面のプロットを示す. 図.3 は非可積分の場合であるが, 相平面のプロットはカオス的な振る舞いを示す.

非線形写像 (17) がなぜあるパラメーターの組で可積分であるのかを説明する. McMillan mapping [28]  $z_{n+1} + z_{n-1} = (A + Bz_n)/(C + Dz_n^2)$  は保存量を持ち, Jacobi 楕円関数により解くことができる [29]. 方程式 (17) はあるパラメーターの組で分母と分子に共通因子ができてキャンセルすることにより McMillan mapping に帰着する. このパラメーターの組は方程式 (17) が SC property を持つパラメーターの組と一致する. 例えば, Fig.2 のパラメーターのとき, 方程式 (17) は McMillan mapping  $\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = -7\phi_n/(-22 + 11\phi_n^2)$ , に帰着し, 保存量  $-22(\phi_n^2 + \phi_{n-1}^2) + 7\phi_n\phi_{n-1} + 11\phi_n^2\phi_{n-1}^2$  を持つ [29].

変形 DNLS は以下のように一般化できる:

$$\begin{aligned}
& i\frac{d\psi_n}{dt} + \alpha(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) \\
& + \gamma_2|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \beta_2|\psi_n|^2\psi_n \\
& + \gamma_4|\psi_n|^4(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \beta_4|\psi_n|^4\psi_n \\
& + \dots \\
& + \gamma_{2N-2}|\psi_n|^{2N-2}(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \beta_{2N-2}|\psi_n|^{2N-2}\psi_n \\
& + \gamma_{2N}|\psi_n|^{2N}(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

4 次変形 DNLS 方程式の場合と同様にして, 非線形写像

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = \frac{(-\omega + 2\alpha)\phi_n - \beta_2\phi_n^3 - \beta_4\phi_n^5 - \dots - \beta_{2N-2}\psi_n^{2N-1}}{\alpha + \gamma_2\phi_n^2 + \gamma_4\phi_n^4 + \dots + \gamma_{2N-2}\phi_n^{2N-2} + \gamma_{2N}\phi_n^{2N}}, \tag{21}$$

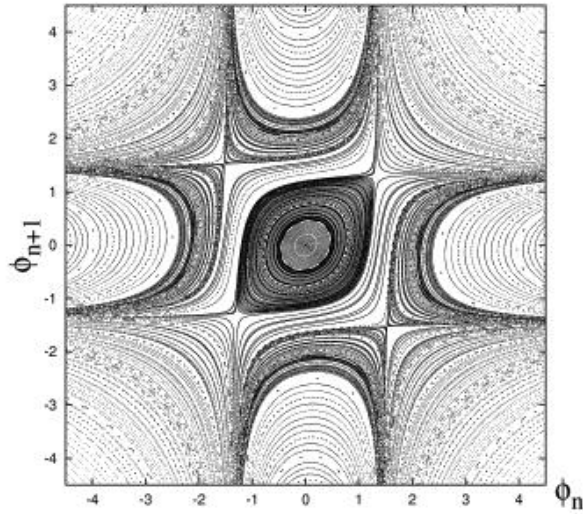


図 2: 非線形写像 (17) で生成される解の軌道.(可積分な場合:  $\omega = 37, \alpha = 22, \beta = 7, \gamma = -33, \delta = 11$ . パラメーターは Singularity confinement test により決定された.)

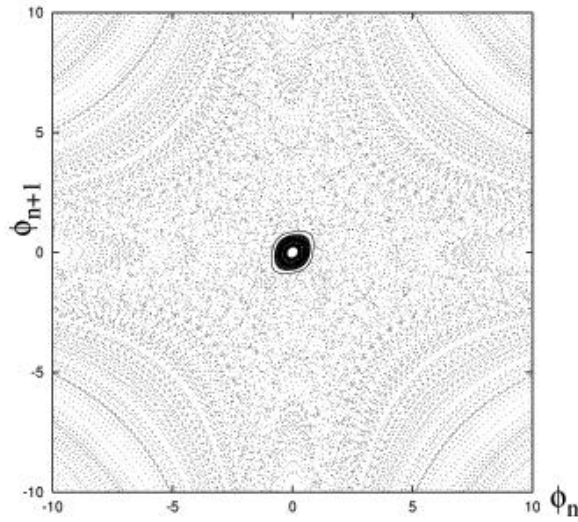


図 3: 非線形写像 (17) で生成された解の軌道. (非可積分な場合:  $\omega = 37, \alpha = 22, \beta = 6, \gamma = -33, \delta = 11$ .)

を得る。これもあるパラメーターの組で SC property を持ち、非線形局在解を具体的に構成できる。

変形 DNLS 方程式はさらに面白い性質を持つのだが、それについては論文を参照してほしい [30].

## 参考文献

- [1] A. J. Sievers and S. Takeno, Phys. Rev. Lett. **61**, 970 (1988)
- [2] S. Flach and C. R. Willis, Phys. Rep. **295**, 181 (1998).
- [3] D. Hennig and G. P. Tsironis, Phys. Rep. **307**, 333 (1999).
- [4] P. G. Kevrekidis, K. O. Rasmussen and A. R. Bishop, Int. J. Mod. Phys. B, **15**, 2833 (2001).
- [5] D. K. Campbell, S. Flach and Y. Kivshar, Physics Today, 43 January (2004).
- [6] A. C. Scott, Phys. Reports, **217**, 1 (1992).
- [7] A. C. Scott, Philos. Trans. R. Soc. London A **315**, 423 (1985).
- [8] A. C. Scott and L. Macneil, Phys. Lett. **98A**, 87 (1983).
- [9] D. N. Christodoulides and R. I. Joseph, Opt. Lett. **13**, 794 (1988).
- [10] D. N. Christodoulides, F. Lederer and Y. Silberberg, Nature, **424** 817 (2003).
- [11] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. Boyd and J. S. Aitchison, Phys. Rev. Lett. **81**, 3383 (1998).
- [12] A. Trombettoni and A. Smerzi, Phys. Rev. Lett. **86**, 2353 (2001).
- [13] M. Ablowitz and J. F. Ladik, Stud. Appl. Math. **55**, 213 (1976).
- [14] S. Burger et al., Phys. Rev. Lett. **287**, 5198 (1999).
- [15] B. Eiermann et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 230401 (2004).
- [16] L. Khaykovich et al., Science **296**, 1290 (2002).
- [17] K. E. Strecker et al., Nature **417**, 150 (2002).
- [18] M. Salerno, Phys. Rev. A **46**, 6856 (1992).
- [19] Y. Kivshar and M. Salerno, Phys. Rev. E **49**, 3543 (1994).
- [20] D. Cai, A. R. Bishop and N. Gronbech-Jensen, Phys. Rev. Lett. **72**, 591 (1994).

- [21] D. Cai, A. R. Bishop and N. Gronbech-Jensen, *Phys. Rev. E* **53**, 4131 (1996).
- [22] D. Hennig, K. O. Ramussen, H. Gabriel, and A. Bülow, *Phys. Rev. E* **54**, 5788 (1996).
- [23] R. S. MacKay and S. Aubry, *Nonlinearity* **7**, 1623 (1994).
- [24] S. Flach and K. Kladko and R. S. MacKay, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1207 (1997).
- [25] B. Malomed and M. I. Weinstein, *Phys. Lett. A* **220**, 91 (1996).
- [26] M. I. Weinstein, *Nonlinearity* **12**, 673 (1999).
- [27] B. Grammaticos, A. Ramani and V. G. Papageorgiou, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1825 (1991).
- [28] E. M. McMillan, in *Topics in Modern Physics*, edited by W. E. Brittin and H. Odabashi, Colorado Associated Univ. Press, Boulder, 219 (1971).
- [29] R. B. Potts, *J. Austral. Math. Soc. (Series B)*, **23**, 64 (1981).
- [30] K. Maruno, Y. Ohta and N. Joshi, *Phys. Lett. A*, **311** 214 (2003).

# Limit Problem for the Maxwell-Schrödinger System

熊本大学工学部 和田健志

## 1. 序

1.1. Maxwell-Schrödinger 方程式. ここではミクロな, しかし非相対論的な荷電粒子の運動及びそれによって引き起こされる電磁場の時間発展を記述する方程式である Maxwell-Schrödinger 方程式系 (MS) について考える. すなわち,  $(u, \phi, \mathbf{A}) : \mathbf{R}^{1+3} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$  を未知関数として

$$i\partial_t u = -(\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})^2 u + \phi u, \quad (1.1)$$

$$-\Delta\phi - c^{-1}\partial_t \operatorname{div} \mathbf{A} = \rho, \quad (1.2)$$

$$(c^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\mathbf{A} + \nabla(c^{-1}\partial_t\phi + \operatorname{div} \mathbf{A}) = c^{-1}\mathbf{J} \quad (1.3)$$

と表されるものである. ここで  $\rho = |u|^2$ ,  $\mathbf{J} = 2\operatorname{Im} \bar{u}(\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})u$  であり,  $c > 0$  は光速を表すパラメタである. 物理的には,  $u$  は荷電粒子の運動を記述する波動関数,  $(\phi, \mathbf{A})$  は電磁ポテンシャル,  $\rho$  は電荷密度,  $\mathbf{J}$  は電流密度であるが,  $\rho, \mathbf{J}$  をそれぞれ電荷, 電流の密度と考えてよいのは以下の事情による. まず,  $\rho$  は本来荷電粒子の存在確率の密度関数であるが, 電荷密度をこれで代用することは自然である. 次に  $\rho$  と  $\mathbf{J}$  の間には (1.1) により  $\partial_t\rho + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$  の関係がある. これは電磁気学における電荷保存則と全く同じ式であるので  $\mathbf{J}$  を電流密度 (本来は確率の流れなのであるが) と解釈する.

この方程式は少なくとも二つの保存量を持つ. その一つは電荷保存則の積分形

$$\|u(t)\|_2 = \|u(0)\|_2 \quad (1.4)$$

であり, もう一つはエネルギー保存則

$$\mathcal{E}(t) \equiv 2\|(\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})u\|_2^2 + \|\nabla\phi + c^{-1}\partial_t\mathbf{A}\|_2^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{A}\|_2^2 = \mathcal{E}(0) \quad (1.5)$$

である. エネルギーの定義式において第1項は粒子の運動エネルギー, 第2, 第3項はそれぞれ電場, 磁場のエネルギーである. これらの保存則は後に解のアプリオリ評価を得る際に利用される.

次にこの方程式の持つゲージ不変性について説明する.  $\lambda : \mathbf{R}^{1+3} \rightarrow \mathbf{R}$  を任意の関数とし, ゲージ変換

$$(u', \phi', \mathbf{A}') = (\exp(ic^{-1}\lambda)u, \phi - c^{-1}\partial_t\lambda, \mathbf{A} + \nabla\lambda) \quad (1.6)$$

を考えると, この変換で方程式は不変に保たれる. よって,  $\lambda$  の取り方を変えれば, (MS) の初期値問題の解は一意的でないことがわかる. この不定性は未知関数自身は観測可能量

でないことに由来する．実際に観測されるのは  $\rho, J$  や電場  $E = -\nabla\phi - c^{-1}\partial_t\mathbf{A}$ , 磁場  $B = \text{rot } \mathbf{A}$  等のゲージ不変な量なのである．この不定性をのぞくために, ゲージ条件と呼ばれるもう一つの条件を課して考える (数学的にはゲージ同値な関数の類から代表関数を取り出す方法を指定することに相当する) . よく知られたゲージ条件として Coulomb ゲージ

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (1.7)$$

がある (方程式からこの式は時間不変になっていることに注意) この条件の下で (1.2)-(1.3) は

$$-\Delta\phi = \rho, \quad (c^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\mathbf{A} = c^{-1}P\mathbf{J} \quad (1.8)$$

に帰着する．ここで  $P = 1 - \nabla \text{div } \Delta^{-1}$  はソレノイダルな部分空間への射影である．最初の式は Newton ポテンシャルを用いて  $\phi = (4\pi|x|)^{-1} * \rho$  と解けるので実際には未知関数は  $u, \mathbf{A}$  である．(1.1) と (1.8) の連立系を以後 (MS-C) と書く．(MS-C) を解くには初期データ  $(u(0), \mathbf{A}(0), c^{-1}\partial_t\mathbf{A}(0))$  を Sobolev 空間

$$X^{s,\sigma} = \{(u_0, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) \in H^s \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}; \text{div } \mathbf{A}_0 = \text{div } \mathbf{A}_1 = 0\}$$

に与えて解けばよい．ゲージ条件としては Lorentz ゲージ

$$c^{-1}\partial_t\phi + \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (1.9)$$

もよく知られており, このゲージのもとでは (1.2)-(1.3) は

$$(c^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\phi = \rho(u), \quad (c^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\mathbf{A} = c^{-1}J(u, \mathbf{A}) \quad (1.10)$$

となる．(1.1) と (1.10) との連立系を (MS-L) と書く．この場合は初期データ

$$(u(0), \phi(0), c^{-1}\partial_t\phi(0), \mathbf{A}(0), c^{-1}\partial_t\mathbf{A}(0))$$

を Sobolev 空間

$$Y^{s,\sigma} = \{(u_0, \phi_0, \phi_1, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) \in H^s \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1} \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}; \\ \text{div } \mathbf{A}_0 + c^{-1}\phi_1 = \text{div } \mathbf{A}_1 + \Delta\phi_0 + |u_0|^2 = 0\}$$

に与えて解けばよい．以後, 断り無しに  $s, \sigma$  というときはそれぞれ (MS) における Schrödinger 部分, Maxwell 部分の regularity を表しているとする．

1.2. 問題の設定. 上記 (MS) には光速を表すパラメタ  $c$  が含まれているが, 一般に光速は非常に大きいためほとんど無限大であると考えられる. そこで (MS) において形式的に  $c \rightarrow \infty$  の極限をとってみると (1.1),(1.2) はそれぞれ

$$i\partial_t u = -\Delta u + \phi u, \quad -\Delta \phi = \rho$$

となる. 第2式は Newton ポテンシャルより解けるが, その結果を第1式に代入すると

$$i\partial_t u = -\Delta u + \{(4\pi|x|)^{-1} * |u|^2\}u \quad (\text{H})$$

となりこれはよく知られた Hartree 方程式である. ここでは上記の考察を正当化することを試みる.

1.3. 適切性に関する既知の結果. まず (H) について, 以下が知られている.  $u(0) \in H^s$  ( $s \geq 0$ ) とすると, この初期値に対する (H) の解が  $C(\mathbf{R}; H^s)$  において存在し, 一意である (正確に言うと,  $s = 0$  の場合は一意性はもう少し狭いクラスでしか成り立たないが, それについては省略する). さらに,  $u_1, u_2$  がともに (H) の解であるとすると,  $\|u_1 - u_2; L^\infty(I; H^s)\| \leq C\|u_1(0) - u_2(0); H^s\|$  となる. ここで  $I$  は有界区間であり, 定数  $C$  は  $I$  の長さのほか  $\|u_j(0); H^s\|$  にも依存する定数である. この結果は [1, 2, 6] 等による.

次に (MS) に関して. 現在得られている結果の仮定はやや複雑であるが  $s = \sigma$  の場合に限っていうと, (MS-C) および (MS-L) の時間局所解は  $s = \sigma \geq 5/3$  のとき一意に存在することがわかっている. これは最初 [4] により  $s = \sigma > 5/2$  の場合に証明されていたものを [5] が拡張したものである. [5] においては初期データに関する連続依存性も証明されているがそれは (H) の場合の様な局所 Lipschitz 連続性ではなく 各点連続性である. また,  $s = \sigma = 1$  の場合の時間大域解の存在が [3] により示されているが一意性は証明できない. それは証明がエネルギー保存則を利用したコンパクト性の手法によるからである.

## 2. 光速無限大での極限

2.1. 主結果. 先に述べた通り  $c \rightarrow \infty$  において形式的には (MS) は (H) に近づくが実際に (MS) の解が (H) の解に収束するかどうかは証明を要する. この問題の解がここでの主結果である. ここでは, 以下を仮定する.

(A1)  $s \geq 5/3$ ,  $\max\{4/3, s - 1, (s + 2)/3\} \leq \sigma \leq \min\{s + 1, (5s - 2)/3\}$  である. 但し  $(s, \sigma) \neq (5/2, 7/2), (5/2, 3/2)$  とする.

(A2)  $(u_c, \mathbf{A}_c)$  は  $(u_c, \mathbf{A}_c, c^{-1}\partial_t \mathbf{A}_c) \in C(I_c; X^{s, \sigma})$  であるような (MS-C) の一意な解である. ここで  $I_c$  は解の接続により得られる最大時間区間であり,  $0$  を含むとする.

(A3)  $v \in C(\mathbf{R}; H^s)$  は (H) の解である.



(A4)  $\lim_{c \rightarrow \infty} \|u_c(0) - v(0); H^s\| = 0$ , さらに  $H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}$  において

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (\mathbf{A}_c(0), c^{-1} \partial_t \mathbf{A}_c(0)) = (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1)$$

である .

定理 1. 上記の仮定 (A1)-(A4) のもとで ,  $0$  を含む区間  $I \subset I_c$  が存在し ,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \|u_c - v; L^\infty(I; H^s)\| = 0 \quad (2.1)$$

が成り立つ .

注意. (i) 前記 [5] における regularity の仮定は (A1) よりも弱い . 従って時間局所解の存在は保証されている . (ii) 定理 2 において , 結論を得られる  $s, \sigma$  の範囲をできる限り広くとっていること , および結論において解の収束を考えるクラスを初期データのそれと同じにとっていることが重要である .

Lorentz ゲージに対してもほぼ同様の結果が成り立つ . すなわち (A2),(A4) の代わりに以下を仮定する .

(A5)  $(u_c, \phi_c, \mathbf{A}_c)$  は  $(u_c, \phi_c, c^{-1} \partial_t \phi_c, \mathbf{A}_c, c^{-1} \partial_t \mathbf{A}_c) \in C(I_c; Y^{s, \sigma})$  であるような (MS-L) の一意な解である . ここで  $I_c$  は解の接続により得られる最大時間区間であり ,  $0$  を含むとする .

(A6)  $\lim_{c \rightarrow \infty} \|u_c(0) - v(0); H^s\| = 0$ , さらに  $H^\sigma \oplus H^{\sigma-1} \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}$  において

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (\mathbf{A}_c(0), c^{-1} \partial_t \mathbf{A}_c(0), \phi_c(0), c^{-1} \partial_t \phi_c(0)) = (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \psi_0, \psi_1)$$

である .

定理 2. 上記の仮定 (A1), (A3), (A5), (A6) のもとで ,  $0$  を含む区間  $I \subset I_c$  が存在し ,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \|u_c - v; L^\infty(I; H^s)\| = 0 \quad (2.2)$$

が成り立つ .

2.2. 証明について . 定理 2 について説明する . 定理 2.2 についてはゲージ変換により定理 2 に帰着させる . また簡単のため  $s = 2, \sigma = 4/3$  の場合に限って述べる . まず解の存在時間の下からの評価が必要である . そのために解のアプリオリ評価を行う . 最初に電荷保存則 , エネルギー保存則からわかることとして

$$\|u_c; L^\infty(I; H^1)\| + \|\mathbf{A}_c; L^\infty(I; \dot{H}^1)\| + \|c^{-1} \partial_t \mathbf{A}_c; L^\infty(I; L^2)\| \leq C \quad (2.3)$$

がある (Coulomb ゲージ条件のもとでは  $\|\mathbf{A}_c; \dot{H}^1\| \leq \|\text{rot } \mathbf{A}\|_2$  であることに注意) . ここで定数  $C$  は光速パラメタ  $c$  に依らない . また  $\dot{H}^\sigma$  は斉次 Sobolev 空間である . しかし

これだけでは十分でないので他の関数空間における評価も考える．波動方程式に関しては次の Strichartz 型評価を用いる．

補題 3.  $1/q + 1/r = 1/\theta + 1/\nu = 1/2$ ,  $2 \leq r, \nu < \infty$  とし,  $\mathbf{A}$  は波動方程式

$$(c^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\mathbf{A} = c^{-1}\mathbf{F}$$

の解であるとする, ,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{A}; L^q(I; \dot{H}_r^{\sigma-2/q})\| + \|c^{-1}\partial_t\mathbf{A}; L^q(I; \dot{H}_r^{\sigma-1-2/q})\| \\ & \lesssim c^{-1/q}(\|\mathbf{A}(0); \dot{H}^\sigma\| + \|c^{-1}\partial_t\mathbf{A}(0); \dot{H}^{\sigma-1}\|) + c^{-1/q-1/\theta}\|\mathbf{F}; L^{\theta'}(I; \dot{H}_\nu^{\sigma-1+2/\theta})\| \end{aligned}$$

が成り立つ．

上の補題を (1.8) の第 2 式に適用すると ( $1 \leq \sigma \leq 7/3$  に対して)

$$\begin{aligned} \|c^{-1}\partial_t\mathbf{A}; L^6(I; L^3)\| & \lesssim c^{-1/6}\|(\mathbf{A}(0), c^{-1}\partial_t\mathbf{A}(0)); \dot{H}^{4/3} \oplus \dot{H}^{1/3}\| \\ & + c^{-1/6}T^{1/2}\langle\|c^{-1}\mathbf{A}; L^\infty(I; \dot{H}^1)\|\rangle\|u; L^\infty(I; H^2)\|^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

を得る．一方で Schrödinger 方程式に対しては次のような方法を用いる．(1.1) より  $\mathcal{H}u = -(\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})^2u$  は次の方程式を満たす．

$$i\partial_t\mathcal{H}u = (\mathcal{H} + \phi)\mathcal{H}u - 2ic^{-1}\partial_t\mathbf{A}(\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})u + [\mathcal{H}, \phi]u. \quad (2.5)$$

$\mathcal{H} + \phi$  は  $L^2$  における自己共役作用素であるから

$$\begin{aligned} \partial_t\|\mathcal{H}u\|_2 & \leq \| - 2ic^{-1}\partial_t\mathbf{A}(\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})u + [\mathcal{H}, \phi]u \|_2 \\ & \lesssim (\|c^{-1}\partial_t\mathbf{A}\|_3 + \|u; H^1\|^2)\langle\|c^{-1}\mathbf{A}; \dot{H}^1\|\rangle\|u; H^2\| \end{aligned}$$

を得る．ここで Sobolev の不等式を用いた．補間不等式により容易に示される関係

$$\|u; H^2\| \lesssim \|\mathcal{H}u\|_2 + \langle\|c^{-1}\mathbf{A}; \dot{H}^1\|\rangle^4\|u\|_2$$

および  $L^2$  ノルムの保存則 を用いれば上式は  $\|u; H^2\|$  に関する微分不等式と見なせるので Gronwall の不等式により

$$\begin{aligned} \|u; L^\infty(I; H^2)\| & \leq C\|u(0); H^2\|\langle\|c^{-1}\mathbf{A}; L^\infty(\dot{H}^1)\|\rangle^4 \\ & \times \exp(CT\|u; L^\infty(I; H^1)\|^2 + CT^{5/6}\|c^{-1}\partial_t\mathbf{A}; L^6(I; L^3)\|) \end{aligned} \quad (2.6)$$

を得る．エネルギー保存則により (2.3) が成り立っているのでこれらを定数で抑える．よく用いられる論法により区間  $I$  の幅が小さければ  $\|u; L^\infty(I; H^2)\|$ ,  $\|c^{-1}\partial_t\mathbf{A}; L^6(I; L^3)\|$  が  $c$  に関して一様に有界であることがわかる．次に収束の証明である． $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ ,  $\eta_\epsilon = \epsilon^{-3}\eta(\cdot/\epsilon)$  とする．また  $v_\epsilon$  は (H) の解で  $v_\epsilon(0) = \eta_\epsilon * v(0)$  となるものとする．

命題 4. (A1)-(A-4) を仮定すると、次が成り立つ:

$$\limsup_{c \rightarrow \infty} \|u_c - v_\epsilon; L^\infty(I; H^2)\| \lesssim \|v(0) - v_\epsilon(0); H^2\|. \quad (2.7)$$

定理 2 は上の命題から従う。実際、上の命題と (H) の解の初期条件に対する連続依存性から

$$\begin{aligned} & \limsup_{c \rightarrow \infty} \|u_c - v; L^\infty(I; H^s)\| \\ & \lesssim \limsup_{c \rightarrow \infty} \|u_c - v_\epsilon; L^\infty(I; H^s)\| + \|v_\epsilon - v; L^\infty(I; H^s)\| \\ & \lesssim \|v(0) - v_\epsilon(0); H^s\| \end{aligned}$$

となるので  $\epsilon \downarrow 0$  の極限をとれば主定理が従う。このように  $v_\epsilon$  を介在させたのは  $v \in H^2$  だけでは評価しきれないためである。(1.1) と (H) との差をとると

$$i\partial_t u_- = (\mathcal{H} + \phi)u_- + 2ic^{-1}\mathbf{A} \cdot \nabla v_\epsilon - c^{-2}|\mathbf{A}|^2 v_\epsilon + \phi_- v_\epsilon \quad (2.8)$$

となる。ここで  $u_- = u - v_\epsilon$ ,  $\phi_- = (4\pi|x|)^{-1} * (|u|^2 - |v_\epsilon|^2)$  である。この式からわかるように  $\|u_-; H^2\| \lesssim \|\partial_t u_-\|_2 + \|u_-\|_2 + O(c^{-1})$  である。故に  $\|u_-\|_2$  と  $\|\partial_t u_-\|_2$  を評価すればよい ( $\sigma = 4/3$  の様に  $\sigma$  の値が小さいと単純なエネルギー法で  $\|u_-; H^2\|$  を評価するわけにはいかない —  $\mathbf{A}$  を 2 回微分できないため) 標準的な  $L^2$  の方法により

$$\begin{aligned} \|u_-; L^\infty(I; L^2)\| & \leq \|u_-(0)\|_2 + \|2ic^{-1}\mathbf{A} \cdot \nabla v_\epsilon - c^{-2}|\mathbf{A}|^2 v_\epsilon + \phi_- v_\epsilon; L^1(I; L^2)\| \\ & \lesssim \|u_-(0)\|_2 + c^{-1}T\|\mathbf{A}; L^\infty(I; \dot{H}^1)\| \|v_\epsilon; L^\infty(I; H^2)\| \\ & \quad + c^{-2}T\|\mathbf{A}; L^\infty(I; \dot{H}^1)\|^2 \|v_\epsilon; L^\infty(I; H^2)\| \\ & \quad + T(\|u; L^\infty(I; H^2)\| + \|v_\epsilon; L^\infty(I; H^2)\|)^2 \|u_-; L^\infty(I; L^2)\|. \end{aligned}$$

であるから  $T$  を十分小さくとれば

$$\|u_-; L^\infty(I; L^2)\| \lesssim \|u_-(0)\|_2 + O(c^{-1})$$

である。次に  $\|\partial_t u_-\|_2$  を評価するために (2.8) の両辺を  $t$  で微分すると

$$\begin{aligned} i\partial_t^2 u_- & = (\mathcal{H} + \phi)\partial_t u_- + 2ic^{-1}\partial_t \mathbf{A} \cdot (\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})u_- + \partial_t \phi u_- \\ & \quad + 2ic^{-1}\partial_t \mathbf{A} \cdot (\nabla - ic^{-1}\mathbf{A})v_\epsilon + 2ic^{-1}\mathbf{A} \cdot \nabla \partial_t v_\epsilon \\ & \quad - c^{-2}|\mathbf{A}|^2 \partial_t v_\epsilon + \partial_t \phi_- v_\epsilon + \phi_- \partial_t v_\epsilon \\ & = (\mathcal{H} + \phi)\partial_t u_- + \sum_{j=1}^7 f_j. \end{aligned} \quad (2.9)$$

したがって再び  $L^2$  エネルギー法で

$$\|\partial_t u_-\|_2 \leq \|\partial_t u_-(0)\|_2 + \left\| \sum_{j=1}^7 f_j; L^1(I; L^2) \right\|$$

となる．以下右辺を項別に評価していくと以下ようになる：

$$\begin{aligned} \|f_1; L^1(I; L^2)\| &\lesssim T^{5/6} \|c^{-1} \partial_t \mathbf{A}; L^6(I; L^3)\| \|u_-; L^\infty(I; H^2)\|, \\ \|f_2 + f_6 + f_7; L^1(I; L^2)\| &\lesssim T \|u_-\|_Y, \\ \|f_3; L^1(I; L^2)\| &\lesssim T^{5/6} \|c^{-1} \partial_t \mathbf{A}; L^6(I; L^3)\|, \\ \|f_4 + f_5; L^1(I; L^2)\| &\lesssim c^{-1} \|v_\epsilon; L^\infty(I; H^4)\|. \end{aligned}$$

ここで  $\|u_-\|_Y = \|u_-; L^\infty(I; L^2)\| + \|\partial_t u_-; L^\infty(I; L^2)\|$  である． $\|u_-; L^\infty(I; H^2)\| \lesssim \|u_-\|_Y + O(c^{-1})$  であるから  $T \ll 1$  であれば結局

$$\|u_-; L^\infty(I; H^2)\| \lesssim \|u_-(0); H^2\| + \|c^{-1} \partial_t \mathbf{A}; L^6(I; L^3)\| + c^{-1} \|v_\epsilon; L^\infty(I; H^4)\| + O(c^{-1})$$

となる． $c \rightarrow \infty$  とすれば  $\|c^{-1} \partial_t \mathbf{A}; L^6(I; L^3)\| = O(c^{-1/6})$  なので結論を得る． $s \neq 2$  の場合は  $s = 2$  の場合を足がかりにしてもう少し複雑な計算が必要となるので省略する．なお上の証明では仮定 (A4) のうち  $\lim(\mathbf{A}_c(0), c^{-1} \partial_t \mathbf{A}_c(0)) = (B_0, B_1)$  を少しゆるめて  $\sup_c \|(\mathbf{A}_c(0), c^{-1} \partial_t \mathbf{A}_c(0)); H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}\| < \infty$  としても大丈夫である．この仮定は  $\sigma = s - 1$  の場合に必要となる．

## REFERENCES

- [1] T. Cazenave, F. B. Weissler: *The Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equation in  $H^s$* , Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.
- [2] J. Ginibre, G. Velo: On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction. *Math. Z.* **170** (1980), 109–136.
- [3] Y. Guo, K. Nakamitsu, W. Strauss: *Global finite-energy solutions of the Maxwell-Schrödinger system*, Comm. Math. Phys. **170** (1995), 181–196.
- [4] K. Nakamitsu, M. Tsutsumi: *The Cauchy problem for the coupled Maxwell-Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **27** (1986), 211–216.
- [5] M. Nakamura, T. Wada: *Local well-posedness for the Maxwell-Schrödinger equation*, to appear in Math. Ann.
- [6] Y. Tsutsumi:  *$L^2$ -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), 115–125.



# 金平糖を作ろう—金平糖の数理モデルにむけて

笠井 博則 ( 福島大学 共生システム理工学類 )

田代 麻美 ( 福島大学 教育学研究科 )

〒960 - 1296 福島市金谷川1

## 1 はじめに

本論は、宮崎大学で行われた研究会「PPM2004」での講演を基にしてまとめたものです。

筆者らの金平糖との付き合いはさほど長くはありません。ことは、筆者の一人(笠井)が所属していた福島大学教育学部が2003年11月に開催した、地域の小学生を対象とした公開講座の講師を依頼されたことに始まります。この公開講座で筆者らは、「自分たちも不思議に思っている現象を見せよう」と思い、WebPage やエッセイなど、金平糖に関するあまり多くない情報を基に金平糖を作る実演を試み、試行錯誤の上、運よく成功しました。

今回の講演は、このことを聞きつけた宮崎大学の矢崎成俊先生が「PPM2004」で実演とともに話をするように依頼されたことにより実現しました。

本論では、まず第一節で金平糖の紹介をし、第二節で今回実演した金平糖の作り方を紹介し、それを踏まえて第三節で生成過程のモデルの試案を考えていきます。数理モデル作りに関してはまさに現在進行中ということもあり一つの試案しか紹介していませんが、今後の展望について第四節で述べていきます。

### 1.1 金平糖の紹介

金平糖というお菓子をご存知でしょうか？ 光沢を持った角の出ている砂糖菓子です。(下図参照)



角がたくさんある奇妙な形をしているので、型を使って作っているのではないかとと思われる人もいると思いますが(実際に型に入れて固めて作っているところ

もあるようですが、この角はある条件の下で自然に出来てくるものです。作り方を簡単に言うならば、「核（いりゴマ、米を砕いた粒など）を鍋に入れて、核が互にくっつかないように鍋を回しながら加熱し乾き加減になるごとに砂糖液を掛けていく」ということになります。適当な鍋の加熱温度と掛ける砂糖液の濃度、温度を適当に選ぶと長い時間のうちに角ができ表面に光沢を持った金平糖になります。

金平糖にはきれいな光沢があるので、結晶構造があるように思われます。通常の結晶成長では結晶構造に対応する特定の面がありその方向に成長していきます。しかしながら金平糖では特定の方向があるようには見えません。珊瑚の成長のように単に角が伸びて行くような現象はいくつか知られていますが、結晶構造を持っている（ようにみえながら）角が出る現象は他に知られていません。金平糖の形は不思議なものなのです。

なお、金平糖の語源は、ポルトガル語の Confeitos（砂糖・お菓子）と言われています。このお菓子が日本に伝わったのはキリスト教の文化が伝わったのと同じ時代。宣教師ルイス・フロイトが織田信長に贈ったのが記録に残る最初だそうです。

## 2 金平糖の作り方

この節では、今回の講演での実演に使った金平糖製造装置と実験の概要を紹介します。

福島大学で行われた公開講座では、諸般の事情があり準備予算が材料費込みで2万円ほどでした。このため、実際にプロの使っているものを小型化したものや、[1]に紹介されていた回転速度を調整できるモーター付きの装置などでも作れませんでした。しかし、いくつかの Web ページ [3], [4] に紹介されていた基本的な製法の説明をみて、必要な要素は「回転する鍋」と「(適当な条件の)糖液」だけであることがわかりました。これだけならば一般の店で買える材料を使って金平糖を作ってみることができるはずだと思い、準備に取り掛かりました。

### 2.1 実験の準備・道具

[準備物]

- 原材料（いりゴマ、グラニュー糖）
- 糖液を作るための計量道具（グラムばかり、計量カップ）
- 簡易金平糖製造装置（回転する鍋、カセットコンロなど）（註：後でもう

少し詳しく説明します)

- 糖液を適温に温めておくためのもの(鍋、加熱用の電気ヒーター、温度計)
- その他(糖液を掛けるスプーン、鍋肌に付いたゴマなどを落とすためのシャモジ)

今回の実演で利用した簡易製造装置の主な材料は次のとおりです。(今回製作した紹介する製作装置は手動です。2人一組で一人が糖液をかけて一人がのんびり鍋を回す、という役割分担になります。)

直径40cmのアルミ製なべ、  
土台にするスノコ、  
軸になる棒(金属の丸棒)、  
なべと軸棒をつなぐ金具、  
軸を土台に固定する金具、  
軸を回すハンドル、  
その他(ナット、ワッシャーなど)  
総製作費(約5,000円)

## 2.2 実験概要

[実験手順]

1. 糖液を作る: お湯100gに対しグラニュー糖270gを溶かす。 かけるときには70度くらいにする。
2. 鍋に核にする炒りゴマを入れて、回転させながら過熱し、十分温まったら糖液を掛けはじめ。(グラニュー糖は120度で焦げ始めるのでそれ以下の温度でないといけない。鍋肌の温度の目安は90度とした。)
3. 1分間に2回転程度回転させながら過熱する。
4. 鍋肌にくっついたゴマや砂糖は固まったら叩いて落とす。最初のうちは互いに付きやすいので大きな塊になったら叩いて崩す。
5. 以降、表面が乾き加減になるごとにスプーン一杯弱の糖液をかける。

単調な作業が20分ほど続くと、砂糖コーティングされた核から角が出始めます。長時間続けていくと 少しずつ大きくなっていき、1時間半から2時間で5mm から8mm 程度の大きさの金平糖ができてきます。



## 2.3 実験条件に関する注意

金平糖の製造過程において、(ノウハウのレベルで理由がはっきりしないものも含めて)重要と思われる要素を列挙します。

### 鍋の回転

1分間に1回から2回のペースで鍋を回す。

鍋を回していることのメリットとしては、1.熱が均一になること、2.粒が回転しながら他の粒と接触するので、表面の糖の液の層が均一化すること、3.回転によって、液が動き濃度の濃い液が供給されること、4.随時表面が空気に触れることで蒸発が速まること、があげられます。

回転が速過ぎて、かつ糖液をかける量が足りないと角が削れてしまいます。

### 火力の調整

火力が強すぎて蒸発が速いと光沢のない珊瑚状の塊ができました。また、(粘性のせいかな?)火力が弱いと互いに付きやすくうまく作れません。



金平糖生成の火力による形の違いを2つの写真で見比べてみます。上の写真は実験の初期の失敗例。火力が強すぎたときのものです。珊瑚状の形をしていますが全く光沢がなく結晶成長とは言えないことが見てわかります。

下の写真は適当な火力で加熱したときのもの。核にしているゴマがはっきり見て取れるほどに透明度が高く何らかの意味では結晶としての構造があると思われます。



### 糖液の選択

金平糖を作るときには、ショ糖の純度の高いグラニュー糖が適当で、上白糖など粘りけが高い不純物が除かれていないものでは粒同士がくっつきやすく適当ではありません。

今回の実験では、お湯100gにグラニュー糖270gを溶かした水溶液を70に加熱したものを用いました。この糖の溶液は飽和溶液になっていません。かける糖液の濃度と温度の調整が大切で、濃度が低いと、できた角が再度溶けてしまうことになり、また濃すぎると水分が少し蒸発しただけですぐ固まってなべ底につきやすく、全体に行き渡りません。また温度が低すぎるとなべの温度が下がりやすく、糖液の水分が蒸発しにくくなります。

### 粒の大きさ

粒の大きさが揃っていることも重要なようです。ゴマから金平糖ができたのに気を良くして、小豆からできないか、とチャレンジしたときのこと。まず小豆が砂糖コーティングされ、最初に角らしきものができたのですが、その後「角が折れ」、次はその「折れた角が砂糖コーティングを傷つける」という循環になり大きな金平糖になりませんでした。

## 3 金平糖の成長過程の数理モデルに向けて

右図はゴマを核として金平糖を作ったときの成長過程のサンプルです。一つの粒を連続的に追ったものではないので、あくまで傾向ですが、成長過程について、概ね次のようなことが言えるかと思えます。



- ・最初、ゴマに砂糖の層がコーティングされ球に近い形になる。
- ・その後細い角が出てくる。
- ・角が太くなり？角の根元が成長し？大きくなっていく。

この過程を追えるモデルが理想的ですが、本論では試案としてショ糖の性質に着目して、砂糖がコーティングされた後の結晶の成長過程のモデルを考えたいと思います。

### 3.1 モデル化の方針

金平糖の成長過程をモデル化するために、いくつか必要な言葉を用意します。

- 過飽和度

$$(\text{過飽和度 } \sigma) = \frac{(\text{実濃度 } u) - (\text{飽和濃度 } u_s)}{(\text{飽和濃度 } u_s)}$$

飽和濃度  $u_s(T)$  は温度に依存するので、過飽和度は濃度と温度の関数といえる。

- 熱伝導度、拡散係数：熱や物質が広がっていく速さの指標
- 蒸発速度：水溶液の水が蒸発していく速さ。溶質の溶けている量が大きいと沸点が上がる「沸点上昇」が知られている。溶液の濃度が濃くなると蒸発速度は相対的に遅くなる。

金平糖を作る際に、重要と思われる要素は3つありました。

- 糖液：適度な濃度・温度での供給。
- 火力：糖液の蒸発速度を決める。
- 鍋の回転：熱・糖液の供給の一様化、蒸発促進、

ここでは結晶面の移動に着目した「界面モデル」を考えていきます。(これ以降、金平糖の表面を結晶面または表面、金平糖が占めている領域を結晶領域ということにします。) 金平糖を作るのに必要な要素と糖の性質を考慮してモデル化のための次の仮定を入れます。

(仮定)

1. 金平糖は結晶成長によって大きくなる。
2. 結晶の領域  $\Omega_c$ 、溶液の領域  $\Gamma = \partial\Omega_c$ 、外部領域  $\Omega_o$  の3相があり、それぞれ熱伝導度が異なる。
3. 溶液は結晶の領域表面(境界)にあるとみなす。
4. 結晶の成長速度は溶液の過飽和度に比例する。
5. 糖液中の水分の蒸発速度は表面での温度と濃度に依存する。
6. 糖の拡散係数は、熱の拡散係数に比べて十分小さい。
7. 熱は一定温度で結晶の内部の点(原点)で与えられているとみなす。
8. 糖液は時間周期的に決まった量、温度、濃度のものが与えられる。

7. の仮定はかなり極端な近似だが、結晶は比較的早い速度で恒常的に回転していて外部から熱を与えられると考えられるので、平均的には中心から熱が供給されているとしてもあながち的外れではないと思います。また、8. の仮定は乾き加減になるときに一定温度、濃度の糖液が供給されることに対応しています。糖液を掛けられて程なく表面に一様に糖液が供給されるという仮定と考えられます。

### 3.2 数理モデル試案(界面モデル)

ここでは、次の方針でモデルを作ります。

- 外気、表面の液体(糖液)、結晶の3つの部分ごとに方程式を作る。
- 糖液は結晶の表面にあることとし濃度は主に溶質(ショ糖)の拡散と、水の蒸発で変化する。
- 結晶の界面の成長は溶液の過飽和度に比例する。

ここで記号の準備をしておきます。

定義域  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) または滑らかな境界をもつ有界領域とします。 $\Omega = \Omega_c \cup \partial\Omega_c \cup \Omega_o$ , ( $\Omega_c \cap \Omega_o = \emptyset$ ) で表され、それぞれ  $\Omega_c$  を結晶領域 (原点を含む)、 $\partial\Omega_c$  を結晶領域の境界、 $\Omega_o$  を外部領域と呼ぶことにします。表記上の問題ですが、これ以降  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (ただし  $n = 2, 3$ ) 上の点を  $\mathbf{x}$  と表し、特に  $\partial\Omega_c$  上の点を  $x$  で表わすことにします。

未知関数は、 $\Omega$  上で定義された関数の温度  $T(\mathbf{x}, t)$  と、 $\partial\Omega_c$  上で定義された糖液の濃度を表す関数  $u(x, t)$  の2つ。さらにこれらの量に依存して、結晶の領域  $\Omega_c = \Omega_c(t)$  の境界 (界面) が成長速度ベクトル  $\mathbf{v}(x, t)$  によって動くものとします。

このとき、次の方程式系によって結晶 (金平糖) の界面は成長すると考えます。

$$T_t = \operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x})\nabla T) + f(\mathbf{x}, u, T) \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_t = \beta\Delta u + C'\kappa(u)[T]_{in}^{out}u^2 \quad \text{on } \partial\Omega_c \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \alpha\sigma(u, T)\mathbf{n} \quad \text{on } \partial\Omega_c \quad (3)$$

$$u(x, nt_p) = u_0, \quad T(x, nt_p) = T_a \quad \text{on } \partial\Omega_c \quad (4)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (\Omega \text{ が有界領域のとき}), \quad (6)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} T(\mathbf{x}, t) = \bar{T} \quad (\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ のとき}) \quad (7)$$

$$\kappa(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} \kappa_c & \text{in } \Omega_c \\ \kappa(u) & \text{on } \partial\Omega_c, \\ \kappa_o & \text{in } \Omega_o \end{cases} \quad (8)$$

$$f(\mathbf{x}, u, T) = \begin{cases} T_a & \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ C\kappa(u)[T]_{in}^{out} & \mathbf{x} \in \partial\Omega_c \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (9)$$

$t_p$  は時間周期,  $n$  は非負整数で、結晶の境界での濃度や温度は  $t_p$  の時間周期ごとに一定の値になるとします。 $\Omega$  の外側での  $T(\mathbf{x}, t)$  の境界条件は (十分遠方で) 室温を仮定。(4) の  $u_0, T_a$  は定数で、 $T(\mathbf{x}, t)$  の初期関数  $T_0(\mathbf{x})$  と矛盾しないように  $T_0(\mathbf{x})|_{\partial\Omega_c} = T_a$  を仮定する。さらに、

- $\sigma(u, T)$ : 過飽和度。濃度と温度に依存する。
- $T_a$ : 鍋から供給される温度,  $\bar{T}$ : 十分遠方の温度・室温,
- $\mathbf{n}$ :  $\Omega_c$  に対する外向き法線ベクトル,
- $\alpha$ : 過飽和度  $\sigma(u, T)$  に対する成長速度の比例定数,
- $\beta$ : 溶質 (シヨ糖) の拡散係数,
- $[T]_{in}^{out}$ : 外部領域  $\Omega_o$  と内部領域  $\Omega_c$  の温度差,

$\partial\Omega_c$  上の点、 $x = x_0$  における  $[T]_{in}^{out}$  の値  $[T(x_0)]_{in}^{out}$  は次のように定義される。

$$[T(x_0)]_{in}^{out} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{T(x_0 + \varepsilon \mathbf{n}) - T(x_0 - \varepsilon \mathbf{n})\}$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は領域  $\Omega$  の、点  $x_0 \in \Omega_c$  における外向き法線ベクトル。

- $\kappa(u)$ 
  - $\kappa_c$ :  $\Omega_c$  における熱伝導度。
  - $\kappa_o$ :  $\Omega_o$  における熱伝導度。
  - $\kappa(u)$ :  $\partial\Omega_c$  における熱伝導度。

ここでは  $\kappa(u) = (\text{定数})$  または  $\kappa(u) = \kappa_w \exp(-\frac{Cu}{1-u})$
- $f(\mathbf{x}, u, T)$ : 熱の供給。鍋肌からの熱の供給に相当する分を原点からの熱の供給で代用している。

いくつかの項の解説をします。

式 (1) 右辺第二項  $C\kappa(u)[T]_{in}^{out}$ : 熱の流出の項 (放射、蒸発)

境界での熱の分布が連続であるという条件

$$[\kappa(\mathbf{x})\nabla T \cdot \mathbf{n}]_{in}^{out} = 0$$

に対応する。ここでは、 $\nabla T \cdot \mathbf{n}$  の代わりに結晶の内側と外側との温度差  $[T]_{in}^{out}$  を用いた。

式 (1) 右辺第二項  $\kappa(u)$ : 濃度の上昇に伴う沸点上昇の効果

一般に溶液の沸点は、溶液に溶けている溶質のモル濃度に応じて上昇していく。このとき、沸点の上昇にともない蒸発の速度も遅くなると考える。つまり  $\kappa(u)$  は糖液のモル濃度が高くなるほど小さくなる。濃度  $u$  に対してモル濃度は  $u/(1-u)$  と表される。 $u = 0$  のときには水の伝導係数  $\kappa_w$  と一致すると思い、仮に  $\kappa(u) = \kappa_w \exp(-\frac{Cu}{1-u})$  としている。ここで、定数  $C$  が十分小さいときには  $\kappa(u)$  は定数とみなせる。

式 (2) 右辺第二項: 水分の蒸発による濃度の変化の項

$C'\kappa(u)[T]_{in}^{out}u^2$  とした。

濃度の変化の要因として、「濃度勾配による拡散」と、水の蒸発による濃度変化を考え、結晶化による質量変化は無視することにしました。 $S, W(t)$  をそれぞれ溶液中の溶質、水の質量とすると濃度  $u$  は

$$u = \frac{S}{S + W(t)}$$

と表すことができる。ここで、(空間変化を考慮しないことにして) 両辺を  $t$  で微分すると

$$\frac{d}{dt}u = \frac{-S \frac{d}{dt}W}{(S + W(t))^2} = -\frac{\frac{d}{dt}W}{S} \left( \frac{S}{S + W(t)} \right)^2 = -\frac{\frac{d}{dt}W}{S} u^2.$$

水の質量変化（減少）は蒸発によるものであるから、水の質量変化は表面からの熱の拡散に比例すると近似できる。すなわち  $C'$  を定数として

$$-\frac{d}{dt} \frac{W}{S} \simeq C' \kappa(u) [T]_{in}^{out}.$$

これによって非線形項を  $C' \kappa(u) [T]_{in}^{out} u^2$  と考えた。

式 (3): 結晶成長速度の式

「結晶の成長速度は過飽和度に比例する」ことを表している。我々は過飽和度が表面上の各点で異なることにより一様でない結晶成長が生じると考えている。

式 (4): 糖液の供給

実際の金平糖の製造では表面が乾き加減になるごとに糖液を供給しているが、時間周期的に糖液を供給しているものとした。

## 4 今後の展望

本来ならばモデルをつくったら次は解析。ということで数値計算例をのせるべきでなのですが、単純なスキームで現在取り掛かったばかりなので紹介しないことにしました。パラメータをいろいろに変えて挙動を調べたうえで見込みがあれば、高精度計算に進みたいと思います。

### 4.1 モデルの改良・拡張

今回の「1次（0次？）近似としての界面モデル」で、効果として取り入れることを検討したが複雑になると思い導入をあきらめた効果について指摘だけはしておきたいと思います。

湿度の効果：

今回紹介したモデルでは、未知関数を温度  $T$  と濃度  $u$  だけにしたせいで非線形項がかなり複雑になっています。水の蒸発が過飽和度、ひいては成長速度に関わることを考えると、結晶の外部の湿度は考える必要があります。

流れの効果：

「流れ（溶液の移動）」があると糖の供給が速やかに行われる。粘性が強い液体の中では物質の拡散は熱に比べてはるかに遅いので、糖の結晶成長では糖の供給が成長の速度を決める傾向にあります。実際の金平糖の製作では、粒が互いにぶつかる事や、それ自身の回転によって「流れ」があり糖の供給が行われている。

結晶成長の軸の効果：

当日の講演では飽和溶液の中に種結晶を入れてシヨ糖の単結晶を作ったときの写真を紹介しました。

通常の結晶では結晶面があり、そこに軸方向に結晶が成長していくことが多い。多くの物質は単結晶を作るとき、過飽和溶液中に核としての種結晶（小さな単結晶）を入れてそこから成長させる。食塩やミョウバンの単結晶を作る実験をしたことがある方もおられると思います。このとき、多くの場合単結晶は種結晶のところでのみ成長し、他のところではたとえばビンの壁ではまずできないものです。このことは結晶成長が結晶構造を反映した結晶面で起きることに対応するものと理解できます。

しかしシヨ糖の場合、過飽和溶液をビンに入れて放置すると曲面になっている壁面にも結晶が出来ます。これは他の物質の結晶に比べると特異な振舞いといえます。このことは「シヨ糖の単結晶は比較的できやすく、結晶面というものが厳密でない」ことを示しているように思えます。

## 4.2 今後の興味の方角

金平糖の特殊性と一般性という視点で気になっていることを書いていきたいと思えます。

シヨ糖は何が他の物質と違うのか？

金平糖の形を作る原因として思いつく糖の性質として

- ・濃度が高くなると粘性が高くなる。
- ・高温での溶解度が大きく、冷めたあとの過飽和度が高い。
- ・(中分子)の性質：分子量が大きく、多少ゆがんでも結晶を作る。

などがあります。どれが要因かは対照実験が必要ですが、他の物質で同様なものは作れないかを試してみると何か知見が得られると思えます。

角の出る機構の解析。

金平糖を特徴付けるものとして、結晶のように見える光沢・透明度と角があります。金平糖に限らず、結晶として形が残るものでなぜ角が出るかの説明ができると面白いと思えます。

全く想像上のものですが、たとえば食塩水を加熱するときなどに見られる「何らかの原因で表面の溶質の濃度に粗密が生じ、濃度が薄い部分から水分が飛ぶために、最後に濃度が濃い部分が少し盛り上がる。」というシナリオが金平糖でも考えられないでしょうか？

結晶なのだろうか？

この報告集では多少の妄想を述べて良いということなので、いま気になっていることを少し書きたいと思えます。

自分の議論の仮定を根本から覆しそうですが、透明度があり光沢のあることから結晶として考えてきましたが、透明度があり光沢があるだけでは必ずしも結晶とは言い切れないということに気が付きました。たとえばアクリル板などのプラスチック素材には透明であるが結晶とは言わない物も多くあります。高分子材料に限らず、たとえばガラスもこの条件に見合います。今回紹介したモデルは「通常の結晶成長」の延長線上で考えました。そのため、過飽和度がモデル化の中で一つの重要な要素になっています。結晶であるという仮定をはずしたときに表面の成長を特徴付けるものがあるか、考えてみましたが難しそうです。

金平糖の光沢が「結晶構造によるもの」かあるいは「ガラス状のランダムな構造を反映しているか」を誰か調べて教えていただけないでしょうか？

付記：ここに紹介した簡易金平糖製造装置についてさらに詳しく知りたい方は笠井 (kasai@sss.fukushima-u.ac.jp) まで問い合わせてください。

## 5 謝辞

今回、宮崎大学で話をするきっかけを与えて下さった、宮崎大学・矢崎成俊先生に感謝いたします。この機会がなかったら、この製法と金平糖に関してまとめる機会もなかったことと思いますし、またモデル化に関して、いくつも有意義なアドバイスを頂きました。また宮崎滞在中、宮崎大学のスタッフのみなさまには大変お世話になりました。ここであらためて御礼申し上げます。

また、実験に際し火力や糖液を掛けるタイミングなどのノウハウを蓄積してくれた福島大学教育学部の学生さんたち、特に長い実験を何度も根気強く繰り返してくれた箕輪篤弘君、横田貴恵子さんに感謝します。

## 参考文献

- [1] 「乱れの形態 - 金米糖の科学」, ランダム系の物理学, 物理学会編, 吉岡書店 (1981)
- [2] 結晶成長のしくみを探る—その物理的基礎, 共立出版株式会社 (2002)
- [3] エビス堂製菓 Web Page <http://www.ebisudo.com/>
- [4] 緑寿庵 清水 Web Page <http://www.konpeito.co.jp/index.html>
- [5] 金平糖を守る会 Web Page <http://www.cere-net.com/~konpeito/>





# Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する 代用電荷法の適用と数値積分への応用

大江 貴司<sup>1</sup> (岡山理大・総合情報)  
大中 幸三郎<sup>2</sup> (大阪大・工)

## 1 はじめに

Laplace 方程式の Cauchy 問題は工学における非破壊検査, 医療分野における心電図・脳電図解析など多くの応用を持つ重要な問題である [1, 3]. 同時に数学的には非適切問題のひとつで数値的な解析が難しいことが知られており, 数値解法に関し理論的・実験的観点から多くの研究がなされてきた [2, 4, 7, 10, 12, 11, 16].

本報告では Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する数値解法として代用電荷法 [13, 21] を適用し, その数値解の収束性・安定性等に関する理論的結果および数値実験による検証を示す. 同時にその応用として  $n$  次元超球面上の数値積分法を提案する.

## 2 Laplace 方程式の Cauchy 問題と代用電荷法の適用法

2次元 Euclid 空間内の円環領域  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho - \delta < |x| < \rho\}$  における Laplace 方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = f, & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

を考える. ただし,  $\Gamma$  は円周  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \rho\}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  は  $u$  の  $\Gamma$  における外向き法線方向微分,  $f, g$  は  $\Gamma$  上で定義された実解析関数とする. Cauchy-Kowalewski の定理, および Holmgren の定理より, 問題 (2.1) の実解析的な解が  $\Gamma$  の近傍でただ一つ存在する [8].

Cauchy 問題 (2.1) の代用電荷法による近似解の構成にあたり, 図 1 に示すように仮想電荷を  $\Gamma$  を内側・外側の両側から挟みこむように配置する. そして近似解  $u^{(N)}$  を不変スキーム [14] を用いて次式で構成する.

$$u^{(N)}(x) = q + \sum_{s=1}^2 \sum_{j=0}^{N-1} Q_{s,j} E(x, \mathbf{y}_{s,j}), \quad (2.2)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{s,j} &= (R_s \cos \theta_j, R_s \sin \theta_j), \quad s = 1, 2, j = 0, 1, \dots, N-1, \\ \theta_j &= 2\pi j/N, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \\ R_2 &< \rho - \delta < \rho < R_1, \\ E(x, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \log |x - \mathbf{y}|, \\ q \in \mathbb{R}, \quad Q_{s,j} &\in \mathbb{R}, \quad s = 1, 2, j = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>e-mail: ohe@sp.ous.ac.jp

<sup>2</sup>e-mail: ohnaka@ap.eng.osaka-u.ac.jp

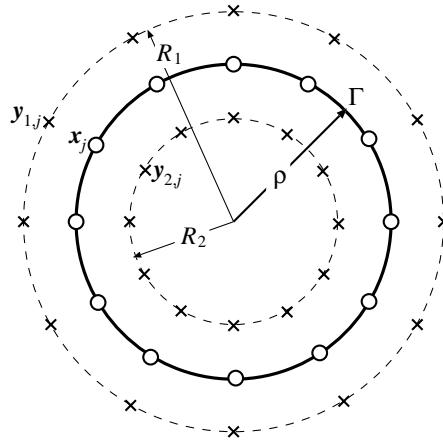


図 1: 仮想電荷点  $y_{s,j}$  と選点  $x_j$  の配置

である. 係数  $q$  および  $Q_{s,j}$  は不変条件

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{j=0}^{N-1} Q_{s,j} = 0, \quad (2.3)$$

および選点条件

$$\begin{cases} u^{(N)}(x_j) = f(x_j), & j = 0, 1, \dots, N-1, \\ \frac{\partial u^{(N)}}{\partial \nu}(x_j) = g(x_j), & j = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.4)$$

を満たすように決定する. ただし選点  $x_j$  は

$$x_j = (\rho \cos \theta_j, \rho \sin \theta_j) \in \Gamma, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

にとる.

本報告では式 (2.2) により定義される近似解  $u^{(N)}$  について次の問題を考える.

- I. 近似解  $u^{(N)}$  の存在と一意性
- II. 近似解  $u^{(N)}$  の真の解への収束性
- III. 近似解  $u^{(N)}$  の安定性

このうち I と II はノイズフリーの状態で得られた数値解が真の解のよい近似になり得るかという問題で, いわば手法の正当性に関するものである. また III はデータにノイズが含まれている, あるいは観測データの有効桁数が少ない場合にも真の解の近似を得ることができるのかという問題である. 現実問題への応用を考えた場合にはこの点が重要となるが, Laplace 方程式の Cauchy 問題は非適切問題のひとつであることから評価は難しいものとなる.

### 3 理論的結果

本節では前節で示した手法に関する理論的結果を示す.

**Theorem 1.** (近似解の存在と一意性)

条件 (2.3), (2.4) を満たす数値解  $u^{(N)}$  はただ一つ存在する.

**Theorem 2.** (近似解の収束)

$f, g$  をそれぞれ

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n e^{in\theta}, \quad g(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n e^{in\theta}, \quad (3.1)$$

の形に Fourier 展開したとき, その係数について

$$|\eta_n| \leq Mb^{|n|}, \quad |\xi_n| \leq Mb^{|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

となる  $0 < b < 1, M > 0$  が存在するものと仮定する. ただし  $\mathbb{R}^2$  と  $\mathbb{C}$  を同一視する.

このとき  $N$  を十分大きく取れば,  $a\rho < r < \rho$  なる  $r$  に対し

$$\left| u^{(N)}(re^{i\theta}) - u(re^{i\theta}) \right| \leq \left\{ C_1(\rho, r) + C_2(\rho, a, r) \left( \frac{\rho}{r} \right)^N \right\} M a^N, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (3.3)$$

を満たす正の数  $C_1(\rho, r), C_2(\rho, a, r)$  が存在する. ここで  $a = \max\{\rho/R_1, R_2/\rho, \sqrt{b}\}$  である.

Theorem 1, 2 の証明については [18] を参照されたい. この 2 つの定理は前節の問題 I, II を肯定的に解決すると同時に, 近似解が真の解へ  $L^\infty$  ノルムの意味で指数関数的に収束することを示している.

前節の最後で述べたように Cauchy データにノイズ等の誤差が含まれている場合に対する数値解の安定性は応用上重要である. ここでは真の Cauchy 条件  $f, g$  に対し, ノイズあるいは誤差を含んだ Cauchy 条件を  $f_\varepsilon, g_\varepsilon$  で表し, それぞれに対して得られる近似解を  $u_\varepsilon^{(N)}, u_\varepsilon^{(N)}$  で表す. これら二つの Cauchy 条件に対し次の仮定をおく.

[仮定] 真の Cauchy 条件とノイズを含んだ Cauchy 条件について, 適当な正の定数  $\varepsilon$  に対し

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \|g_\varepsilon - g\|_{L^\infty(\Gamma)} < \varepsilon \quad (3.4)$$

が成り立つ.

**Theorem 3.** (誤差の指数関数的発散の可能性) [19]

Theorem 2 の仮定および上記の仮定のもとで, 十分大きい  $N$  に対し

$$\left| u_\varepsilon^{(N)}(re^{i\theta}) - u^{(N)}(re^{i\theta}) \right| < \left\{ C_3(\rho, r) + C_4(\rho, r) \left( \frac{\rho}{r} \right)^{N/2} \right\} \varepsilon, \quad R_2 < r < \rho \quad (3.5)$$

を満たす正の数  $C_3(\rho, r), C_4(\rho, r)$  が存在する.

Theorem 3 は選点数  $N$  を増加させたとき近似解同士の差は指数的に増加する可能性があることを示している.

一方, 式 (3.3) と (3.5) の評価を合せると

$$\left| u_\varepsilon^{(N)}(re^{i\theta}) - u(re^{i\theta}) \right| \sim O\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^N a^N\right) + O\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{N/2}\right) \cdot \varepsilon, \quad (3.6)$$

を得る. 式 (3.6) は, ノイズを含む Cauchy データから構成された近似解とノイズを含まない真の解との間の誤差の  $N$  に対する変化が L 字型のグラフになることを示している. 言い換えるとノイズの大きさに対し適当な  $N$  をとれば, 真の解との誤差を極小化できる可能性があることを示唆している. この考えに基づき次の定理を得た.

**Theorem 4.** (数値解の安定性の Hölder 評価) [19]

$$N_H(\varepsilon) = \frac{\log \frac{\varepsilon}{B}}{\log a}, \quad \beta = \frac{\log \frac{r}{\rho}}{\log a} \quad (3.7)$$

としたとき, 真の解  $u$  とノイズを含んだ数値解  $u_\varepsilon^{(N)}$  について

$$\begin{aligned} & \left| u_\varepsilon^{(N_H(\varepsilon))}(re^{i\theta}) - u(re^{i\theta}) \right| \\ & < (C_1(\rho, r) + C_3(\rho, r))\varepsilon + C_2(\rho, a, r)B^\beta \varepsilon^{1-\beta} + C_4(\rho, r)B^{\beta/2} \varepsilon^{1-\beta/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

が成り立つ. ここで定数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  は Theorem 2, 3 と同一である.

Theorem 4 はノイズの大きさ  $\varepsilon$  に対応して  $N = N_H(\varepsilon)$  とすることにより, 数値解について Hölder の意味での安定性を得ることができることを示している. また Theorem 3 の評価をあわせて考慮すると, Cauchy データにノイズや誤差等が含まれる場合, 必要以上に大きな  $N$  を用いても良い近似解は得られないことを示している.

## 4 数値実験

### 4.1 ノイズフリーの場合

まずノイズフリーの場合の誤差評価である Theorem 2 の検証のための数値実験を示す. Cauchy 条件を与える円周  $\Gamma$  として原点を中心とする半径 1 の円をとり, 円周の外側および内側に配置する仮想電荷の配置半径をそれぞれ  $R_1 = 2.0, R_2 = 0.5$  とした. Cauchy 条件としては関数

$$u(x; p) = u(x, y; p) = -\frac{y}{2\pi\{(x-p)^2 + y^2\}} \quad (4.1)$$

の  $\Gamma$  上における値および外向き法線方向微分を用いた. なお,  $u(x; p)$  は点  $(p, 0)$  を除いて調和であり, Cauchy 条件の Fourier 係数について

$$\eta_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ -i \cdot \operatorname{sgn}(k) \cdot \frac{p^{|k|-1}}{4\pi}, & |k| \geq 1, \end{cases} \quad \xi_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ i \cdot \frac{kp^{|k|-1}}{4\pi}, & |k| \geq 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

が成り立つことを注記しておく. Cauchy 条件に対する選点  $x_j$  および外側・内側の仮想電荷の個数は  $N = 8, 12, \dots, 48$  の値をとった. 数値解の誤差の計測は半径  $r = 0.6, 0.65, \dots, 1.5$  の各円周上の 256 点でおこなった.

図 2(a) に  $p = 0.3$  の場合について, 半径  $r$  の円周上における最大誤差の仮想電荷点の個数  $N$  に対する変化を示す. また図 2(b) に  $p$  を変化させた場合について, 半径  $r = 0.8$  の円周上における誤差の  $N$  に対する変化を示す. 図 2 より数値解の誤差は  $N$  に対し

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi)} |u^{(N)}(r \cos \theta, r \sin \theta) - u(r \cos \theta, r \sin \theta; p)| \sim C\tau^N, \quad N \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

で指数関数的に減少することがわかる. この指数関数的減少は Theorem 2 から予想されるものであるが, Theorem 2 はさらにその減少の割合  $\tau$  が

$$\tau \simeq a \cdot \frac{\rho}{r} = \frac{\rho \cdot \max\{\rho/R_1, R_2/\rho, \sqrt{\rho}\}}{r}, \quad (4.4)$$

で評価できることを示している. 図 3 に減少の割合  $\tau$  の Theorem 2 による評価と数値実験による値の比較を示す. 図 3 より Theorem 2 は  $\tau$  について良い評価を与えていることがわかる.

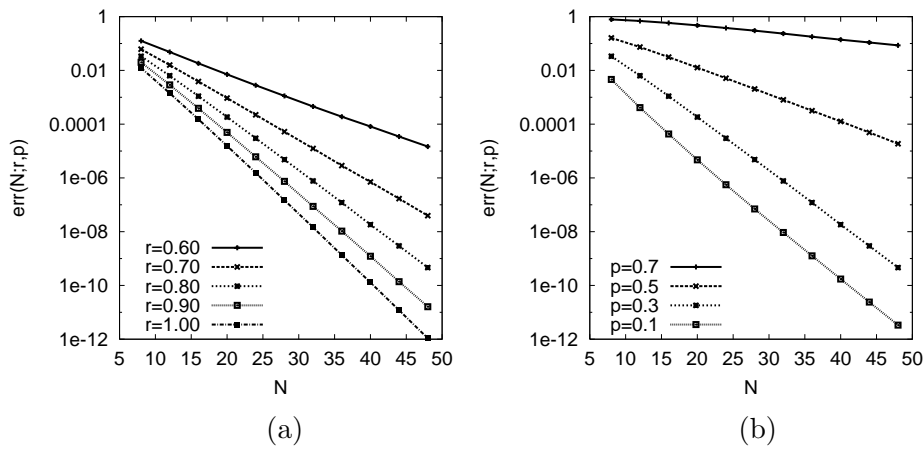


図 2: 仮想電荷点の個数  $N$  に対する誤差の減少.  
 (a)  $r$  に対する依存性, (b)  $p$  に対する依存性.

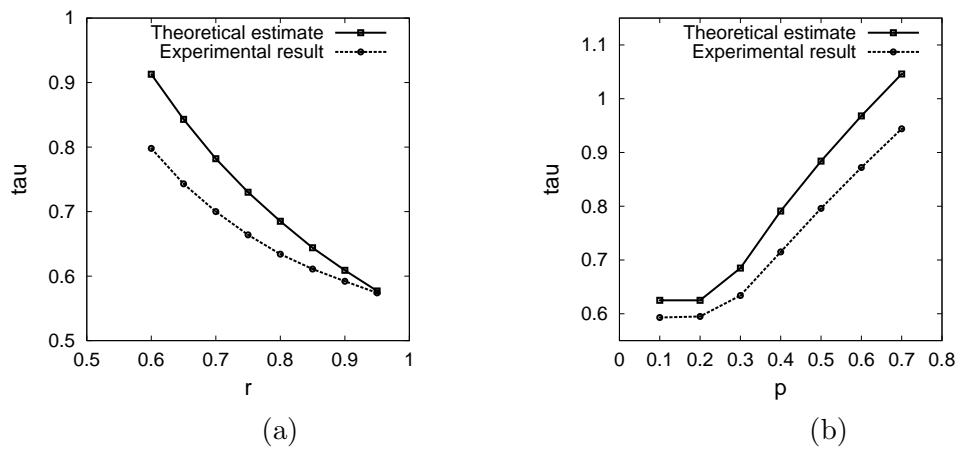


図 3: 誤差の指数的減少の比率  $\tau$  の変化とその理論評価.  
 (a)  $r$  に対する依存性, (b)  $p$  に対する依存性.

## 4.2 Cauchy データがノイズを含む場合

次に Cauchy データにノイズを含む場合に対する数値実験を示す. Cauchy データを与える円周および仮想電荷の配置については前節と同一のものをうい, データ生成関数は前節と同一のもので  $p = 0.3$  に固定した. またデータに対するノイズは一様乱数で与え

$$\frac{\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}} = \frac{\|g_\varepsilon - g\|_{L^\infty}}{\|g\|_{L^\infty}} = 1.0\%, 0.1\%, 0.01\%, 0.001\%, 0.0001\% \quad (4.5)$$

とした.

図 4 に  $r = 0.6$  および  $r = 0.8$  の円周上における最大誤差の仮想電荷点の個数  $N$  に対する変化を示す. 図 4 より誤差は始め指数関数的に減少するが, ある場所で指数関数的増加に転じ, L 字型の変化を示すことがわかる. この結果は式 (3.5) の評価が妥当であることも同時に示している.

次に Theorem 4 の検証について示す. 図 5 に  $N$  として Theorem 4 の式 (3.7) で評価される  $N_H(\varepsilon)$  をとった場合の誤差のノイズの大きさに対する変化を示す. 図 5 より両対数グラフ上で直線状になることから Hölder の意味の安定性が得られていることが確認できる. また図 6 に図 5 から評価される Hölder 安定性の冪の値と Theorem 4 から評価される値との比較を示す. 図 6 より Theorem 4 は Hölder 安定性の冪について良い評価を与えていることがわかる.

## 5 $n$ 次元超球面上で定義された関数の数値積分への応用

本節では第 2 節に示した Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用法を,  $n$ -次元超球面上で定義された関数の数値積分法に応用する方法を示す [20].

$S^{n-1}$  を  $n$ -次元 Euclid 空間上の単位超球面  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$  とし,  $f, g$  を  $S^{n-1}$  上で定義された関数とする. この  $f, g$  について, その積の  $S^{n-1}$  上における積分

$$I(f, g) \equiv \int_{S^{n-1}} f(x)g(x)d\sigma(x), \quad (5.1)$$

の近似計算法について考える. なお, 式 (5.1) に示した積型の積分は近年, 逆問題の解法の中で数多く利用されていることを注記しておく [5, 6, 15, 17, 22].

### 5.1 関数 $f, g$ の近似関数の構成

本報告で提案する示す手法では, 関数  $f$  と  $g$  の近似に別々の代用電荷法を適用する.

まず関数  $f$  について示す. 点  $x_j^f, j = 1, 2, \dots, N^f$  を  $S^{n-1}$  上にとる. これを用いて関数  $f$  の近似関数  $\tilde{f}$  を

$$\tilde{f}(x) \equiv Q_0^f + \sum_{j=1}^{N^f} Q_j^f E(x, K^f x_j^f), \quad (5.2)$$

で構成する. ただし,  $K^f > 1$  であり,  $E(\cdot, \cdot)$  は  $n$  次元 Laplace 方程式の基本解である. 未定係数  $Q_j^f$  は

$$\tilde{f}(x_j^f) = f(x_j^f), \quad j = 1, 2, \dots, N^f, \quad (S^{n-1} \text{ 上における選点条件}) \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=1}^{N^f} Q_j^f = 0, \quad (\text{不変条件}) \quad (5.4)$$

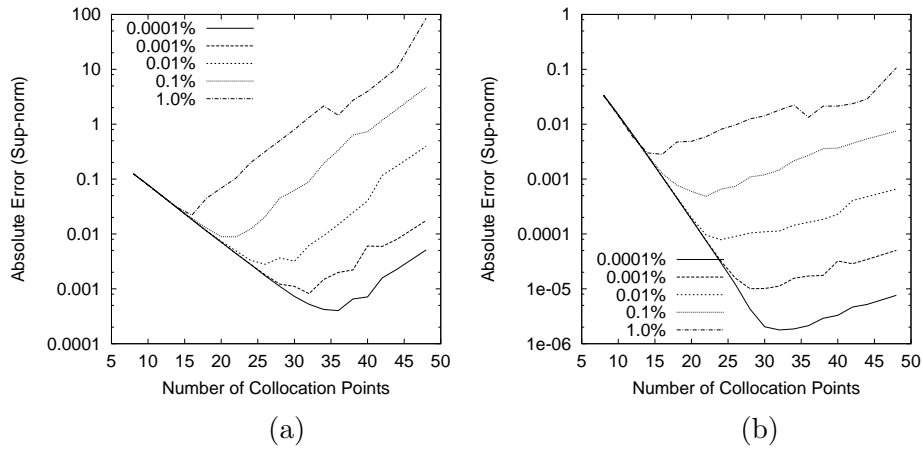


図 4: ノイズを含む Cauchy データに対する数値解の誤差の変化. (a)  $r = 0.6$  (b)  $r = 0.8$ .

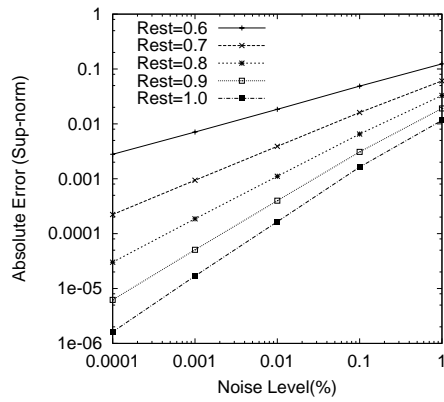


図 5:  $N = N_H(\epsilon)$  とした場合のノイズに対する数値解の誤差の変化

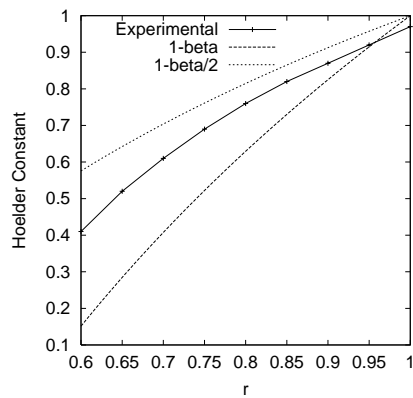


図 6: Hölder 安定性の冪の計測値と理論値の比較.



を満たすように定める.

次に関数  $g$  について示す. 関数  $f$  の場合と同様に点  $\mathbf{x}_j^g, j = 1, 2, \dots, N^g$  を  $S^{n-1}$  上にとり,  $K^g > 1$  とする. さらに関数  $\varphi_j$  を

$$\varphi_j(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} E(\mathbf{x}, K^g \mathbf{x}_j^g) - E(\mathbf{x}, \frac{1}{K^g} \mathbf{x}_j^g) + \frac{1}{2\pi} \log K^g, & n = 2, \\ (K^g)^{n-2} E(\mathbf{x}, K^g \mathbf{x}_j^g) - E(\mathbf{x}, \frac{1}{K^g} \mathbf{x}_j^g), & n \geq 3, \end{cases} \quad (5.5)$$

で定義する. これらを用いて関数  $g$  の近似関数  $\tilde{g}$  を

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{N^g} Q_j^g \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu}(\mathbf{x}), \quad (5.6)$$

で構成する. ただし  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  は  $S^{n-1}$  上における外向き法線方向微分を表す. 未定係数  $Q_j^g$  は  $S^{n-1}$  上における選点条件

$$\tilde{g}(\mathbf{x}_j^g) = g(\mathbf{x}_j^g), \quad j = 1, 2, \dots, N^g, \quad (5.7)$$

を満たすように定める.

## 5.2 積分近似式の構成

関数  $f, g$  の近似関数  $\tilde{f}, \tilde{g}$  の構成において決定された  $Q_j^f, Q_j^g$  を用いて,  $S^{n-1}$  の内部  $B^n \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < 1\}$  で定義された関数

$$u(\mathbf{x}) \equiv Q_0^f + \sum_{j=1}^{N^f} Q_j^f E(\mathbf{x}, K^f \mathbf{x}_j^f), \quad v(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{N^g} Q_j^g \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (5.8)$$

を考える (ただし,  $v$  については  $\left\{ \frac{1}{K^g} \mathbf{x}_j^g, j = 1, 2, \dots, N^g \right\}$  を除く.). 関数  $u, v$  は次の方程式を満たすことが容易にわかる.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B^n, \\ u = \tilde{f}, & \text{on } S^{n-1}, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} \Delta v = \sum_{j=1}^{N^g} Q_j^g \delta \left( \mathbf{x} - \frac{1}{K^g} \mathbf{x}_j^g \right), & \text{in } B^n, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \tilde{g}, & \text{on } S^{n-1}, \\ v = 0, & \text{on } S^{n-1}. \end{cases} \quad (5.10)$$

式 (5.9), (5.10) および Green の公式より, 次に示す  $I(f, g)$  の近似公式を得る.

$$\begin{aligned}
I(f, g) &\simeq \int_{S^{n-1}} \tilde{f}(\mathbf{x}) \tilde{g}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = \int_{S^{n-1}} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \\
&= \int_{S^{n-1}} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) - \int_{S^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \\
&= \int_{B^n} u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \int_{B^n} u(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N^g} Q_j^g \delta(\mathbf{x} - \frac{1}{K^g} \mathbf{x}_j^g) dV(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{j=1}^{N^g} Q_j^g u\left(\frac{1}{K^g} \mathbf{x}_j^g\right). \\
&= \sum_{j=1}^{N^g} Q_j^g \left\{ Q_0^f + \sum_{k=1}^{N^f} Q_k^f E\left(\frac{1}{K^g} \mathbf{x}_j^g, K^f \mathbf{x}_k^f\right) \right\}. \\
&\equiv \tilde{I}(f, g)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Laplace 方程式の Dirichlet 問題に対する代用電荷法に関する結果 [9], および式 (3.3) より, 数値積分公式 (5.11) による近似誤差は  $N^f$  および  $N^g$  に対し指数関数的に収束することが期待できるが, 詳細な理論的・数値実験的な検討は今後の課題である.

## 謝 辞

本研究の一部は日本学術振興会科学研究費基盤研究 (C)(2)(No. 14550059) および文部科学省学術フロンティアの援助によりおこなわれました. ここに関係各位に感謝の意を表します. また本講演の機会を与えて頂いた辻川亨氏をはじめとする宮崎大学工学部の皆様に御礼申し上げます.

## 参考文献

- [1] G. Alessandrini, Stable determination of a crack from boundary measurements. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **123** (1993), 497–516.
- [2] F. Berntsson and L. Eldén, Numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation. Inverse Problems, **17** (2001), 839–853.
- [3] P. C. Franzone, L. Guerri, B. Taccardi and C. Viganotti, Finite element approximation of regularized solutions of the inverse potential problem of electrocardiography and applications to experimental data. Calcolo, **22** (1985), 91–186.
- [4] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problems in Linear Partial Differential Equations. Dover, New York, 1952.
- [5] M. Ikehata, Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data. Inverse Problems, **15** (1999), 1231–1241.
- [6] 乾裕一, 大中幸三郎, 3次元 Helmholtz 方程式に対する重み付き積分に基づいた複数点ソースの推定. 日本応用数学会論文誌, **14** (2004), 179–192.

- [7] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences 127). Springer, New York, 1998.
- [8] F. John, Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences 1). Springer, New York, 1982.
- [9] M. Katsurada and H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., **35** (1988), 507–518.
- [10] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and A. V. Fomin, An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. Comput. Maths. Math. Phys., **31** (1991), 45–52.
- [11] M. Kubo,  $L^2$ -conditional stability estimate for the Cauchy problem for the Laplace equation. J. Inv. Ill-Posed Problems, **2** (1994), 253–261.
- [12] M. Kubo, Y. Iso and O. Tanaka, Numerical analysis for the initial value problem for the Laplace equation. Boundary Element Methods (eds. M. Tanaka, Q. Du and T. Honma), Elsevier, Amsterdam, 1993, 337–344.
- [13] 村島定行, 代用電荷法とその応用. 森北出版, 1983.
- [14] 室田一雄, 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について. 情報処理学会論文誌, **34** (1993), 533–535.
- [15] T. Nara and S. Ando, A projective method for an inverse source problem of the Poisson equation. Inverse Problems, **19**(2003), 355–369.
- [16] K. Onishi, K. Kobayashi and Y. Ohura, Numerical solution of a boundary inverse problem for the Laplace equation. Theoretical and Applied Mechanics, **45** (1996), 257–264.
- [17] T. Ohe and K. Ohnaka, Determination of locations of point-like masses in an inverse source problem of the Poisson equation. J. Comput. Appl. Math., **54** (1994), 251–261.
- [18] T. Ohe and K. Ohnaka, Uniqueness and convergence of numerical solution of the Cauchy Problem for the Laplace equation by a charge simulation method. Japan J. Indust. Appl. Math., **21** (2004), 339–359.
- [19] T. Ohe and K. Ohnaka, Stability of numerical solution of the Cauchy Problem for the Laplace equation by a charge simulation method. (in preperation).
- [20] T. Ohe and K. Ohnaka, Numerical intergation based on a charge simulation method. (in preperation).
- [21] H. Singer, H. Steinbigler and P. Weiss, A charge simulation method for the calculation of high voltage fields. IEEE Trans. Power Apparatus Systems, **PAS-93** (1974), 1660–1668.
- [22] K. Yamatani and K. Ohnaka, A reliable estimation method of a dipole for three-dimensional Poisson equation. J. Comput. Appl. Math., **95** (1998), 139–151.

# 無限次元力学系における位相計算理論

平岡裕章

大阪大学基礎工学研究科

## 1 序

本稿では無限次元力学系における位相計算理論についての解説を行なう。まず最初に Conley 指数を用いた定常解の存在検証法を紹介する。ここで Conley 指数とは力学系における孤立した不変集合に対して定められる位相的な量であり、不変集合の近傍におけるベクトル場の情報から計算することができる。定常解の数値検証法においては、まず近似定常解の周りで区間の直積で与えられるボックスを用意する。次にその境界でベクトル場の向きを厳密に評価することにより、Conley 指数を精度保証付きで計算する。ここで得られた Conley 指数が双曲型平衡点と同じものであれば、定常解がこのボックスの中に存在することが証明されるというものである。

定常解の数値検証法にはここで紹介する位相的な方法以外にも様々なものがあり、当然それぞれには一長一短がある。本稿では、位相的方法を用いる最も重要な長所である定常解間の接続軌道の存在証明を与える方法についても簡単に解説を行なう。数値検証によって存在が証明された定常解とその Conley 指数の情報から、代数的議論を経ることによりそれらの解の間の接続軌道の存在を調べることができる。位相的方法では、接続軌道のような大域的な解構造の検証を行なうことが可能である点をここに強調しておきたい。

全体を通して本研究は、小川知之(大阪大学)、Konstantin Mischaikow(ジョージア工科大学)、Sarah Day(コーネル大学)氏との共同研究によるものである。

## 2 Conley 指数を用いた定常解の検証

まず初めに Conley 指数理論 (例えば [1] を参照) について簡単に復習しておく。局所コンパクト位相空間  $X$  上に流れ  $\varphi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  が与えられているとする。この時コンパクト集合  $N \subset X$  がその内部に流れ  $\varphi$  に関する極大不変集合  $\text{Inv}(N, \varphi) := \{x \in N \mid \varphi(\mathbb{R}, x) \subset N\}$  を含むとき、すなわち  $\text{Inv}(N, \varphi) \subset \text{Int } N$  のとき  $N$  を孤立化近傍と呼び、 $\text{Inv}(N, \varphi)$  を孤立不変集合と呼ぶ。さらに孤立化近傍の境界が

$$L^+ := \{x \in \partial N \mid \exists t > 0 \text{ s.t. } \varphi((0, t), x) \cap N = \emptyset\},$$
$$L^- := \{x \in \partial N \mid \exists t > 0 \text{ s.t. } \varphi((-t, 0), x) \cap N = \emptyset\}$$

の和集合で構成されているとき  $N$  を孤立化ブロックと定義し、 $L^+$ 、 $L^-$  をそれぞれ出口、入口と呼ぶことにする (図 1 参照)。

任意の孤立不変集合に孤立化近傍を適当にとれば孤立化ブロックになること、また特定の孤立不変集合に対して異なる孤立化ブロックと出口の空間対  $(N_1, L_1^+)$ 、 $(N_2, L_2^+)$  があれば

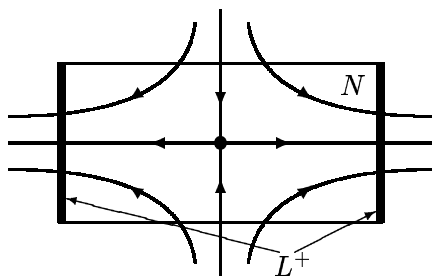


図 1: 孤立不変集合, 孤立化ブロックの例

$(N_1, L_1^+)$  と  $(N_2, L_2^+)$  が空間対としてホモトピー同値であることが知られている [1]. よって孤立不変集合に対してその Conley 指数を以下のように定める.

**定義 1**  $(N, L^+)$  を孤立不変集合  $\text{Inv}(N, \varphi)$  の孤立化ブロックと出口の空間対としたとき, 相対ホモロジー群

$$CH_*(\text{Inv}(N, \varphi)) := H_*(N, L^+)$$

を孤立不変集合  $\text{Inv}(N, \varphi)$  の Conley 指数と呼ぶ.

以後ホモロジー群の係数として  $\mathbb{Z}_2$  を用いることにする.

ここで孤立不変集合があらかじめ分かっていない場合であっても, 孤立化ブロックの境界でのベクトル場の情報から Conley 指数は計算可能であることに注意しておく. では, ここで定義された Conley 指数の情報からなんらかの孤立不変集合の性質を引き出すことは可能であろうか. 以下の定理はこの疑問に対する部分的な解答を与えるものである.

**定理 2** ([6]) ある非負整数  $k$  に対して

$$CH_j(\text{Inv}(N, \varphi)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = k, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (1)$$

ならば,  $N$  の中に平衡点が存在する.

この定理は孤立化ブロックが与えられた時に, その Conley 指数が双曲型平衡点の Conley 指数と同じであれば平衡点が存在することを主張するものであり, 位相幾何学のレフシェッツの不動点定理と同等である. また, 結論として得られる平衡点が双曲型であるかどうかは一般には不明である. しかしながら, もし平衡点がただか 1 つであり, 双曲型であることがわかれば, 不安定次元が  $k$  であることがわかる. その意味で Conley 指数に基づく検証が成功すれば多くの場合安定性の情報も同時に得られる.

この定理をもとに, 発展方程式の定常解の存在証明を, 位相的な方法によって与える検証法について議論しよう. 本稿では Swift-Hohenberg 方程式 (以下 SH 方程式):

$$u_t = \left\{ \nu - \left( 1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} u - u^3, \quad (2)$$

$$u(t, x) = u(t, x + L), \quad u(t, x) = u(t, -x)$$

を例に挙げて解説を行なう。周期  $L$  の周期境界条件であるからまずはフーリエ余弦級数展開： $u(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(t) \cos(jk_0 x)$  を施して可算無限個の常微分方程式系に帰着する ( $k_0 = 2\pi/L$  とする),

$$\dot{a}_j = f_j(a) := \zeta_j a_j - f_j^{(3)}(a), \quad j = 0, 1, \dots \quad (3)$$

ここで  $\zeta_j = \nu - (1 - j^2 k_0^2)^2$  であり

$$f_j^{(3)}(a) = \sum_{\substack{m_1 + m_2 + m_3 = j \\ m_i \in \mathbb{Z}}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3}$$

である。

こうして (2) の定常解を (3) の平衡点  $f_j(a) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , とみなし式 (3) の平衡点の存在を, Conley 指数を用いて検証するのである。

無限次元力学系 (3) を次のように分解しよう。

$$\begin{aligned} a &= (a_F, a_I), \quad a_F = (a_0, a_1, \dots, a_m), \quad a_I = (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots) \\ f(a) &= (f_F(a), f_I(a)), \quad f_F(a) = (f_0(a), f_1(a), \dots, f_m(a)), \quad f_I(a) = (f_{m+1}(a), f_{m+2}(a), \dots). \end{aligned}$$

以後添字  $F, I$  はそれぞれ有限次元部分, 無限次元部分を表すものとして用いる。さてガレルキン近似を  $g_F(a_F) := f_F(a_F, a_I = 0)$  として  $g_F(\bar{a}_F) \approx 0$  を満たす近似平衡点  $\bar{a} = (\bar{a}_F, 0)$  の近傍に真の平衡点があると考えるのは自然であろう。ガレルキン近似のエラー項を  $r(a_F, a_I) := f_F(a_F, a_I) - g_F(a_F)$  とおく。次にベクトル場の出入りを計算機を用いて厳密に調べる際に, 本質的な役割を果たす新しい変数  $b = (b_F, b_I)$  を

$$(Pb_F + \bar{a}_F, b_I) = (a_F, a_I) \quad (4)$$

として導入する。ここで  $P$  は  $\bar{a}_F$  でのヤコビ行列  $Dg_F(\bar{a}_F)$  の固有ベクトル  $p_i$  を第  $i$  列に持つ行列とし, この変数変換を  $T: (b_F, b_I) \mapsto (a_F, a_I)$  と表す。この時新しい変数に対する力学系は,  $\bar{a}_F$  で  $g_F(a_F)$  をテイラー展開することで,

$$\dot{b}_j = h_j(b) := \begin{cases} \lambda_j b_j + R_j(b), & j = 0, 1, \dots, m, \\ f_j(Pb_F + \bar{a}_F, b_I), & j > m \end{cases} \quad (5)$$

となる。ここで  $R_F(b) = (R_0(b), R_1(b), \dots, R_m(b))$  は

$$R_F(b) = P^{-1} \left( g_F(\bar{a}_F) + \frac{1}{2} D^2 g_F(\bar{a}_F) (Pb_F)^2 + \frac{1}{3!} D^3 g_F(\bar{a}_F) (Pb_F)^3 + r(b_F, b_I) \right)$$

で与えられ,  $\lambda_j$  は固有ベクトル  $p_j$  に対応する固有値を表すものとする。ここでは  $Dg_F(\bar{a}_F)$  は対角化可能であると仮定し, 議論を簡単にするために  $\lambda_j (\neq 0) \in \mathbb{R}$  とする。

次の集合は定常解の検証において重要な役割を果たす。

**定義 3** 力学系 (5) が与えられたとき, 原点を含むコンパクト集合  $W = \prod_{j=0}^{\infty} [b_j^-, b_j^+]$  が次の 3 つの条件を満たすとき候補者集合と呼ぶ。

1.  $W_F = \prod_{j=0}^m [b_j^-, b_j^+]$  は  $b_I \in W_I = \prod_{j>m} [b_j^-, b_j^+]$  ごとに定まるベクトル場  $h_F(b_F, b_I)$  が生成する流れ  $\varphi^{(b_I)}$  に対して常に孤立化ブロックとなる
2. 境界  $W_F \times \partial W_I$  はベクトル場  $h(b)$  に対して入口となる

このとき定理 2 の応用として次が成立する.

**定理 4** ([9]) 力学系 (5) に対して候補者集合  $W$  が与えられているとする. このとき有限次元部分  $W_F$  の Conley 指数がある  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$  に対して

$$CH_j \left( \text{Inv} \left( W_F, \varphi^{(b_I)} \right) \right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = k, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (6)$$

となるならば,  $TW$  内に (3) の平衡点が存在する.

したがって定常解の検証の為には, 定理 4 の条件を満たすような候補者集合を計算機上で構成すれば良いわけである. しかし問題が無限次元となっていることにより, このままでは計算機で扱えない次のような困難が生じる.

1. 有限和としてベクトル場が評価できない
2. 無限個のベクトル場の出入りを調べる必要がある

つまり 1 はベクトル場  $f_i(a)$  が可算無限個の変数  $\{a_i\}$  で表されるために, 一般にはそれらの無限和として構成される事からくる問題点である. これより検証の際には, 無限和で表されてあるベクトル場を何らかの方法で評価する必要がある. また問題点 2 については, 無限次元部分の境界がすべて入口であることを計算機を用いて直接確認することが不可能であることから生じる. そこで無限次元の問題を有限次元の問題へ縮約する必要性がでてくる.

これらに対する 1 つの解決法としては, 候補者集合に何らかの制限を与え, 有限個のデータで構成することにより無限次元の問題を有限次元の問題へ縮約する方法が考えられる (数値検証法としてよく知られている中尾の方法 [7] においても同様のアイデアが用いられている). 具体的には次の形で与えられる候補者集合を用いる.

$$W = W_F \times W_I, \quad W_F := \prod_{j=0}^m [b_j^-, b_j^+], \quad W_I := \prod_{j>m} \left[ -\frac{c}{j^s}, \frac{c}{j^s} \right]. \quad (7)$$

ここで  $c, s > 0$  であり,  $W_F$  には本質的なダイナミクスが含まれるべきなので, 少なくとも  $\zeta_j < 0, \forall j > m$  となるように  $m$  をとる. 注目すべき点は  $2m + 4$  個の情報  $(b_j^-, b_j^+, c, s)$  から候補者集合が構成されている点である. このように候補者集合を与えることにより上記 1, 2 の問題点が以下のように解決される.

まず無限和で表されているエラー項  $r(b_F, b_I)$  の評価から考える. SH 方程式の非線形項  $f_j^{(3)}(a)$  では

$$\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=j \\ \max |m_i| > m}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} \quad (8)$$

がエラー項に対応する．この形の無限和は候補者集合の中減衰性から，解析的な評価と区間演算を併用することで評価が可能である ([2][5] 参照)．よって変数  $a$  においてコンパクト集合  $\bar{W} = \bar{W}_F \times \bar{W}_I$  を  $\bar{W}_j = [\min(TW)_j, \max(TW)_j]$  と用意し， $\bar{W}$  上でエラー項 (8) を評価することにより， $r_j(b_F, b_I)|_{\forall b \in W} \in [r_j^-, r_j^+]$  となる存在区間が厳密に評価される．これにより  $R_F(b)$  が計算機を用いて評価可能となる．

次に無限次元部分のベクトル場の評価であるが，同様に [2][5] により次の評価が得られる事が知られている．

$$f_j^{(3)}(a)|_{\forall a \in \bar{W}} \in \left[ -\frac{\bar{\eta}}{j^s}, \frac{\bar{\eta}}{j^s} \right].$$

よって簡単な計算により

$$\zeta_j c + \bar{\eta} < 0, \quad \forall j > m \quad (9)$$

が無限次元部分の境界がベクトル場に対して入口となる条件になる．ここで  $m$  を  $\zeta_j$  が  $j > m$  で単調減少になるように設定しておけば， $j = m + 1$  で (9) を満たせば  $j > m$  なる全ての  $j$  で (9) を満たすことが示される．

以上により計算機を用いて Conley 指数が厳密に計算でき，定常解の検証が行なわれる．

### 3 接続軌道の検証

本節では，位相的方法により検証された定常解間の接続軌道の存在を調べる方法について解説していく．まず最初にモース分解の定義を与えることから始めよう．流れ  $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  に対して， $\omega(x)$  で  $x$  の  $\omega$  極限集合， $\alpha(x)$  で  $x$  の  $\alpha$  極限集合を表すものとする．孤立不変集合が与えられたとき，次で与えられる分解を考える．

**定義 5** 孤立不変集合  $S$  のモース分解とは互いに交わらない  $S$  の部分不変集合  $M(p)$  (モース集合と呼ぶ) の有限個の集まり

$$\mathcal{M}(S, <) := \{M(p) \mid p \in \mathcal{P}(<)\}$$

であり次を満たすものとする：もし  $x \in S \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} M(p)$  ならば， $q > p$  なる  $p, q \in \mathcal{P}(<)$  が存在し， $x \in C(M(q), M(p); S) := \{x \in S \mid \alpha(x) \subset M(q), \omega(x) \subset M(p)\}$  となる．ここで  $C(M(q), M(p); S)$  は  $M(q)$  から  $M(p)$  への接続軌道の集まりである．また  $\mathcal{P}(<)$  は半順序  $<$  が備わった有限集合とし， $<$  を許容半順序と呼ぶ．

モース分解について 2 点コメントをしておく．まず，各  $M(p)$  が孤立不変集合になることから ([3]) その Conley 指数が定義される点である．また  $S$  上の流れは有限集合  $\mathcal{P}$  に，次で与えられる自然な半順序を誘導する：

$$p < q \iff \exists \{\pi_0(= p), \pi_1, \dots, \pi_n(= q)\} \subset \mathcal{P} \\ \text{s.t. } C(M(\pi_i), M(\pi_{i-1}); S) \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

我々はこの半順序を  $<_F$  と表すことにする．簡単な計算により任意の許容半順序  $<$  は  $<_F$  の拡張，すなわち  $p <_F q \Rightarrow p < q$  が示される．

次にモース分解  $\mathcal{M}(S, <)$  に対してコネクション行列を定義する．



**定義 6** コネクション行列  $\Delta_n$  は次を満たす線型写像

$$\Delta_n : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_n(M(p)) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_{n-1}(M(p)),$$

として定義される：

1.  $\Delta_n$  は上三角行列, すなわち  $\Delta_n(p, q) \neq 0 \Rightarrow q > p$
2.  $\Delta_n \Delta_{n+1} = 0$
3.  $\text{Ker} \Delta_n / \text{Im} \Delta_{n+1} \cong CH_n(S)$

モース分解  $\mathcal{M}(S, \langle \cdot \rangle)$  が与えられたとき, そのコネクション行列を  $\mathcal{C}(\langle \cdot \rangle)$  と表す. 許容半順序  $\langle \cdot \rangle$  は流れが定める順序  $\langle_F$  の拡張であることから,  $\mathcal{C}(\langle_F \rangle) \subset \mathcal{C}(\langle \cdot \rangle)$  を示すことができる. 次の2つの定理はコネクション行列理論において重要な役割を果たす [3].

**定理 7** コネクション行列は存在する, すなわち  $\mathcal{C}(\langle \cdot \rangle) \neq \emptyset$

**定理 8**  $\Delta_n \in \mathcal{C}(\langle_F \rangle)$  としたとき, もし  $\Delta_n(p, q) \neq 0$  ならば  $\mathcal{C}(M(q), M(p); S) \neq \emptyset$ .

各モース集合の Conley 指数の情報と定義6の3つの代数的条件より, コネクション行列の候補を構成することが可能となる. もしその候補を一意に求めることができたなら定理7より, その行列が真のコネクション行列であることが導かれる. また定理8より, ここで導かれたコネクション行列をもちいて, モース集合間の接続軌道の存在を調べることも可能となる.

以下に SH 方程式において, 定常解間の接続軌道の存在を検証する方法を簡単に解説していく. 証明やアルゴリズムの詳細は [2] にまとめられているので参照されたい. これからの議論では  $(k_0, \nu) = (0.62, 0.38)$  に固定して考える. 図2は  $k_0 = 0.62$  としてガレルキン近似を施して得られた定常解の近似分岐図である. 対称性  $u(x, t) \rightarrow -u(x, t)$  を考慮すると, 図

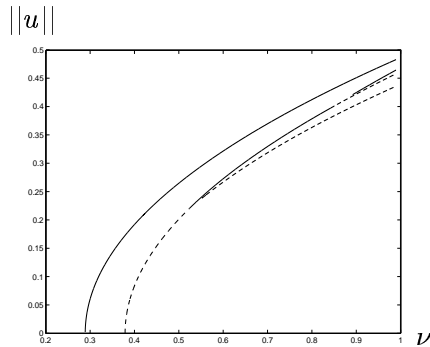


図2:  $k_0 = 0.62$  における分岐図

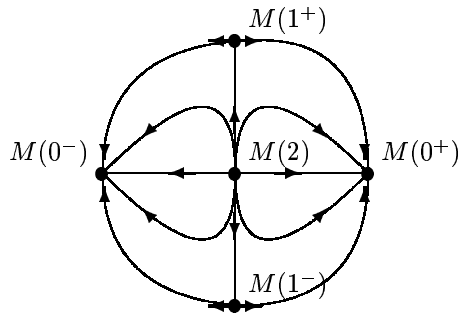


図3: 各定常解間の接続軌道

2は  $\nu = 0.38$  において5つの定常解  $M(p)$ ,  $p \in \mathcal{P} := \{0^\pm, 1^\pm, 2\}$  の存在を示唆している. ここで  $p^\pm$  は対称性  $M(p^+) = -M(p^-)$  に対応している. 前節で紹介した検証法をもちいることで, 次の補題が検証される.

**補題 9**  $(k_0, \nu) = (0.62, 0.38)$  において図 2 に示されている近似定常解の近傍に真の解  $M(p)$ ,  $p \in \mathcal{P}$ , が一意に存在する. 更に各定常解の Conley 指数は次で与えられる.

$$CH_j(M(2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = 2, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

$$CH_j(M(p^\pm)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = p, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases} \quad p = 0, 1.$$

ここで前節の議論をそのまま用いるだけでは, 解の一意性については主張することができない点を注意しておく. しかしバナッハの不動点定理を用いた数値検証法 [8] を位相的方法へ適用することにより, 解の一意性を示すことが可能となる [2].

次に大域的 Conley 指数の計算及び, モース分解の構成の際に必要な次の補題を示す.

**補題 10** 表 1 に表されている集合  $J$  は正不変な孤立化ブロックであり, その Conley 指数は

$$CH_j(J) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (10)$$

となる. 更にその内部に含まれている定常解は補題 9 に示されている定常解  $M(p)$ ,  $p \in \mathcal{P}$ , のみである.

表 1: 正不変集合  $J$

$k$	$a_k^-$	$a_k^+$
0	$-4.3380010295 \times 10^{-4}$	$4.3380010295 \times 10^{-4}$
1	$-3.4374821943 \times 10^{-3}$	$3.4374821943 \times 10^{-3}$
2	$-1.4440654070 \times 10^{-1}$	$1.4440654070 \times 10^{-1}$
3	$-4.5735140818 \times 10^{-5}$	$4.5735140819 \times 10^{-5}$
4	$-1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$
5	$-1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$
6	$-1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$
$k \geq 7$	$-1.0/k^5$	$1.0/k^5$

検証の概略を説明する. まず正不変な孤立化ブロックであるという点については, 前節の定常解検証の際にも行なったように, 区間演算を用いた非線形項の評価から境界でのベクトル場の出入りを調べることで検証することができる. またその境界において出口が空集合であることから, その Conley 指数は (10) で与えられる. 次に, その内部の定常解の分布についてであるが, 一意存在が示されている領域を  $\bar{W}(p)$ ,  $p \in \mathcal{P}$ , とした場合,  $J \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \bar{W}(p)$  において定常解の非存在を検証できれば十分である. この定常解の非存在検証については, 平均値の定理を拡張した検証法 [2] を適用することにより示すことができる.

## リアブノフ関数

$$F(u) = \int_0^L \left[ \frac{1}{4}u^4 - \frac{\nu}{2}u^2 + \frac{1}{2} \left( (1 + \partial_x^2) u \right)^2 \right] dx$$

の存在, 補題 9, 10 及び [4] より  $\mathcal{M}(S) = \{M(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$  が  $J$  内のモース分解を与えることがわかる. このモース分解に対してコネクション行列を計算することにより, 次の定理の主張が検証される.

**定理 11** パラメーター値  $(k_0, \nu) = (0.62, 0.38)$  において, 各定常解間には図 3 で表されている接続軌道が存在する.

証明の概略は次のようになる. まず  $CH_i(M(p)) = 0, p \in \mathcal{P}, i > 2$  より, 次の系列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_2(M(p)) \xrightarrow{\Delta_2} \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_1(M(p)) \xrightarrow{\Delta_1} \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_0(M(p)) \longrightarrow 0$$

を考える. ここでコネクション行列  $\Delta_2, \Delta_1$  は, 補題 9 の各定常解の Conley 指数, 対称性  $F(M(p^-)) = F(M(p^+))$ , 及びコネクション行列の代数的条件 (定義 6 の条件 1-3) より

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

として一意に定まる. ここで各コネクション行列  $\Delta_i$  は

$$CH_i(M(0^-)) \oplus CH_i(M(0^+)) \oplus CH_i(M(1^-)) \oplus CH_i(M(1^+)) \oplus CH_i(M(2))$$

上に作用するものとする. よって定理 8 より, 図 3 に示されている接続軌道の存在が主張される.

## 参考文献

- [1] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Lecture Notes 38, A.M.S. Providence, R.I. 1978.
- [2] S. Day, Y. Hiraoka, K. Mischaikow, and T. Ogawa, *Rigorous Numerics for Global Dynamics: a study of the Swift-Hohenberg equation*, in press(SIAM J. Appl. Dynm. Sys.).
- [3] R. Franzosa, The connection matrix theory for Morse decompositions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1989), 561-592.

- [4] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, A.M.S. Providence, R.I. **25**, 1988.
- [5] 平岡裕章, 小川知之, K. Mischaikow, Swift-Hohenberg 方程式の定常解大域分岐の Conley 指数を用いた検証, *Trans. Jpn. Soc. Ind. Appl. Math.* 13, No.2 (2003), 191-211.
- [6] C. McCord, Mappings and homological properties in the Conley index theory, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 8\* (1988), 175-198.
- [7] 中尾充宏, 山本野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.
- [8] N. Yamamoto, A numerical verification method for solutions of boundary value problems with local uniqueness by Banach's fixed-point theorem, *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998), 2004-2013.
- [9] P. Zgliczyński and K. Mischaikow, Rigorous Numerics for Partial Differential Equations: The Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Found. Comput. Math.* 1 (2001), 255-288.



# On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data

谷内 靖 ( 信州大学理学部数理自然情報科学科)

## 1 Introduction

本稿では遠方で減衰しない初期条件に対する 2次元 Boussinesq 方程式に対する大域的可解性について議論する。 $n$ 次元全空間  $\mathbf{R}^n$  上の非圧縮性粘性流体による熱対流は次の Boussinesq 方程式によって記述される。

$$(B) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = g\theta & \text{in } t > 0 \text{ and } x \in \mathbf{R}^n, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + u \cdot \nabla \theta = 0 & \text{in } t > 0 \text{ and } x \in \mathbf{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } t > 0 \text{ and } x \in \mathbf{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 & \text{in } x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

ここで、 $u = (u^1(x, t), u^2(x, t), \dots, u^n(x, t))$ ,  $\theta = \theta(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$  はそれぞれ流体の速度場、温度分布、および圧力場を記述する未知関数である。また、 $g = (g^1, g^2, \dots, g^n)$  は与えられた一様な重力加速度である。

これまで、多くの研究者により、様々な領域  $\Omega$  上の熱対流が研究されてきた。(例えば、[1],[5],[4],[18],[19],[20],[21],[6],[7],[13],[14]等を参照)しかし、それらの結果は初期条件  $u_0, \theta_0$  に  $q$ -乗可積分性 ( $q < \infty$ ) が課せられている。考える領域が全空間や外部領域などの非有界領域の場合、この仮定は、荒っぽく言うと、初期条件  $u_0(x), \theta_0(x)$  が空間遠方で減衰することを意味している。

一方、初期値に空間遠方での減衰を仮定しない場合の結果として、次のようなものが知られている。Cannone[3], Giga-Inui-Matsui[9] は、初期速度場  $u_0$  に遠方での減衰を仮定せずに、 $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$   $\operatorname{div} u_0 = 0$  in  $\mathcal{D}'$  に対して、Navier-Stokes 方程式：

$$(N-S) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geq 0, x \in \mathbf{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

の時間局解を構成している。すなわち、ある  $T > 0$  と  $C_w([0, T]; L^\infty)$  に属する Navier-Stokes 方程式の解  $u$  が存在することを示している。Cannone[3] は”mild solution”の範囲での可解性を示しているのに対し<sup>1</sup>、Giga-Inui-Matsui [9] は

<sup>1</sup>Cannone は  $L^\infty$  より広い Besov 型の空間に属する初期速度場に対して時間局所解を構成している。

古典的な意味での解を構成している。(一意性に関しては、Giga-Inui-Kato-Matsui[10], J.Kato[15]を参照せよ。) また、次元が2次元の時、Giga-Matsui-Sawada[11]はこのNavier-Stokes方程式の解が時間大域解になる事を証明している。さらに、Boussinesq方程式に対しても類似の結果が成り立つことがわかっている。(Sawadaとの共同研究[22]) 正確には、[22]において、 $\operatorname{div} u = 0$  in  $\mathcal{D}'$  をみたす初期条件  $(u_0, \theta_0) \in (L^\infty(\mathbf{R}^n) \times \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbf{R}^n))$  に対して、

$$(u, \theta, \nabla p) \in C_w([0, T]; L^\infty(\mathbf{R}^n)) \times C_w([0, T]; \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbf{R}^n)) \times C((0, T); \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbf{R}^n)) \quad (1.1)$$

を満たす一意な局所解の存在を示した。(ここで、Besov空間  $\dot{B}_{\infty,1}^0$  の定義はSection 2を見よ。) この空間  $\dot{B}_{\infty,1}^0$  は  $L^\infty$  よりも狭い空間であるが、 $L^\infty$  と同様に遠方で減衰しない関数を含んでいる。例えば、 $\sin(a \cdot x) + (1 + x_1^2)^{-1}$  などである。さらに、[22]において、初期条件が  $(u_0, \theta_0) \in L^\infty \times L^q$  の場合の2次元 Boussinesq 方程式の大域可解性も示した。しかし、この2次元大域解に関する結果は初期温度分布に減衰条件  $\theta_0 \in L^q$  ( $1 < q < \infty$ ) を仮定している点で満足いくものではなかった。本稿の目的はこの減衰条件を取り除き、 $(u_0, \theta_0) \in L^\infty \times \dot{B}_{\infty,1}^0$  の条件で2次元 Boussinesq 方程式の大域可解性を示すことにある。

## 2 関数空間

Besov空間を導入する。 $\varphi_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  (Littlewood-Paley decomposition) を  $\hat{\varphi}_j(\xi) = \phi(2^{-j}\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,  $\operatorname{supp} \phi \subset \{1/2 < |\xi| < 2\}$  and  $\sum_{j=-\infty}^\infty \hat{\varphi}_j(\xi) = 1$  ( $\xi \neq 0$ ) をみたすようにとる。

Definition 1.  $s \in \mathbf{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$  とおくと

$$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbf{R}^n) \equiv \{f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty\}, \quad (\mathcal{P} \text{ は多項式全体の集合})$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &\equiv \left( \sum_{j=-\infty}^\infty (2^{sj} \|\varphi_j * f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq q < \infty, \\ \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &\equiv \sup_{-\infty < j < \infty} (2^{sj} \|\varphi_j * f\|_p), \quad q = \infty. \end{aligned}$$

この空間は  $(s, p, q)$  が

$$s < p/n \quad \text{または} \quad s = n/p, q = 1 \quad (2.1)$$

のとき、つぎの空間と同値である。

$$\dot{B}_{p,q}^s \cong \{f \in \mathcal{S}; \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty, f = \sum_{j=-\infty}^\infty \varphi_j * f \text{ in } \mathcal{S}'\} \quad (2.2)$$

そこで今後は、 $s, p, q$  が (2.1) を満たすとき、(2.2) の右辺を  $\dot{B}_{p,q}^s$  の定義とする。

### 3 Main Result

主定理を紹介する前に、まず、 $n$ 次元 Boussinesq 方程式の局所可解性を述べる。

**Lemma 3.1 (Sawada–Taniuchi[22]).** *Assume that the initial data  $(u_0, \theta_0) \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \times \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbf{R}^n)$  with  $\operatorname{div} u_0 = 0$  in the sense of distribution. Then there exist  $T > 0$  and a unique solution  $(u, \theta, \nabla p)$  to the  $n$ -dimensional Boussinesq equations with*

$$u \in C_w([0, T]; L^\infty) \cap C^1((0, T); L^\infty) \cap C((0, T); W^{2,\infty}), \quad (3.1)$$

$$\theta \in C([0, T]; \dot{B}_{\infty,1}^0) \cap C^1((0, T); L^\infty) \cap C((0, T); W^{2,\infty}), \quad (3.2)$$

$$\nabla p \in C((0, T); \dot{B}_{\infty,1}^0) \quad (3.3)$$

$$u \cdot \nabla u, \quad g\theta \in C((0, T); \dot{B}_{\infty,1}^0 \cap \dot{B}_{\infty,1}^1), \quad (3.4)$$

$$\partial_t u - \Delta u + P(u \cdot \nabla u) = P(g\theta) \quad \text{in } L^\infty, \quad (3.5)$$

$$\partial_t \theta - \Delta \theta + u \cdot \nabla \theta = 0 \quad \text{in } L^\infty, \quad (3.6)$$

$$\nabla p = (1 - P)(u \cdot \nabla u + g\theta). \quad (3.7)$$

Here  $P = \{P_{kl}\}_{1 \leq l, k \leq n} = \{\delta_{kl} + R_l R_k\}_{1 \leq l, k \leq n}$  and  $R_j = \partial_j(-\Delta)^{-1/2}$ . Moreover,  $T$  can be estimated from below as

$$T > \frac{C(n)}{(\|u_0\|_\infty + \|\theta_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0})^2 + |g| + 1} \quad (3.8)$$

**Remarks 1.** (B) の解の構成は次の積分方程式の解を見つけることに帰着される。

$$\begin{aligned} \text{(I.E.B)}_1 \quad u(t) &= e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t P \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} (u \otimes u)(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} P(g\theta)(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\text{(I.E.B)}_2 \quad \theta(t) = e^{t\Delta} \theta_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla \theta)(\tau) d\tau,$$

ここで、 $\{u \otimes u\}_{1 \leq k, l \leq n} = \{u^k u^l\}_{1 \leq k, l \leq n}$  である。

本稿の主定理を述べる。

**Theorem 1 (global existence).** *Let the initial data  $(u_0, \theta_0) \in L^\infty(\mathbf{R}^2) \times \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbf{R}^2)$  with  $\operatorname{div} u_0 = 0$ . Then there exists a unique global solution  $(u, \theta, \nabla p)$  to the 2-dimensional Boussinesq equations such that (3.1)-(3.7) hold for  $T = \infty$ .*



次に Theorem 1 の証明に使う補題を紹介する。

Boussinesq 方程式の第 1 番目の式の両辺に  $\text{rot}$  を作用させると、2次元の場合、

$$\omega_t - \Delta\omega + u \cdot \nabla\omega = \text{rot } g\theta, \quad (3.9)$$

が成り立つ。ここで、 $\omega = \text{rot } u$  であり、渦度と呼ばれる。もし、 $\theta_0 \in L^q$  ( $1 < q < \infty$ ) ならば、

$$\|\omega(t)\|_{L^\infty + L^q} \leq C \cdot \left\{ \|\omega_0\|_\infty + q^{1/2} \left( \int_0^t \|g\theta(\tau)\|_q^2 d\tau \right)^{1/2} \right\},$$

が成り立ち、これを利用することにより 2次元 Boussinesq 方程式の大域可解性が証明できる。([22]) しかし、初期温度分布  $\theta_0 \in \dot{B}_{\infty,1}^0$  が遠方で減衰しない場合、上の不等式は使えない。そこで、 $L^q$  の代わりに  $L_{ul}^q = L_{unif,loc}^q$  を考える。

**Lemma 3.2.** *Let  $a \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2))$  with  $\nabla \cdot a = 0$  and let  $v \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbf{R}^2))$  be a solution to the 2 dimensional vorticity equation*

$$\frac{\partial}{\partial t} v - \Delta v + a \cdot \nabla v = \partial_j f, \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, T), \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (3.10)$$

Then there holds for all  $t \in [0, T]$  and all  $q \geq 2$

$$\|v(t)\|_{L_{ul}^q} \leq C \left( 1 + t + \int_0^t \|a(\tau)\|_\infty d\tau \right)^{2/q} \left\{ \|v_0\|_{L_{ul}^q} + q^{1/2} \left( \int_0^t \|f(\tau)\|_{L_{ul}^q}^2 d\tau \right)^{1/2} \right\} \quad (3.11)$$

where  $C$  is an absolute constant.

## 4 Theorem 1の証明の概略

Theorem 1の証明の概略を述べる。(3.1)(3.2) より、 $(u, \theta) \in C([0, T]; W^{2,\infty}) \times C([0, T]; W^{2,\infty} \cap \dot{B}_{\infty,1}^0)$  と仮定してもよい。解の存在時間  $T$  が下から (3.8) のように評価されているので、大域可解性を示すには、 $\|u(t)\|_\infty$  と  $\|\theta(t)\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}$  が有限時間で爆発しないことを証明すればよい。すなわち、

$$\sup_{0 < t < T} (\|u(t)\|_\infty + \|\theta(t)\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}) < \infty \quad \text{if } T < \infty. \quad (4.1)$$

を示せばよい。(B) の 2 番目の方程式と  $(I.E.B)_2$  を使うと、

$$\|\theta(t)\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0} \leq \|\theta_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0} + Ct^{1/2} \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|_\infty \right) \|\theta_0\|_\infty. \quad (4.2)$$

を得ることができる。よって、

$$\sup_{0 \leq \tau < T} \|u(\tau)\|_\infty < \infty, \quad \text{if } T < \infty. \quad (4.3)$$

を示せば (4.1) が言える。[24] で用いた方法と同様の方法で (4.3) を示す。まず、次の形の Littlewood-Paley 分解を考える。

$$1 = \hat{\psi}_N(\xi) + \sum_{j \geq N} \hat{\varphi}_j(\xi) \quad (\xi \in \mathbf{R}^2, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

ここで、 $\psi_N = 2^{2N}\psi(2^N \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(1 - \sum_{j=N} \hat{\varphi}_j)$ 。この分解を使うと、

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|\psi_N * u(t)\|_\infty + \sum_{j=N}^{\infty} \|\varphi_j * u(t)\|_\infty \equiv J_1 + J_2. \quad (4.4)$$

を得る。次に  $J_1$  と  $J_2$  を別々の方法によって評価してやる。(このような議論は Serfati[23] や Vishik[25] が用いている。)  $(I.B.E)_1, (I.B.E)_2$  を用いると、 $0 \leq s \leq t < T$  に対し、

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C_0 \|u(s)\|_\infty + C_1 2^N (\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|_\infty)^2 (t-s) \\ &\quad + C_2 |g| \|\theta_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0} (t-s) + C_3 |g| 2^N (\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|_\infty) \|\theta_0\|_\infty (t^2 - s^2) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $C_0 = \|\psi\|_{L^1} \geq \hat{\psi}(0) = 1$  である。 $J_2$  の評価には、Biot-Savart の法則から出てくる次の関係を使う：

$$\begin{aligned} \varphi_j * u &= \left( (-\Delta)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_j * \omega, -(-\Delta)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_j * \omega \right), \\ \|\varphi_j * u\|_\infty &\leq C 2^{-j} \|\varphi_j * \omega\|_\infty. \end{aligned}$$

ここで、 $\omega = \text{rot } u$  であり、 $\omega$  は渦度とよばれる。 $\omega$  は (3.9) を満たすので、Lemma 3.2 より、

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_{L_{ul}^q} &\leq C \left( 1 + (t-s) \left( 1 + \sup_{s < \tau < t} \|u(\tau)\|_\infty \right) \right)^{2/q} \\ &\quad \times (\|\omega(s)\|_{L_{ul}^q} + q^{1/2} (t-s)^{1/2} |g| \|\theta_0\|_\infty) \end{aligned} \quad (4.5)$$

が言える。これらの不等式を使うと、 $q \geq 4, s \leq t < \min\{T, s+1\}$  に対し

$$J_2 \leq C 2^{-N} \max\{2^{2N/q}, 1\} \left( 1 + \sup_{s \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|_\infty \right)^{2/q} (\|\omega(s)\|_{L_{ul}^q} + q^{1/2} (t-s)^{1/2}) \quad (4.6)$$

となる。よって、(4.4) より、 $q \geq 4, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, s \leq t < \min\{T, s+1\}$  にたいし、

$$\begin{aligned} &\|u(t)\|_\infty \quad (4.7) \\ &\leq C_0 \|u(s)\|_\infty + C_1 2^N (\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|_\infty)^2 (t-s) \\ &\quad + C_2 |g| \|\theta_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0} (t-s) + C_3 |g| 2^N (\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|_\infty) \|\theta_0\|_\infty (2s+1)(t-s) \\ &\quad + C_4 2^{-N} \max\{2^{2N/q}, 1\} \left( 1 + \sup_{s \leq \tau \leq t} \|u(s)\|_\infty \right)^{2/q} (\|\omega(s)\|_{L_{ul}^q} + q^{1/2} (t-s)^{1/2}) \end{aligned}$$

が従う。簡略化のため、 $h(t) \equiv 1 + t + \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|_\infty$  とおくと、 $0 \leq s \leq t < \min\{T, s+1\}$  に対し、

$$\begin{aligned} h(t) &\leq C_0(h(s) + t - s) + C_1 2^N h(t)^2 (t - s) \\ &\quad + C_2 |g| \|\theta_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0} (t - s) + 2C_3 |g| 2^N h(t) \|\theta_0\|_\infty h(s) (t - s) \\ &\quad + C_4 2^{-N} \max\{2^{2N/q}, 1\} h(t)^{2/q} (\|\omega(s)\|_{L_{ul}^q} + q^{1/2} (t - s)^{1/2}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。 $h(t)$  は連続関数なので、 $t$  を  $s$  に十分近くにとると、 $h(t) \leq 2C_0 h(s)$  とできる。このような  $t \in [s, T)$  の上限を  $s + \tau(s)$  とおく。すなわち、

$$\tau_0(s) \equiv \sup\{\tau \in (0, T - s) ; h(s + \tau) \leq 2C_0 h(s)\}, \quad (\tau_0(s) \leq T - s). \quad (4.9)$$

このとき、 $h$  は単調増加関数なので、 $s \in [0, T)$  に対し、

$$\sup_{s \leq t < s + \tau_0(s)} h(t) \leq 2C_0 h(s) \quad (4.10)$$

である。

$$s \leq t < s + \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4C_2 |g| \|\theta_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}}, \frac{1}{q^{2/3}}, \tau_0(s)\right\}$$

ととると、(4.8) より、

$$\begin{aligned} h(t) &\leq C_0 \left(h(s) + \frac{1}{2}\right) + C_5 2^N h(s)^2 (t - s) \\ &\quad + C_6 2^{-N} \max\{2^{2N/q}, 1\} h(s)^{2/q} (\|\omega(s)\|_{L_{ul}^q} + q^{1/6}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

を得る。さらに  $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  を適当に選び、 $t - s$  が十分小さくなるように  $t, s$  をとると、最終的に

$$h(t) < \frac{15}{8} C_0 h(s) \text{ for all } s \leq t < s + \min\{\delta(s, q), \tau_0(s)\}, \quad (4.12)$$

$$\delta(s, q) \equiv \min \left\{ \frac{C_0/(4C_7)}{(\|\omega(s)\|_{L_{ul}^q} + q^{1/6})^{\frac{q}{q-2}}}, \frac{C_0/(4C_7)}{h(s)^{2/q} (\|\omega(s)\|_{L_{ul}^q} + q^{1/6})}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4C_2 |g| \|\theta_0\|_{\dot{B}_{\infty,1}^0}}, \frac{1}{q^{2/3}} \right\}$$

を得る。

ここで、

$$(A) \quad T < \infty \quad \text{and} \quad \tau_0(s) < T - s \text{ for all } s \in [0, T)$$

と仮定する。 $h$  の連続性と、(4.12)、 $\tau_0(s)$  の定義 (4.9) より、

$$\delta(s, q) < \tau_0(s) \quad (4.13)$$

が言え、したがって、

$$h(t) \leq 2C_0 h(s) \text{ for all } s \leq t \leq s + \delta(s, q). \quad (4.14)$$

となる。

ここで、 $q_k = k + 4$  とおき、 $\{t_k\}_{k=0}^\infty$  を次のように定義する。

$$t_0 \equiv 0, \quad t_{k+1} - t_k \equiv \delta(t_k, q_k).$$

仮定 (A), (4.13) より、

$$t_k < T \quad \text{for all } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

であり、また、(4.14) より、

$$h(t_k) \leq 2C_0 h(t_{k-1}) \leq \dots \leq (2C_0)^k h(0). \quad (4.16)$$

(4.16) と Lemma 3.2 などを使うと、 $\delta(t_k, q_k)$  と  $t_k$  を下から次のように評価できる。

$$\delta(t_k, q_k) \geq C \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad t_k = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j, q_j) \geq C k^{1/3}.$$

(4.15) より、 $T = \infty$  となり、(A) に矛盾する。よって、もし  $T < \infty$  ならば、ある  $s_0 \in [0, T)$  が存在し、

$$\tau_0(s_0) = T - s_0.$$

となる。(4.10) より、 $\sup_{s_0 \leq t < T} h(t) \leq 2C_0 h(s_0)$  を得る。これより、(4.3) が従う。

## 参考文献

- [1] Cannon, J.R., DiBenedetto, E., *The initial value problem for Boussinesq equations with data in  $L^p$* , Approximation Methods for Navier-Stokes problems, Edited by Rautmann, R., Lect. Notes in Math., **771** Springer-Verlag, Berlin (1980) 129-144.
- [2] Cannon, J.R., Knightly, G.H., *A note on the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations*, SIAM J. Appl. Math., **18** (1970) 641-644.
- [3] Cannone, M., *Ondelettes, Praproducts et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Arts et Sciences Paris-New York-Amsterdam (1995).
- [4] Foias, C., Mainley, O., Temam, R., *Attractors for the Bérard problem: existence and physical bounds of their fractal dimension.*, Nonlinear Anal. T. M. A., **11** (1987), 939-967.
- [5] Fife, P.C., Joseph, D.D., *Existence convective solutions of the genelarized Bénard problem which are analytic in their norm.*, Arch. Rational Mech. Anal., **33** (1969), 116-138.
- [6] Hishida, T., *Existence and Regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem*, Funkcial. Ekvac., **34** (1991), 449-474.

- [7] Hishida, T., Yamada Y., *Global solutions for the heat convection equations in an exterior domain*, Tokyo J. Math., **15** (1992), 135-151.
- [8] Giga, Y., Giga, M.-H., *Nonlinear Partial Differential equations*, Kyoritsu shuppan (1999) (in Japanese).
- [9] Giga, Y., Inui, K., Matsui, S., *On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data*, Quaderni di Matematica, **4** (1999), 28-68.
- [10] Giga, Y., Inui, K., Kato, J., Matsui, S., *Remarks on uniqueness of bounded solutions of the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Analysis, **47** (2001), 4151-4156.
- [11] Giga, Y., Matsui, S., Sawada, O., *Global Existence of Two-Dimensional Navier-Stokes Flow with nondecaying initial velocity*, J. Math. fluid Mech., **3** (2001), 302-315.
- [12] Ishimura, N., Morimoto, H., *Remarks on the blow-up criterion for the 3-D Boussinesq equations*, Math. Models Methods Appl. Sci., **9** (1999), 1323-1332.
- [13] Kagei, Y., *On weak solutions of nonstationary Boussinesq equations*, Differential Integral Equations, **6** (1993), 587-611.
- [14] Kagei, Y., von Wahl, W., *The Eckhaus criterion for convection roll solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **32** (1997), 563-620.
- [15] Kato, J., *On the uniqueness of nondecaying solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., **169** (2003), 159-175
- [16] Koch, H., Tataru, D., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math., **157** (2001), 22-35.
- [17] Kozono, H., Yamazaki, M., *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. P. D. E., **19** (1994), 191-200
- [18] Morimoto, H., *On the existence of weak solutions of equation of natural convection*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **36** (1989), 87-102.
- [19] Morimoto, H., *Non-stationary Boussinesq equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **39** (1992), 61-75.
- [20] Oeda, K., *On the initial Value problem for the heat convection equation of Boussinesq approximation in a time-dependent domain.*, Proc. Japan Acad., Ser A, **64** (1988), 143-146.
- [21] Oeda, K., *Weak and strong solutions of the heat convection equations in regions with moving boundaries*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **36** (1989), 491-536.
- [22] Sawada, O., Taniuchi, Y., *On Boussinesq flow with nondecaying initial data*, Funkcial. Ekvac. **47** (2004), 225-250.
- [23] Serfati, P., *Solutions  $C^\infty$  en temps,  $n$ -log lipshitz bornées en espace et équation d'Euler*, C.R.Acad. Sci. Paris, t. **320** Série I, (1995), 555-558.
- [24] Taniuchi, Y., *Uniformly local  $L^p$  estimate for 2-D vorticity equation and its application to Euler equations with initial vorticity in  $\mathbf{bmo}$* , Commun. Math. Phys. **248** (2004), 169-186
- [25] Vishik, M., *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **32** (1999) 769-812.

# $L^q$ estimates for the Stokes equations around a rotating body \*

菱田 俊明 (Toshiaki Hishida)

新潟大学自然科学系  
hishida@eng.niigata-u.ac.jp

## 1 序

3次元物体の周りの非圧縮粘性流の運動は, Navier-Stokes 方程式の外部問題として定式化される. 物体が運動 (並進, 回転) する場合は興味深い, 特に回転の影響を数学的に捉えるため, 物体は回転運動のみするとし, 角速度を  $\omega = (0, 0, 1)^T$  とする. 変数変換により一定外部領域における問題に書き直すと, 次節で導出するように, 線型作用素

$$L = -\Delta - (\omega \wedge x) \cdot \nabla + \omega \wedge \quad (1.1)$$

が現れる. ただし,  $\wedge$  は外積をあらわす; 従って,  $(\omega \wedge x) \cdot \nabla = -x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}$  であり, この非有界係数は剛体の回転をあらわす. この移流作用素により, 物体が静止 ( $\omega = 0$ ) の場合と比べて, 問題が質的に異なる. その質的な変化は, 定常および非定常の基本解の性質を見ることによりわかる. この研究では,  $L^q$  空間での解析を目指し, 作用素  $L$  の基本的性質を明らかとするべく, 線型定常問題の解の評価, 特に  $\nabla u$  および  $p$  の  $L^q$  評価を導く. 本稿の結果は, [14] に基づく. 証明を省いた部分については, これを参照されたい.

## 2 問題と結果

$D \subset \mathbb{R}^3$  は滑らかな境界  $\partial D$  をもつ外部領域とする. 物体  $D^c$  が角速度  $\omega = (0, 0, 1)^T$  で回転するとき, 流体の占める領域は,

$$D(t) = O(t)D = \{y = O(t)x; x \in D\}$$

---

\*本研究は科学研究費補助金基盤研究 C(2), 課題番号 16540143 「種々の非有界領域における非圧縮粘性流の安定性の数学解析」(代表 菱田俊明) の援助を受けている.

である。ただし,

$$O(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

いま, 流体の速度  $u(y, t) = (u_1, u_2, u_3)^T$  と圧力  $p(y, t)$  は, Navier-Stokes 方程式

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_y u = \Delta_y u - \nabla_y p, \quad \nabla_y \cdot u = 0 \quad (y \in D(t), t > 0)$$

と非同次境界条件

$$u|_{\partial D(t)} = \omega \wedge y, \quad u \rightarrow 0 \text{ as } |y| \rightarrow \infty$$

により支配されている。変数変換

$$y = O(t)x, \quad p(y, t) = p'(x, t)$$

および

$$O(t)^T \{u(y, t) - \omega \wedge y\} = u'(x, t)$$

あるいは

$$O(t)^T u(y, t) = \tilde{u}(x, t)$$

により,  $D$  上の問題に帰着させよう ([1], [4], [7], [12]).  $\{u', p'\}$  に対しては,

$$\begin{cases} \partial_t u' + u' \cdot \nabla u' = \Delta u' - 2\omega \wedge u' - \omega \wedge (\omega \wedge x) - \nabla p', & \nabla \cdot u' = 0, \\ u'|_{\partial D} = 0, & u' + \omega \wedge x \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

となり, コリオリの力  $2\omega \wedge u'$  が現れるが, 数学的には無限遠で増大する境界条件が大きな困難である。一方,  $\{\tilde{u}, p'\}$  に対しては,

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} = \Delta \tilde{u} + (\omega \wedge x) \cdot \nabla \tilde{u} - \omega \wedge \tilde{u} - \nabla p', & \nabla \cdot \tilde{u} = 0, \\ \tilde{u}|_{\partial D} = \omega \wedge x, & \tilde{u} \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

に帰せられるが, 無限遠で増大する係数をもつ移流項  $(\omega \wedge x) \cdot \nabla \tilde{u}$  を伴い, この項を粘性項  $\Delta \tilde{u}$  の単なる摂動と見ることはできない。

このことを, 定常および非定常の基本解のレベルで説明しよう。まず, (1.1) の線型作用素  $L$  の基本解  $\Gamma(x, y)$  は後の (2.9) のように与えられるが,  $\omega = 0$  (ラプラシアン) の場合と異なり, 各点評価  $|\Gamma(x, y)| \leq C/|x - y|$  を許さない ( $x, y$  がそれぞれある特定の方向に沿い無限遠へ行くときに満たさない)。ただし,  $f$  が良い関数 (例えば台が有界で滑らかな関数) ならば, 方程式  $Lu = f$  の解は無限遠で  $O(1/|x|)$  のように振舞い, 基本解の挙動は複雑で微妙である。次に, 非定常問題の基本解について, 全空間  $\mathbb{R}^3$  において (1.1) の線型作用素  $L$  が  $L^2$  上で生成する半群

$$e^{-tL} f(x) = O(t)^T (e^{t\Delta} f) (O(t)x)$$

は,  $\omega = 0$  (熱半群  $e^{t\Delta}$ ) の場合と異なり, 解析半群でない. ただし, ある種の弱い平滑性は示される. また, 外部問題の  $L^2$  半群 [11] にも同様な平滑性がある. 詳しくは, [12], [13].

上の問題 (外部領域における非線型問題) に対して, 弱解の存在 [1] と時間局所解の一意存在 [12] が, それぞれ適当な初期条件のもとで示されている. また, 角速度  $\omega$  が小さい場合に, 定常解 (元の問題の時間周期解) の一意存在 [8], [19], 時間大域的強解の一意存在 [9] も近年示された. これらの結果は, いずれも  $L^2$  理論である.

本稿では, 一般な  $L^q$  空間での解析を目指し, 全空間および外部領域における線型定常問題

$$Lu + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (2.1)$$

に対して, その弱解の基本的な  $L^q$  評価

$$\|\nabla u\|_q + \|p\|_q \leq C\|f\|_{-1,q} \quad (2.2)$$

を示す. 結果を述べるために, homogeneous Sobolev 空間 ( $1 < q < \infty$ ) を導入しよう;  $\|\cdot\|_{q,\mathbb{R}^3}$  と  $\|\cdot\|_q$  をそれぞれ  $L^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $L^q(D)$  のノルムとして,

$$\widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\|\nabla \cdot\|_{q,\mathbb{R}^3}} = \{v \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^3); \nabla v \in L^q(\mathbb{R}^3)^3\}/\mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \widehat{W}_0^{1,q}(D) &= \overline{C_0^\infty(D)}^{\|\nabla \cdot\|_q} \\ &= \begin{cases} \{v \in L^{3q/(3-q)}(D); \nabla v \in L^q(D)^3, v|_{\partial D} = 0\} & \text{for } 1 < q < 3 (= n), \\ \{v \in L_{loc}^q(\overline{D}); \nabla v \in L^q(D)^3, v|_{\partial D} = 0\} & \text{for } 3 \leq q < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

と定める. また, これらの双対空間を

$$\widehat{W}^{-1,q}(\mathbb{R}^3) = \widehat{W}^{1,q/(q-1)}(\mathbb{R}^3)^*, \quad \widehat{W}^{-1,q}(D) = \widehat{W}_0^{1,q/(q-1)}(D)^*$$

とし, それぞれのノルムを  $\|\cdot\|_{-1,q,\mathbb{R}^3}$  と  $\|\cdot\|_{-1,q}$  であらわす.

さて, 外部領域  $D$  上の線型定常問題

$$\begin{cases} -\Delta u - (\omega \wedge x) \cdot \nabla u + \omega \wedge u + \nabla p = f & \text{in } D, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } D, \\ u = 0 & \text{on } \partial D, \end{cases} \quad (2.3)$$

に対して,  $f \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^3$ ,  $1 < q < \infty$ , を与えるとき, (2.3) の弱解  $\{u, p\} \in \widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$  を以下のように定義する:

1.  $\nabla \cdot u = 0$  in  $L^q(D)$ ;



2.  $(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^3$ ;
3.  $\{u, p\}$  は (2.3)<sub>1</sub> を超関数の意味で満たす, すなわち

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - \langle (\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u, \varphi \rangle - \langle p, \nabla \cdot \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad (2.4)$$

が任意の  $\varphi \in C_0^\infty(D)^3$  に対して成り立つ; このとき, (2.4) は任意の  $\varphi \in \widehat{W}_0^{1,q/(q-1)}(D)^3$  に対して満たされる.

外部問題を解析するために, まず全空間  $\mathbb{R}^3$  上の問題を非同次発散条件のもとで考える (その弱解は外部問題の場合と同様に定義される):

$$-\Delta u - (\omega \wedge x) \cdot \nabla u + \omega \wedge u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = g \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \quad (2.5)$$

非同次な  $\nabla \cdot u$  を課したのは, 後で外部問題の解を cut-off するためである. 主結果は以下のように述べられる.

**Theorem 2.1**  $1 < q < \infty$  とし, また

$$f \in \widehat{W}^{-1,q}(\mathbb{R}^3)^3, \quad g \in L^q(\mathbb{R}^3), \quad (\omega \wedge x)g \in \widehat{W}^{-1,q}(\mathbb{R}^3)^3$$

とする. 問題 (2.5) に対して,  $L^q$  評価

$$\begin{aligned} & \|\nabla u\|_{q,\mathbb{R}^3} + \|p\|_{q,\mathbb{R}^3} + \|(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u\|_{-1,q,\mathbb{R}^3} \\ & \leq C (\|f\|_{-1,q,\mathbb{R}^3} + \|g\|_{q,\mathbb{R}^3} + \|(\omega \wedge x)g\|_{-1,q,\mathbb{R}^3}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

を満たす弱解  $\{u, p\} \in \widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)^3 \times L^q(\mathbb{R}^3)$  が存在し, このクラスで一意的である ( $u$  に対して定数ベクトルの違いを除いているが, 実際に許される定数ベクトルの違いは  $\omega$  の定数倍である).

**Theorem 2.2**  $3/2 < q < 3$ ,  $f \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^3$  とする. 問題 (2.3) に対して,  $L^q$  評価

$$\|\nabla u\|_q + \|p\|_q + \|(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u\|_{-1,q} \leq C \|f\|_{-1,q} \quad (2.7)$$

を満たす弱解  $\{u, p\} \in \widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$  が存在し, このクラスで一意的である.

全空間上  $\mathbb{R}^3$  上で, 少なくとも  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)^3$  に対して, 方程式  $Lu = f$  の解は以下のように明示される:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x, y) f(y) dy = \int_0^\infty O(t)^T (e^{t\Delta} f)(O(t)x) dt. \quad (2.8)$$

この積分核

$$\Gamma(x, y) = \int_0^\infty O(t)^T E^t(O(t)x - y) dt \quad (2.9)$$

が, (1.1) の作用素  $L$  の基本解である; ただし,

$$E^t(x) = t^{-3/2} E(x/\sqrt{t}), \quad E(x) = (4\pi)^{-3/2} e^{-|x|^2/4}.$$

Fourier side での解の表示は,

$$\widehat{u}(\xi) = \int_0^\infty O(t)^T e^{-|\xi|^2 t} \widehat{f}(O(t)\xi) dt$$

である. 所望の  $L^q$  評価を示すには,  $f = \nabla \cdot F$ ,  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^9$  のときに, 対応  $F \mapsto \nabla u$  を与える積分作用素の  $L^q$  有界性を調べればよい. この作用素の積分核  $K(x, y)$  は, (2.9) の基本解  $\Gamma(x, y)$  を用いて,

$$K(x, y) = -\nabla_x \nabla_y \Gamma(x, y) \quad (2.10)$$

とあらわされるが, これの各点評価  $|K(x, y)| \leq C/|x - y|^3$  は (その不成立をきちんと示したわけではないが) 期待できそうにない. すなわち, Calderón-Zygmund 型ではないように見える. 実は,  $L^2$  有界性は容易に示される. しかし, 弱  $L^1$  評価  $\|Tf\|_{1,\infty} \leq C\|f\|_1$  は難しいので, 本研究では Calderón-Zygmund の議論のルートをたどらず,  $\{\nabla^2 u, \nabla p\}$  を  $L^q$  評価した [6] による解析を徹底させる (物体の回転だけでなく回転軸方向への並進も伴う場合の  $\{\nabla^2 u, \nabla_{x_3} u, \nabla p\}$  の評価は Farwig [5] による).  $q \in (2, \infty)$  に対する  $L^q$  有界性の証明の方針は,  $\xi$ -空間の 2 進分解を用いて (2.10) の積分核  $K$  を分解した上で, square function および maximal function を用いて評価する.  $q \in (1, 2)$  に対しては, adjoint を調べる.

外部問題は, cut-off テクニックにより解析される. 全空間と異なり, Theorem 2.2 では, 指数の制限  $n/(n-1) = 3/2 < q < 3 = n$  がある. 通常の Stokes 外部問題 ( $\omega = 0$  の場合) に対しては, 空間次元  $n \geq 3$  のとき, Theorem 2.2 が Borchers-Miyakawa [2], Galdi-Simader [10], Kozono-Sohr [15], [16] により示され,  $q$  についての上記の制限は最良である (改良されない); すなわち,  $q > n/(n-1)$  は任意の  $f \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^n$  に対する Theorem 2.2 のクラスでの可解性のために必要であり, 一方  $q < n$  はそのクラスでの解の一意性のために必要である. 既に述べたように, (1.1) の基本解の挙動はラプラシアン (あ

るいは通常の Stokes 作用素) のそれと比べて少し悪いが,  $L^q$  の枠組みで線型問題を捉える限りでは,  $\omega = 0$  の場合と同じ結果が得られることを Theorem 2.2 は主張している.

しかし, Theorem 2.2 における制限  $q > 3/2$  のために, この定理だけで定常 Navier-Stokes 方程式を解くことはできない. 何故なら,  $\|u \cdot \nabla u\|_{-1,q} \leq C \|\nabla u\|_q^2$  が成立するのは,  $q = 3/2 = n/2$  のとき, かつこのときに限るからである. 上記のように  $L^{3/2}$  では狭すぎて可解性が得られないので, 我々は関数空間を拡げないといけない.  $\omega = 0$  の場合の [17], [18] による解析を見ると, 非線型の解を構成しうる空間の候補のひとつとして Lorentz 空間, 特に弱  $L^{3/2}$  空間  $L_w^{3/2}(\ni \nabla u)$  が挙げられるが, (1.1) の基本解の微分はこの空間に入らないように見えるため単純でなく, 基本解をさらに詳しく調べる必要があろう. このことについては, 別の機会に論じたい.

### 3 全空間の問題

Theorem 2.2 は, 次の定理から従う.

**Theorem 3.1**  $1 < q < \infty, f \in \widehat{W}^{-1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  とする. 方程式

$$Lu \equiv -\Delta u - (\omega \wedge x) \cdot \nabla u + \omega \wedge u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

に対して,  $L^q$  評価

$$\|\nabla u\|_{q,\mathbb{R}^3} + \|(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u\|_{-1,q,\mathbb{R}^3} \leq C \|f\|_{-1,q,\mathbb{R}^3} \quad (3.2)$$

を満たす弱解  $u \in \widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  が存在し, このクラスで一意である (定数ベクトルの違いを除いているが, 実際に許される定数ベクトルの違いは  $\omega$  の定数倍である).

まず, 基本解の挙動について,

**Proposition 3.1**

$$|x - y| |\Gamma(x, y)| \leq C, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

を満たす定数  $C > 0$  は存在しない.

*Proof.*

$$|\Gamma(x, y)| > \Gamma_{33}(x, y) = \int_0^\infty E^t(O(t)x - y) dt$$

の右辺を下から評価すると, 例えば,  $x_\rho = (\rho, 0, 0)^T, y_\rho = (0, \rho, 0)^T$  に対して,

$$\Gamma_{33}(x_\rho, y_\rho) = \int_0^\infty (4\pi t)^{-3/2} e^{-\rho^2(1-\sin t)/2t} dt \geq \frac{C \log \rho}{\rho}, \quad \forall \rho > 1,$$

が成り立つ ( $C > 0$  は  $\rho$  に依らない). これを示そう.  $t = \pi/2 + 2k\pi$  の近くを取り出すと,

$$\Gamma_{33}(x_\rho, y_\rho) \geq \sum_{k=0}^{\infty} J_k(\rho) \geq \sum_{k=1}^{[\rho^2]} J_k(\rho).$$

ただし,

$$J_k(\rho) = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \{4\pi(t + \pi/2 + 2k\pi)\}^{-3/2} e^{-\rho^2(1-\cos t)/2(t+\pi/2+2k\pi)} dt.$$

特に,  $k \geq 1$  のとき,

$$\begin{aligned} J_k(\rho) &\geq (12k\pi^2)^{-3/2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{-\rho^2(1-\cos t)/4k\pi} dt \\ &\geq 2(12k\pi^2)^{-3/2} \int_0^{\pi/6} e^{-\rho^2 t^2/8k\pi} dt = \frac{C}{k\rho} \int_0^{\sqrt{\pi\rho/12\sqrt{2k}}} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

さらに,  $k \leq \rho^2$  ならば,

$$J_k(\rho) \geq \frac{C}{k\rho} \int_0^{\sqrt{\pi/12\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{C}{k\rho}$$

となるので,

$$\Gamma_{33}(x_\rho, y_\rho) \geq \frac{C}{\rho} \sum_{k=1}^{[\rho^2]} \frac{1}{k} \geq \frac{C}{\rho} \int_1^{\rho^2} \frac{ds}{s} = \frac{C \log \rho}{\rho},$$

を得る. □

Theorem 3.1 を証明するには, 次の補題により,  $f = \nabla \cdot F$ ,  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^9$  のときに,

$$\|\nabla u\|_{q, \mathbb{R}^3} \leq C \|F\|_{q, \mathbb{R}^3}, \quad (3.3)$$

を示せばよい.

**Lemma 3.1** (Kozono and Sohr [15, Lemma 2.2, Corollary 2.3])  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) を任意の領域とし,  $1 < q < \infty$  とする. 任意の  $g \in \widehat{W}^{-1,q}(\Omega)$  に対して,  $G \in L^q(\Omega)^n$  が存在して,

$$\nabla \cdot G = g, \quad \|G\|_{q, \Omega} \leq C \|g\|_{-1, q, \Omega}$$

が成り立つ. 従って, 空間  $\{\nabla \cdot G; G \in C_0^\infty(\Omega)^n\}$  は,  $\widehat{W}^{-1,q}(\Omega)$  の中で稠密である.

そこで, 作用素

$$TF(x) = \nabla u(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x \nabla_y \Gamma(x, y) : F(y) dy \quad (3.4)$$

を調べる. ただし,

$$(\nabla_y \Gamma(x, y) : F(y))_\ell = \sum_{1 \leq \mu, \nu \leq 3} \partial_{y_\nu} \Gamma_{\ell\mu}(x, y) F_{\mu\nu}(y) \quad (1 \leq \ell \leq 3).$$

Proposition 3.1 にもかかわらず,  $L^2$  評価は,

$$(\widehat{TF})(\xi) = -\xi \otimes \int_0^\infty O(t)^T e^{-|\xi|^2 t} (O(t)\xi) \cdot \widehat{F}(O(t)\xi) dt$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \|TF\|_{2, \mathbb{R}^3}^2 &= \|\widehat{TF}\|_{2, \mathbb{R}^3}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 \left\{ \int_0^\infty e^{-|\xi|^2 t} |\widehat{F}(O(t)\xi)| dt \right\}^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^\infty e^{-|\xi|^2 t} |\widehat{F}(O(t)\xi)|^2 dt d\xi \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t} |\widehat{F}(\xi)|^2 d\xi dt = \|\widehat{F}\|_{2, \mathbb{R}^3}^2 = \|F\|_{2, \mathbb{R}^3}^2 \end{aligned}$$

となり, 容易である.

さて,  $F = (F_{\mu\nu})_{1 \leq \mu, \nu \leq 3}$  に対して, (3.4) の各成分

$$TF = (T^{(\ell, m)} F)_{1 \leq \ell, m \leq 3}$$

は,

$$\begin{aligned} T^{(\ell, m)} F(x) &= \partial_{x_m} u_\ell(x) \\ &= \sum_{\mu, \nu, k} \int_0^\infty O(t)_{\ell\mu}^T O(t)_{km} (H_{k\nu}^t * F_{\mu\nu})(O(t)x) \frac{dt}{t}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

のようになる. ただし,  $H = (H_{k\nu})_{1 \leq k, \nu \leq 3}$  は  $E$  のヘッセ行列, すなわち

$$H_{k\nu}(x) = \partial_{x_\nu} \partial_{x_k} E(x), \quad H_{k\nu}^t(x) = t^{-3/2} H_{k\nu}(x/\sqrt{t}). \quad (3.6)$$

また, 作用素  $T$  の adjoint の各成分

$$T^* G = (T^{*(\mu, \nu)} G)_{1 \leq \mu, \nu \leq 3}$$

については,  $G = (G_{\ell m})_{1 \leq \ell, m \leq 3}$  に対して,

$$T^{*(\mu, \nu)} G(y) = \sum_{k, \ell, m} \int_0^\infty O(t)_{\ell \mu}^T O(t)_{km} \int_{\mathbb{R}^3} H_{k\nu}^t(O(t)x - y) G_{\ell m}(x) dx \frac{dt}{t}, \quad (3.7)$$

となるが, 作用素  $T$  と平行な議論が可能である.

まず,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\eta}_j(\xi) = 1 \quad (\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

を Littlewood-Paley 2 進分解とする.  $\beta \in C^\infty((0, \infty); [0, 1])$  は区間  $(0, 1]$  上で  $\beta \equiv 1$ , 区間  $[2, \infty)$  上で  $\beta \equiv 0$  をみたすものとし, 各  $j \in \mathbb{Z}$  に対して関数  $\eta_j(x)$  を  $\widehat{\eta}_j(\xi) = \beta(2^{-j}|\xi|) - \beta(2^{-j+1}|\xi|)$  により定めるとよい. このとき,

$$\text{supp } \widehat{\eta}_j \subset \{\xi; 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\} \quad (3.8)$$

と上記の分解が成り立つ. (3.6) の  $H$  を,

$$H_{k\nu} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H_{k\nu, j}, \quad H_{k\nu, j} = (2\pi)^{-3/2} \eta_j * H_{k\nu} \quad (\widehat{H_{k\nu, j}} = \widehat{\eta}_j \widehat{H_{k\nu}})$$

のように分解する. 次の補題は初等的であるが, 基本的な役割を果たす.

**Lemma 3.2**  $\psi(x) = (1 + |x|^2)^{-2}$  とおくと,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  および  $1 \leq k, \nu \leq 3$  に依らない定数  $C > 0$  があって,

$$|H_{k\nu, j}(x)| \leq C 2^{-2|j|} \psi^{2^{-2j}}(x). \quad (3.9)$$

ただし,  $\psi^t(x) = t^{-3/2} \psi(x/\sqrt{t})$ .

(3.5) および (3.7) において,  $H$  を  $H_j = (H_{k\nu, j})_{1 \leq k, \nu \leq 3}$  に取り替えることにより, 作用素  $T$  および  $T^*$  を分解する:

$$T_j = \left( T_j^{(\ell, m)} \right)_{1 \leq \ell, m \leq 3}, \quad T_j^* = \left( T_j^{*(\mu, \nu)} \right)_{1 \leq \mu, \nu \leq 3},$$

ここに,

$$T_j^{(\ell, m)} F(x) = \sum_{\mu, \nu, k} \int_0^\infty O(t)_{\ell \mu}^T O(t)_{km} (H_{k\nu, j}^t * F_{\mu\nu})(O(t)x) \frac{dt}{t}, \quad (3.10)$$

$$T_j^{*(\mu,\nu)}G(y) = \sum_{k,\ell,m} \int_0^\infty O(t)_{\ell\mu}^T O(t)_{km} \int_{\mathbb{R}^3} H_{k\nu,j}^t(O(t)x-y) G_{\ell m}(x) dx \frac{dt}{t}. \quad (3.11)$$

ただし,  $H_{k\nu,j}^t(x) = t^{-3/2} H_{k\nu,j}(x/\sqrt{t})$ . すなわち,

$$\widehat{H_{k\nu,j}^t}(\xi) = \widehat{H_{k\nu,j}}(\sqrt{t}\xi) = \widehat{\eta}_j(\sqrt{t}\xi) \widehat{H_{k\nu}}(\sqrt{t}\xi),$$

であるので, (3.8) より,

$$\text{supp } \widehat{H_{k\nu,j}^t} \subset \left\{ \xi; \frac{2^{j-1}}{\sqrt{t}} \leq |\xi| \leq \frac{2^{j+1}}{\sqrt{t}} \right\}. \quad (3.12)$$

(3.10) の  $T_j^{(\ell,m)}F$ , および (3.11) の  $T_j^{*(\mu,\nu)}G$  を評価するために, 次のような Littlewood-Paley の square function

$$Sv(x) = \left\{ \int_0^\infty |(\phi^s * v)(x)|^2 \frac{ds}{s} \right\}^{1/2}$$

を用いる. ただし,  $\{\phi^s\}_{s>0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^3)$  は,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi^s(x) dx = 0; \quad \int_0^\infty \widehat{\phi}^s(\xi)^2 \frac{ds}{s} = 1 \quad (\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \quad (3.13)$$

および

$$\text{supp } \widehat{\phi}^s \subset \left\{ \xi; \frac{1}{2\sqrt{s}} < |\xi| < \frac{2}{\sqrt{s}} \right\} \quad (3.14)$$

をみたす球対称関数族である.  $\gamma \in C_0^\infty(1/2, 2)$  を

$$\int_{1/2}^2 \gamma(\sigma)^2 \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{2}$$

が満たされるように取り,  $\phi(x)$  を  $\widehat{\phi}(\xi) = \gamma(|\xi|)$  により定め,  $s > 0$  に対して,

$$\phi^s(x) = s^{-3/2} \phi(x/\sqrt{s}) \quad \left( \widehat{\phi}^s(\xi) = \gamma(\sqrt{s}|\xi|) \right)$$

とおけばよい.

さて,  $\|S \cdot\|_{q,\mathbb{R}^3}$  は  $\|\cdot\|_{q,\mathbb{R}^3}$  と同値なノルムとなる [22, Chapter I, 8.23] ( $\|Sv\|_{q,\mathbb{R}^3} \leq C\|v\|_{q,\mathbb{R}^3}$  は (3.13) の最初の条件だけから成り立つが, 逆の不等式  $\|v\|_{q,\mathbb{R}^3} \leq C\|Sv\|_{q,\mathbb{R}^3}$  は (3.13) の後の条件も用いて示される). 従って,

$$\|T_j^{(\ell,m)} F\|_{q,\mathbb{R}^3}^2 \leq C \|ST_j^{(\ell,m)} F\|_{q,\mathbb{R}^3}^2 = C \|(ST_j^{(\ell,m)} F)^2\|_{q/2,\mathbb{R}^3}. \quad (3.15)$$

以下,  $1 < q/2 < \infty$  を仮定する.  $w \in L^{q/(q-2)}(\mathbb{R}^3)$  に対して,

$$\langle (ST_j^{(\ell,m)} F)^2, w \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^3} w(x) \int_0^\infty |(\phi^s * T_j^{(\ell,m)} F)(x)|^2 \frac{ds}{s} dx \quad (3.16)$$

を評価しよう. (3.10) を代入すると, まず (3.12) と (3.14) から,

$$I(s, j) = [2^{2j-4}s, 2^{2j+4}s]$$

とおくとき,  $t \notin I(s, j)$  に対して  $\widehat{\phi^s}(\xi) \widehat{H_{k\nu,j}^t}(\xi) \equiv 0$  であるので,  $\phi^s$  が球対称であることにも注意して,

$$\begin{aligned} & (\phi^s * T_j^{(\ell,m)} F)(x) \\ &= \sum_{\mu,\nu,k} \int_{I(s,j)} O(t)_{\ell\mu}^T O(t)_{km} (\phi^s * H_{k\nu,j}^t * F_{\mu\nu})(O(t)x) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

となり, Schwarz の不等式を 2 度用いると,

$$\begin{aligned} & |(\phi^s * T_j^{(\ell,m)} F)(x)|^2 \\ &\leq C \sum_{\mu,\nu,k} \int_{I(s,j)} \frac{dt}{t} \int_{I(s,j)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |H_{k\nu,j}^t(O(t)x - y)| |(\phi^s * F_{\mu\nu})(y)| dy \right\}^2 \frac{dt}{t} \\ &\leq 8(\log 2) C \sum_{\mu,\nu,k} \|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3} \int_{I(s,j)} (|H_{k\nu,j}^t| * |\phi^s * F_{\mu\nu}|^2)(O(t)x) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

これより, (3.16) は,

$$\begin{aligned} & |\langle (ST_j^{(\ell,m)} F)^2, w \rangle| \\ &\leq C \sum_{\mu,\nu,k} \|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \int_{I(s,j)} \int_{\mathbb{R}^3} |w(O(t)^T x)| (|H_{k\nu,j}^t| * |\phi^s * F_{\mu\nu}|^2)(x) dx \frac{dt}{t} \frac{ds}{s} \\ &= C \sum_{\mu,\nu,k} \|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} |(\phi^s * F_{\mu\nu})(x)|^2 \\ &\quad \int_{I(s,j)} \left( |\widetilde{H_{k\nu,j}^t}| * |w(O(t)^T \cdot)| \right) (x) \frac{dt}{t} dx \frac{ds}{s} \end{aligned}$$



のように評価される. ただし,  $\widetilde{H_{k\nu,j}^t}$  は  $H_{k\nu,j}^t$  の reflection, すなわち,  $\widetilde{H_{k\nu,j}^t}(x) = H_{k\nu,j}^t(-x)$  である. ここで,

$$M_j^{(k,\nu)} w(x) = \sup_{r>0} \int_{2^{-4r}}^{2^{4r}} \left( |\widetilde{H_{k\nu,j}^t} * |w(O(t)^T \cdot)| \right) (x) \frac{dt}{t} \quad (3.17)$$

とおくと,

$$|\langle (ST_j^{(\ell,m)} F)^2, w \rangle| \leq C \sum_{\mu,\nu,k} \|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} M_j^{(k,\nu)} w(x) SF_{\mu\nu}(x)^2 dx. \quad (3.18)$$

同様に, adjoint に対しても,

$$|\langle (ST_j^{*(\mu,\nu)} G)^2, w \rangle| \leq C \sum_{k,\ell,m} \|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}_j^{(k,\nu)} w(y) SG_{\ell m}(y)^2 dy. \quad (3.19)$$

ただし,

$$\mathcal{M}_j^{(k,\nu)} w(y) = \sup_{r>0} \int_{2^{-4r}}^{2^{4r}} (|H_{k\nu,j}^t * |w||) (O(t)y) \frac{dt}{t}. \quad (3.20)$$

評価を続けるには,  $j \rightarrow \pm\infty$  での  $M_j^{(k,\nu)} w$ ,  $\mathcal{M}_j^{(k,\nu)} w$  および  $\|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3}$  の挙動を調べないといけない. そのために, Lemma 3.2 および Hardy-Littlewood の maximal function

$$Mg(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |g(y)| dy \quad (3.21)$$

に対する  $L^p$  有界性の以下のような variant を用いる.

**Lemma 3.3**  $1 < p \leq \infty$ ,  $I = (0, 2\pi)$  とする. 1次元の (3.21) に対して, 定数  $C = C(p) > 0$  が存在して,

$$\|Mg\|_{p,I} \leq C \|g\|_{p,I}$$

が任意の  $\mathbb{R}$  上の  $2\pi$ -周期関数  $g \in L^p(I)$  に対して成り立つ.

**Proposition 3.2**  $1 < p < \infty$  とするとき,  $j \in \mathbb{Z}$  と  $1 \leq k, \nu \leq 3$  に依らない定数  $C = C(p) > 0$  が存在して,

$$\|M_j^{(k,\nu)} w\|_{p,\mathbb{R}^3} \leq C 2^{-2|j|} \|w\|_{p,\mathbb{R}^3}, \quad \|\mathcal{M}_j^{(k,\nu)} w\|_{p,\mathbb{R}^3} \leq C 2^{-2|j|} \|w\|_{p,\mathbb{R}^3}.$$

*Proof.* reflection  $\widetilde{H_{k\nu,j}}(x)$  も (3.9) を満たすことに注意.  $2^{-4}r \leq t \leq 2^4r$  に対して  $\psi^{2^{-2j}t}(x) \leq C\psi^{2^{-2j}r}(x)$  より,

$$\begin{aligned} 0 \leq M_j^{(k,\nu)} w(x) &\leq C2^{-2|j|} \sup_{r>0} \int_{2^{-4}r}^{2^4r} \int_{\mathbb{R}^3} \psi^{2^{-2j}t}(x-y) |w(O(t)^T y)| dy \frac{dt}{t} \\ &\leq C2^{-2|j|} \sup_{r>0} \int_{\mathbb{R}^3} \psi^{2^{-2j}r}(x-y) \int_{2^{-4}r}^{2^4r} |w(O(t)^T y)| \frac{dt}{t} dy. \end{aligned}$$

ここで,

$$Rw(x) = \sup_{r>0} \int_{2^{-4}r}^{2^4r} |w(O(t)^T x)| \frac{dt}{t} \quad (3.22)$$

とおく. これと maximal function (3.21) を用いると,

$$\begin{aligned} M_j^{(k,\nu)} w(x) &\leq C2^{-2|j|} \sup_{t>0} (\psi^t * Rw)(x) \\ &\leq C2^{-2|j|} (MRw)(x) \int_{\mathbb{R}^3} \psi(y) dy \end{aligned}$$

が成り立つ ([22, Chapter II, 2.1]). maximal operator  $M$  の  $L^p$  有界性 ([21, Chapter I, 1.3]) より,  $Rw \in L^p(\mathbb{R}^3)$  である限り,

$$\|M_j^{(k,\nu)} w\|_{p,\mathbb{R}^3} \leq C2^{-2|j|} \|Rw\|_{p,\mathbb{R}^3}.$$

あとは,  $R$  の  $L^p$  有界性を示せばよい. 円筒座標  $x_1 = \rho \cos \theta$ ,  $x_2 = \rho \sin \theta$ ,  $x_3 = z$  を用いて,  $w_{(\rho,z)}(\theta) = w(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$  とおくと,

$$Rw(x) = \sup_{r>0} \int_{2^{-4}r}^{2^4r} |w_{(\rho,z)}(\theta - t)| \frac{dt}{t} \leq 2^9 (Mw_{(\rho,z)})(\theta).$$

Lemma 3.3 より,  $\|Mw_{(\rho,z)}\|_{p,I} \leq C\|w_{(\rho,z)}\|_{p,I}$  が成り立つので,

$$\begin{aligned} \|Rw\|_{p,\mathbb{R}^3}^p &\leq C \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \rho \int_0^{2\pi} (Mw_{(\rho,z)}(\theta))^p d\theta d\rho dz \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \rho \int_0^{2\pi} w_{(\rho,z)}(\theta)^p d\theta d\rho dz = C\|w\|_{p,\mathbb{R}^3}^p \end{aligned}$$

を得る. (3.22) の代わりに

$$Rw(x) = \sup_{r>0} \int_{2^{-4}r}^{2^4r} |w(O(t)x)| \frac{dt}{t}$$

を用いれば,  $\mathcal{M}_j^{(k,\nu)}$  の評価も同様に示される. □

*Proof of Theorem 3.1.* (3.9) から従う

$$\|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3} \leq C2^{-2|j|} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) dx$$

と Proposition 3.2 より, (3.18) から,

$$\begin{aligned} |\langle (ST_j^{(\ell,m)} F)^2, w \rangle| &\leq C \sum_{\mu,\nu,k} \|H_{k\nu,j}\|_{1,\mathbb{R}^3} \|M_j^{(k,\nu)} w\|_{q/(q-2),\mathbb{R}^3} \|SF_{\mu\nu}\|_{q,\mathbb{R}^3}^2 \\ &\leq C (2^{-2|j|})^2 \|w\|_{q/(q-2),\mathbb{R}^3} \sum_{\mu,\nu} \|F_{\mu\nu}\|_{q,\mathbb{R}^3}^2 \end{aligned}$$

が任意の  $w \in L^{q/(q-2)}(\mathbb{R}^3)$  に対して成り立つ. duality と (3.15) により,  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^9$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  および  $1 \leq \ell, m \leq 3$  に依らない  $C > 0$  が存在して,

$$\|T_j^{(\ell,m)} F\|_{q,\mathbb{R}^3} \leq C2^{-2|j|} \|F\|_{q,\mathbb{R}^3}. \quad (3.23)$$

従って,  $2 < q < \infty$  ならば,

$$T = (T^{(\ell,m)})_{1 \leq \ell, m \leq 3}, \quad T^{(\ell,m)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_j^{(\ell,m)}$$

は  $L^q(\mathbb{R}^3)^9$  上の有界作用素として well-defined である.  $1 < q < 2$  のときは, (3.7) の adjoint  $T^*$  が  $L^{q/(q-1)}$  有界であることから従う.

一般的な  $f \in \widehat{W}^{-1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  に対しては, Lemma 3.1 を使って,

$$\nabla \cdot F = f, \quad \|F\|_{q,\mathbb{R}^3} \leq C \|f\|_{-1,q,\mathbb{R}^3} \quad (3.24)$$

となる  $F \in L^q(\mathbb{R}^3)^9$  を取り, これを  $F_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^9$  によって  $\|F_k - F\|_{q,\mathbb{R}^3} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) のように近似する.  $f = \nabla \cdot F_k$  に対して, (2.8) により与えられる解を  $u_k$  とする. 各  $k$  と  $m \in \mathbb{N}$  に対して, 定数ベクトル  $b_k^{(m)} \in \mathbb{R}^3$  を,

$$\int_{B_m} (u_k(x) + b_k^{(m)}) dx = 0$$

を満たすように取ると, Poincaré の不等式と (3.3) により,

$$\|u_k + b_k^{(m)}\|_{q,B_m} \leq C_m \|\nabla u_k\|_{q,B_m} \leq C_m \|\nabla u_k\|_{q,\mathbb{R}^3} \leq C_m \|F_k\|_{q,\mathbb{R}^3}$$

となる. これより,  $u^{(m)} \in W^{1,q}(B_m)^3$  と  $V \in L^q(\mathbb{R}^3)^9$  が存在して,

$$\|u_k + b_k^{(m)} - u^{(m)}\|_{q,B_m} \rightarrow 0, \quad \|\nabla u_k - V\|_{q,\mathbb{R}^3} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

となるが,  $\nabla u^{(m)}(x) = V(x)$  (a.a.  $x \in B_m$ ) である. まず,

$$\tilde{u} = u^{(1)} \quad \text{on } B_1; \quad b_k = b_k^{(1)}$$

とおく. 次に,  $m = 2$  の場合を考えると,  $\nabla u^{(2)}(x) = V(x) = \nabla u^{(1)}(x) = \nabla \tilde{u}(x)$  (a.a.  $x \in B_1 \subset B_2$ ) より, 差  $u^{(2)}(x) - \tilde{u}(x) =: a$  は定数ベクトルで,

$$\begin{aligned} |B_1|^{1/q} |b_k^{(2)} - b_k - a| &= \|b_k^{(2)} - b_k - a\|_{q, B_1} \\ &\leq \|u_k + b_k - \tilde{u}\|_{q, B_1} + \|u_k + b_k^{(2)} - u^{(2)}\|_{q, B_2} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.25)$$

そこで,  $\tilde{u}$  を

$$\tilde{u} = u^{(2)} - a \quad \text{on } B_2$$

のように拡張する. このとき, (3.25) より,  $k \rightarrow \infty$  のとき,

$$\|u_k + b_k - \tilde{u}\|_{q, B_2} \leq \|u_k + b_k^{(2)} - u^{(2)}\|_{q, B_2} + |B_2|^{1/q} |b_k^{(2)} - b_k - a| \rightarrow 0.$$

$m = 3, 4, \dots$  に対しても, この手続きを繰り返す; induction により, 関数  $\tilde{u} \in \widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  が存在して, すべての  $m \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\|u_k + b_k - \tilde{u}\|_{q, B_m} + \|\nabla u_k - \nabla \tilde{u}\|_{q, \mathbb{R}^3} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.26)$$

(1.1) の作用素  $L$  を用いて書くと, (3.26) と  $Lu_k = \nabla \cdot F_k$  から,  $k \rightarrow \infty$  のとき,

$$Lb_k = \omega \wedge b_k = L(u_k + b_k) - \nabla \cdot F_k \rightarrow L\tilde{u} - \nabla \cdot F \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3.$$

しかしそのとき,  $\omega \wedge b_k \rightarrow \omega \wedge b = Lb$  となる定数ベクトル  $b \in \mathbb{R}^3$  があるので,

$$L(\tilde{u} - b) = \nabla \cdot F \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3,$$

すなわち  $u = \tilde{u} - b$  が求める解であり, (3.26) から  $\|\nabla u_k - \nabla u\|_{q, \mathbb{R}^3} \rightarrow 0$  であるので, この解  $u$  に対しても評価 (3.3) が成立する. このことと (3.24) を併せて, 評価 (3.2) を得る.

一意性を示そう. adjoint の問題

$$L^*v \equiv -\Delta v + (\omega \wedge x) \cdot \nabla v - \omega \wedge v = \nabla \cdot F \quad (3.27)$$

を  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^9$  に対して考えると,

$$v(x) = \int_0^\infty O(t) (e^{t\Delta} \nabla \cdot F) (O(t)^T x) dt$$

が解である. (2.8) に対するのと同じ議論により, 任意の  $r \in (1, \infty)$  に対して  $v \in \widehat{W}^{1,r}(\mathbb{R}^3)^3$  であり,  $\|\nabla v\|_{r,\mathbb{R}^3} \leq C\|F\|_{r,\mathbb{R}^3}$  が成り立つ. さて,  $u \in \widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  を  $Lu = 0$  in  $\widehat{W}^{-1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  の弱解とする.  $v$  をそのテスト関数として取ると,

$$\langle Lu, v \rangle = 0.$$

同様に,  $u$  を (3.27) in  $\widehat{W}^{-1,q/(q-1)}(\mathbb{R}^3)^3$  のテスト関数として取ると,

$$\langle u, L^*v \rangle = \langle u, \nabla \cdot F \rangle.$$

これらより,  $\langle u, \nabla \cdot F \rangle = 0$  を得る.  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^9$  は任意より, Lemma 3.1 から,  $u = 0$  in  $\widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  を得る. すなわち,  $u$  は定数ベクトルであるが,  $\omega \wedge u = 0$  より,  $\omega$  の定数倍でなくてはならない.  $\square$

次の補題も用いて, Theorem 2.1 の証明を完成させる.

**Lemma 3.4**  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  は,

$$-\Delta v - (\omega \wedge x) \cdot \nabla v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

の解とすると,  $\text{supp } \hat{v} \subset \{0\}$ .

*Proof of Theorem 2.1. 等式*

$$\nabla \cdot [(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u] = (\omega \wedge x) \cdot \nabla(\nabla \cdot u) = \nabla \cdot [(\omega \wedge x) \nabla \cdot u]$$

より, (2.5) から

$$p = -\nabla \cdot (-\Delta)^{-1}[f + \nabla g + (\omega \wedge x)g]$$

を得るが,  $(-\Delta)^{-1} : \widehat{W}^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)$  は有界作用素であるから,

$$\|p\|_{q,\mathbb{R}^3} \leq C\|f + \nabla g + (\omega \wedge x)g\|_{-1,q,\mathbb{R}^3}. \quad (3.28)$$

これより,

$$\|f - \nabla p\|_{-1,q,\mathbb{R}^3} \leq C(\|f\|_{-1,q,\mathbb{R}^3} + \|\nabla g + (\omega \wedge x)g\|_{-1,q,\mathbb{R}^3}). \quad (3.29)$$

Theorem 3.1 により,  $Lu = f - \nabla p$  の解  $u \in \widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3)^3$  が得られるが,

$$(\Delta + (\omega \wedge x) \cdot \nabla)(\nabla \cdot u - g) = 0$$

より, Lemma 3.4 から  $\nabla \cdot u = g$  in  $L^q(\mathbb{R}^3)$  もわかる. 評価 (3.2), (3.29) および (3.28) を併せると, (2.6) を得る.  $\square$

## 4 外部問題

Theorem 2.2 を証明するには, 全空間に対する Theorem 2.1 と 有界領域に対する次の補題を組み合わせる. 有界領域上では,  $(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u$  を右辺に回せばよいので, 通常の Stokes 方程式に対する結果で間に合う.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  を滑らかな境界  $\partial\Omega$  をもつ有界領域とし, 非同次発散条件を伴う問題

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = g \quad \text{in } \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.1)$$

を考える.

**Lemma 4.1** (Cattabriga [3], Solonnikov [20], Kozono and Sohr [15])  $\Omega$  は上記のとおりとし,  $1 < q < \infty$  とする. また,

$$f \in W^{-1,q}(\Omega)^3, \quad g \in L^q(\Omega), \quad \int_{\Omega} g(x) dx = 0$$

を仮定する. 問題 (4.1) の  $L^q$  評価

$$\|\nabla u\|_{q,\Omega} + \|p - \bar{p}\|_{q,\Omega} \leq C (\|f\|_{-1,q,\Omega} + \|g\|_{q,\Omega}) \quad (4.2)$$

を満たす弱解  $\{u, p\} \in W_0^{1,q}(\Omega)^3 \times L^q(\Omega)$  が存在し,  $p$  に対する定数の違いを除いて一意である. ただし,  $\bar{p} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p(x) dx$ .

まず, a priori 評価の第 1 段として, 次が示される.

**Lemma 4.2**  $3/2 < q < \infty$  とする.

$$\{u, p\} \in \widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$$

を  $f \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^3$  に対する問題 (2.3) の弱解とする.  $\rho > \rho_0 > 0$  を  $\mathbb{R}^3 \setminus D \subset B_{\rho_0}$  となるように固定し, 関数  $\psi \in C_0^\infty(B_\rho; [0, 1])$  を  $B_{\rho_0}$  上で  $\psi = 1$  となるように固定する. このとき,  $C > 0$  が存在して,

$$\begin{aligned} & \|\nabla u\|_q + \|p\|_q + \|(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u\|_{-1,q} \\ & \leq C \left( \|f\|_{-1,q} + \|u\|_{q,D_\rho} + \|p\|_{-1,q,D_\rho} + \left| \int_{D_\rho} \psi(x) p(x) dx \right| \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

ただし,  $D_\rho = D \cap B_\rho$ .

(4.3) の右辺第 2 項以下には, cut-off による低階の剰余が残っているが, 後の Proposition 4.2 において,  $q < 3$  のときにこれを取り除く.

次に,  $f$  が  $\widehat{W}^{-1,q}(D)^3$  の稠密部分空間 (Lemma 3.1 を見よ) に属する良い関数の場合に, (2.3) およびその adjoint の問題

$$\begin{cases} -\Delta v + (\omega \wedge x) \cdot \nabla v - \omega \wedge v - \nabla \pi = f & \text{in } D, \\ -\nabla \cdot v = 0 & \text{in } D, \\ v = 0 & \text{on } \partial D, \end{cases} \quad (4.4)$$

の弱解の存在とクラスを調べる.

**Lemma 4.3**  $F \in C_0^\infty(D)^9$  とする.  $f = \nabla \cdot F$  に対する問題 (2.3) は

$$u \in \widehat{W}_0^{1,r}(D)^3, \quad p \in L^r(D) \quad \text{for } 3/2 < \forall r < \infty \quad (4.5)$$

なる弱解  $\{u, p\}$  をもつ. 同じことが, (4.4) に対しても成り立つ.

まず, 各  $D_R = D \cap B_R$  上において, Lax-Milgram を用いて  $L^2$  で解をつくるが, a priori 評価  $\|\nabla u_R\|_2 \leq \|F\|_2$  があるので,

$$u \in \widehat{W}_0^{1,2}(D)^3, \quad p \in L_{loc}^2(\overline{D})$$

なる (2.3) の超関数解が得られる (部分列に沿って  $R \rightarrow \infty$  での弱極限として  $u$  をつくり, さらに de Rham により  $p$  を得る). この解を cut-off 関数により, 全空間の解と有界領域の解に分けて, Lemma 4.2 の証明と同様な計算を 2 回繰り返すことにより, クラス (4.5) が示される.

上の補題の系として, 以下のようなクラスでの解の一意性が成り立つ.

**Proposition 4.1** (Uniqueness)  $1 < q < 3$  とする.

$$\{u, p\} \in \widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$$

を  $f = 0$  に対する問題 (2.3) の弱解とする. このとき,  $\{u, p\} = \{0, 0\}$ .

Lemma 4.2 と Proposition 4.1 から, 次の a priori 評価が示される. これと Lemma 4.3 を併せると, Lemma 3.1 を用いた近似の手続きにより, 一般な  $f \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^3$  に対する弱解の存在と評価, すなわち Theorem 2.2 が直ちに示される.

**Proposition 4.2** (A priori estimate)  $3/2 < q < 3$  とする.

$$\{u, p\} \in \widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$$

を  $f \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^3$  に対する問題 (2.3) の弱解とする. このとき,  $L^q$  評価 (2.7) が成り立つ.

*Proof.* 評価 (2.7) が成り立たないとする。このとき,

$$\|\nabla u_k\|_q + \|p_k\|_q + \|(\omega \wedge x) \cdot \nabla u_k - \omega \wedge u_k\|_{-1,q} = 1$$

および

$$\|f_k\|_{-1,q} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

となる  $f_k \in \widehat{W}^{-1,q}(D)^3$  と対応する解  $\{u_k, p_k\} \in \widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$  を取れる。このとき,

$$\|u_k\|_{1,q,D_\rho} \leq \|\nabla u_k\|_{q,D_\rho} + C\|u_k\|_{q^*,D_\rho} \leq C\|\nabla u_k\|_q \leq C$$

と  $\|p_k\|_{q,D_\rho} \leq \|p_k\|_q \leq 1$  が成り立つ。ただし,  $1/q_* = 1/q - 1/3$ ,  $D_\rho = D \cap B_\rho$  であり,  $\|\cdot\|_{1,q,D_\rho}$  は  $W^{1,q}(D_\rho)$  のノルムである。部分列 (再び  $\{u_k, p_k\}$  であらわす) を取り出して,  $W^{1,q}(D_\rho) \times L^q(D_\rho)$  で弱収束, さらに Rellich により,  $L^q(D_\rho) \times W^{-1,q}(D_\rho)$  で強収束するようにできる。(4.3) より,  $\{u_k, p_k\}$  と  $\{(\omega \wedge x) \cdot \nabla u_k - \omega \wedge u_k\}$  は, それぞれ  $\widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$  と  $\widehat{W}^{-1,q}(D)^3$  において Cauchy 列であるから,  $k \rightarrow \infty$  のときに,

$$\begin{cases} \|\nabla u_k - \nabla u\|_q + \|p_k - p\|_q \rightarrow 0, \\ \|[(\omega \wedge x) \cdot \nabla u_k - \omega \wedge u_k] - [(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u]\|_{-1,q} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

となる  $\{u, p\} \in \widehat{W}_0^{1,q}(D)^3 \times L^q(D)$  が存在するが, この  $\{u, p\}$  は  $f = 0$  に対する (2.3) の弱解である。  $q < 3$  なので, Proposition 4.1 より  $\{u, p\} = \{0, 0\}$  であるが, これは

$$\|\nabla u\|_q + \|p\|_q + \|(\omega \wedge x) \cdot \nabla u - \omega \wedge u\|_{-1,q} = 1$$

に反する。 □

## References

- [1] W. Borchers, *Zur Stabilität und Faktorisierungsmethode für die Navier-Stokes Gleichungen inkompressibler viskoser Flüssigkeiten*, Habilitationsschrift, Universität Paderborn, 1992.
- [2] W. Borchers and T. Miyakawa, Algebraic  $L^2$  decay for Navier-Stokes flows in exterior domains, *Acta Math.* **165** (1990), 189–227.
- [3] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, *Rend. Math. Sem. Univ. Padova* **31** (1961), 308–340.
- [4] Z. M. Chen and T. Miyakawa, Decay properties of weak solutions to a perturbed Navier-Stokes system in  $\mathbb{R}^n$ , *Adv. Math. Sci. Appl.* **7** (1997), 741–770.



- [5] R. Farwig, An  $L^q$ -analysis of viscous fluid flow past a rotating obstacle, *Tôhoku Math. J.* (to appear).
- [6] R. Farwig, T. Hishida and D. Müller,  $L^q$ -theory of a singular "winding" integral operator arising from fluid dynamics, *Pacific. J. Math.* **215** (2004), 297–312.
- [7] G. P. Galdi, On the motion of the rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications, *Handbook of Mathematical Fluid Mechanics*, 653–791, Elsevier Science, Amsterdam, 2002.
- [8] G. P. Galdi, Steady flow of a Navier-Stokes fluid around a rotating obstacle, *J. Elasticity* **71** (2003), 1–31.
- [9] G. P. Galdi and A. Silvestre, Strong solutions to the Navier-Stokes equations around a rotating obstacle, preprint.
- [10] G. P. Galdi and C. G. Simader, Existence, uniqueness and  $L^q$ -estimates for the Stokes problem in exterior domains, *Arch. Rational Mech. Anal.* **112** (1990), 291–318.
- [11] T. Hishida, The Stokes operator with rotation effect in exterior domains, *Analysis* **19** (1999), 51–67.
- [12] T. Hishida, An existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle, *Arch. Rational Mech. Anal.* **150** (1999), 307–348.
- [13] T. Hishida,  $L^2$  theory for the operator  $\Delta + (k \times x) \cdot \nabla$  in exterior domains, *Nihonkai Math. J.* **11** (2000), 103–135.
- [14] T. Hishida,  $L^q$  estimates of weak solutions to the stationary Stokes equations around a rotating body, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. #691.
- [15] H. Kozono and H. Sohr, New a priori estimates for the Stokes equations in exterior domains, *Indiana Univ. Math. J.* **41** (1991), 1–27.
- [16] H. Kozono and H. Sohr, On a new class of generalized solutions for the Stokes equations in exterior domains, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **19** (1992), 155–181.
- [17] H. Kozono and M. Yamazaki, Exterior problem for the stationary Navier-Stokes equations in the Lorentz space, *Math. Ann.* **310** (1998), 279–305.
- [18] Y. Shibata and M. Yamazaki, Uniform estimates in the velocity at infinity for stationary solutions to the Navier-Stokes exterior problem, preprint.
- [19] A. Silvestre, On the existence of steady flows of a Navier-Stokes liquid around a moving rigid body, *Math. Meth. Appl. Sci.* **27** (2004), 1399–1409.
- [20] V. A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations, *J. Sov. Math.* **8** (1977), 467–529.
- [21] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [22] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

# ペロンの方法 – revisited –

小池 茂昭 (埼玉大学)

## 1 序

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$  を (有界) 開集合とし、 $\phi \in C(\partial\Omega)$  を与える。 $S_\phi$  を劣調和関数  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  で、 $v \leq \phi$  ( $\partial\Omega$  上) を満たす関数の集合とする。例えば [7] (p. 24) によると

$$u(x) := \sup_{v \in S_\phi} v(x) \text{ は調和関数}$$

となることを “古典的” ペロンの方法という。([15] も参照。)

H. Ishii は、[8] において、粘性解に対してペロンの方法が広く適用できる事を示し、粘性解理論の最も基本的な存在定理を完成した。

ところで、粘性解は必ずしも連続でない関数に対して定義されるが、後述するように粘性解が連続であると、自動的にもっと高い regularity が導かれる事がある。Ishii のペロンの方法によって得られる粘性解は連続とは限らないが、「半連続粘性解に対する比較定理」が成立する場合には、その連続性は簡単に導かれた。実際、粘性解の比較定理とは

$$\text{『 粘性劣解 } u^* \leq \text{粘性優解 } v_* \text{ 』}$$

が成立する事であり、 $w$  が粘性解ならば、 $w^* \leq w_*$  となる。(ここで、 $w^*$  は上半連続包、 $w_*$  は下半連続包である。定義は [5] を参照。) 定義から  $w_* \leq w^*$  は自明なので、『 $w = w^* = w_*$ 』が得られ、 $w$  は連続になる。

しかしながら、「半連続粘性解に対する比較定理」が知られていない、もしくは成立しない方程式はいくつかある。

【例 1】 次のような方程式の 2 次の増大度を持った解を探す。

$$2u - \Delta u + |Du|^2 = 2|x|^2 \quad \text{in } \mathbf{R}^n$$

簡単な計算から、解は少なくとも次の 2 個ある。

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n + |x|^2), \\ -(n + |x|^2) \end{cases}$$

【例 2】 具体的には書き表しにくい、(線形一様楕円型でも) 係数に不連続性のある場合に “解” の非一意性が [14] で得られている。([16] も参照。)

特に、この例2を考える場合に連続でない係数(一般には、可測係数)を持った粘性解の定義が必要となるが、そのため最近、Caffarelli-Crandall-Kocan-Świąch [4] によって導入された  $L^p$  粘性解の概念を用いるべきである。しかしながら、 $L^p$  粘性解の範疇では、例1のような非線形項 “ $|Du|^2$ ” を持った方程式の場合に、小池-Świąch[12] のような複雑な証明が必要になる部分がある。(それらは[12] では触れてない箇所もあるが、[12] の技巧を使えば証明可能である。)

よって、以下述べる結果の  $L^p$  粘性解版は小池 [11] を参照していただくとして、本原稿では、通常の “Crandall-Lions 流” 粘性解に対する結果を述べる。ちなみに、以下に述べる結果は通常の粘性解に対しても新しい結果である。

本アブストラクトでは、まず “修正” ペロンの方法を提唱し、(退化も含んだ) 2階楕円型方程式の粘性解の存在定理を導く。更に、一様楕円型方程式に限って、(係数に連続性は仮定しないが) 我々のペロンの方法で構成した粘性解が比較定理を用いずに(局所ヘルダー)連続であることを示す。更に、連続性が導かれるとご利益があることを例1で示す。

最後に、半連続粘性解に対してアレクサンドロフ・ベイクルマン・プッチ (ABP と略す) の最大値原理などの基本命題を述べる。

## 2 準備

次のような完全非線形2階(楕円型)偏微分方程式を考える。(楕円性については後述する。)

$$G(x, Du, D^2u) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

但し、 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  は開集合、 $G : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbf{R}$  と  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  は既知とする。(1)において、ここでは簡単のため  $u$  変数を入れないこととする。(通常は、左辺に廻す。) ここで、 $S^n$  は  $n \times n$  実対象行列全体で、次の順序を導入する。

$$X \leq Y \quad (X, Y \in S^n) \iff \langle (X - Y)\xi, \xi \rangle \leq 0 \quad (\forall \xi \in \mathbf{R}^n)$$

以下の記号を用いる。 $r > 0$  と  $x \in \mathbf{R}^n$  に対し、

$$B_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid |x - y| < r\}, \quad Q_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| < r/2\}$$

とおき、特に  $x = 0$  の時、 $B_r = B_r(0)$ 、 $Q_r = Q_r(0)$  と書く。

更に、非斉次項は次を仮定する。

$$f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n) \quad (p > p^*) \quad (2)$$

ここで、 $p^* \in (n/2, n)$  は、 $n$  と  $\Lambda/\lambda$  にのみ依存する定数である ([6] を参照)。  $0 < \lambda \leq \Lambda$  は後で決める「一様楕円性」の定数である。

定義  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  が (1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) とは、次を満たす事とする。任意の  $\phi \in C^2(\Omega)$  と、 $u^* - \phi$  (resp.,  $u_* - \phi$ ) の局所最大点 (resp., 局所最小点)  $x \in \Omega$  で、次を満

たす。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{ess. inf}_{B_\varepsilon(x)} \{G(y, D\phi(y), D^2\phi(y)) - f(y)\} \leq 0$$

$$\left( \text{resp., } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{ess. sup}_{B_\varepsilon(x)} \{G(y, D\phi(y), D^2\phi(y)) - f(y)\} \geq 0 \right).$$

$u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  が (1) の粘性解とは、 $u$  が (1) の粘性劣解かつ、粘性優解であることとする。

【注意】(1) 上記の「局所最大点 (resp., 最小点)」は、下の  $G$  の連続性の仮定 (3) の下で、「局所“狭義”最大点 (resp., 最小点)」とできる。ついでに言えば、 $L^p$  粘性解の場合、この事実が成り立つためにすら  $G$  や  $f$  に煩わしい仮定が必要である。

(2) 通常の  $L^p$  粘性解では、 $C^2(\Omega)$  を  $W_{loc}^{2,p}(\Omega)$  の代わりに使う。ここでは、 $G$  と  $f$  に  $x$  に関しての連続性を仮定してないため上記で  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{ess. inf}$  や  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{ess. sup}$  を避ける事はできない。

しかしながら、 $f$  に連続性を仮定してないから、 $u$  の regularity は  $C^2$  を期待できず、せいぜい  $W_{loc}^{2,p}$  に粘性解が属するのが最良である (つまり、 $W_{loc}^{2,p}$  が「強解」が期待できる最良の regularity である)。更に、“テスト関数”が  $W_{loc}^{2,p}$  だから「強解」が上の意味での「粘性解」になるかどうかは自明でない。これらの事から、上の定義はあくまで以下の議論を見易くするためのものであり、全体の整合性を見るには [11] を参照してほしい。

例 1 を含めるためにも次の連続性を  $G$  に仮定する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } R > 0, \text{ に対して、次を満たす } \omega_R \in C(\mathbf{R}) \text{ が存在する。} \\ \omega_R(0) = 0, \quad |G(x, q, X) - G(x, q', X')| \leq \omega_R(|q - q'| + |X - X'|) \\ \text{for } x, q, q' \in B_R, X, X' \in S^n. \end{array} \right. \quad (3)$$

### 3 修正版ペロンの方法

まず、よく知られた「安定性の結果」を述べる。

命題 1 (cf. [5]) (2) と (3) を仮定する。  $\emptyset \neq S \subset C(\mathbf{R}^n)$  を (1) の粘性劣解の集合とする。 $u(x) := \sup_{v \in S} v(x)$  が局所有界ならば、 $u$  は (1) の粘性劣解になる。

以下、 $G$  は次の意味で退化楕円型とする。

$$X \leq Y \quad (X, Y \in S^n) \quad \implies \quad G(x, q, X) \leq G(x, q, Y) \quad (x, q \in \mathbf{R}^n) \quad (4)$$

次に古典解が粘性解になる事に注意しておく。

命題 2 (e.g. [4]) (4) を仮定する。 $u \in C^2(\Omega)$  が

$$G(x, Du(x), D^2u(x)) \leq f(x) \quad (\text{resp., } \geq 0) \quad \text{in } \Omega,$$

を満たせば、 $u$  は (1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) になる。

以降、(1) を  $\Omega \equiv \mathbf{R}^n$  で考える。

$$G(x, Du, D^2u) = f(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \quad (5)$$

我々の修正ペロンの方法による粘性解の存在定理を述べる。

定理 3 (2), (3), (4) を仮定する。(5) の粘性劣解  $\underline{u} \in C(\mathbf{R}^n)$  と粘性優解  $\bar{u} \in C(\mathbf{R}^n)$  が次を満たすとする。

$$\underline{u} \leq \bar{u} \quad \text{in } \mathbf{R}^n \quad (6)$$

$$\mathcal{S} := \left\{ v \in C(\mathbf{R}^n) \mid v \text{ は (5) の粘性劣解で } \underline{u} \leq v \leq \bar{u} \text{ in } \mathbf{R}^n \text{ を満たす} \right\}$$

とし、 $u(x) := \sup_{v \in \mathcal{S}} v(x)$  とおくと、 $u$  は (5) の粘性解となる。

【注意】命題 1 より、 $u$  が粘性優解であることを示すだけでよい。そのため Ishii[8] 同様、粘性優解でないと仮定して、 $u$  の極大性に矛盾するような  $w \in \mathcal{S}$  を構成すればよいのだが、我々の  $\mathcal{S}$  は連続関数なので多少修正が必要である。詳しくは [11] を参照せよ。

## 4 局所ヘルダー評価

この章では、 $G$  が一様楕円型である場合に局所ヘルダー連続性の評価が得られる事を示す。半連続粘性解の場合、Ishii-Lions[9] の方法は適用できないため、Caffarelli[2] の方法を採用する ([3] も参照)。

以下、一様楕円定数  $\lambda, \Lambda > 0$  を固定し、プッチ作用素を導入する。

$$\mathcal{P}^+(X) = \max\{-\text{Tr}(AX) \mid \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}, \quad \mathcal{P}^-(X) = -\mathcal{P}^+(-X) \quad (X \in S^n)$$

ここで一様楕円性とは次を意味する。

$$\mathcal{P}^-(X - Y) \leq G(x, q, X) - G(x, q, Y) \leq \mathcal{P}^+(X - Y) \quad \text{for } x, q \in \mathbf{R}^n, X, Y \in S^n. \quad (7)$$

次の仮定をしても一般性を失わない。

$$G(x, 0, O) = 0 \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \quad (8)$$

更に、(3) だけでなく  $Du$  について二次の増大度を持つことを仮定する。

$$\begin{cases} \text{For } \forall K > 0, \exists L_K > 0 \text{ such that} \\ |G(x, q, O)| \leq L_K(1 + |q|^2) \text{ for } x \in B_K, q \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (9)$$

定理 4 (2), (3), (7), (8), (9) を仮定する。(5) の粘性劣解  $\underline{u} \in C(\mathbf{R}^n)$  と粘性優解  $\bar{u} \in C(\mathbf{R}^n)$  が (6) を満たすとする。

$u$  を定理 3 で構成された (5) の粘性解とすると、任意の  $R > 0$  に対し、 $\sigma = \sigma(R) \in (0, 1)$  で  $u \in C^\sigma(B_R)$  となるものがある。

【注意】 $u$  は、定義から局所有界なので、[10] に述べた変換を粘性劣解  $u^*$  ・粘性優解  $u_*$  に行う事で、二次の増大度  $|Du|^2$  の項を消去できる。つまり、粘性劣解 ・粘性優解がそれぞれ次の方程式を粘性解の意味で満たすとしてよい。

$$\mathcal{P}^-(D^2u) \leq \hat{f}, \quad \mathcal{P}^+(D^2u) \geq \hat{f}$$

$\hat{f}$  は、概ね  $f$  の定数倍である。

局所評価なので、以降、 $R > 0$  を固定して  $Q_r(x) \subset B_R$  を満たすとする。

そこで、粘性優解に弱ハルナックの不等式から次を満たす  $\hat{q} > 0$  があることが分かる。

$$\|u_* - \mu\|_{L^{\hat{q}}(Q_r(x))} \leq C \left( \inf_{Q_{r/2}} (u_* - \mu) + r^{2-\frac{n}{p}} \right) \quad \text{if } u_* \geq \mu \text{ in } Q_r(x) \quad (10)$$

一方、粘性劣解に対して局所最大値原理を適用して、上の  $\hat{q} > 0$  に対して次が成り立つ。

$$\sup_{Q_r(x)} (u^* - \mu) \leq C \left( \|u^* - \mu\|_{L^{\hat{q}}(Q_{2r}(x))} + r^{2-\frac{n}{p}} \right) \quad \text{if } u^* \geq \mu \text{ in } Q_r(x) \quad (11)$$

を得る。

上の2式の積分項は直接は比較できないが、(11) 式を任意の  $v \in \mathcal{S}$  に対して導く事で、 $v - \mu \leq u_* - \mu$  に注意して  $\mathcal{S}$  で上限をとれば、次が導かれる。

$$\sup_{Q_r(x)} (u^* - \mu) \leq C \left( \inf_{Q_r(x)} (u_* - \mu) + r^{2-\frac{n}{p}} \right)$$

同様に、

$$\sup_{Q_r(x)} (\mu - u_*) \leq C \left( \inf_{Q_r(x)} (\mu - u^*) + r^{2-\frac{n}{p}} \right)$$

を導かれ、通常議論で次が得られ、ヘルダー連続性が導かれる。

$$\sup_{Q_r(x)} (u^* - u_*) \leq Cr^\sigma \quad (\text{for } \exists \sigma \in (0, 1))$$

## 5 応用

次の方程式を考える。

$$\alpha u - \frac{1}{2} \Delta u + \frac{1}{2} |Du|^2 = f(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n, \quad (12)$$

但し、 $\alpha > 0$  は定数。

簡単のため、次を仮定する。

$$\begin{cases} (i) & f \in C(\mathbf{R}^n), \\ (ii) & \exists C_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq f(x) \leq C_0(1 + |x|^2) \text{ in } \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (13)$$

O. Alvarez [1] によれば、(12) の非負強解  $v \in \cup_{p>n} W_{loc}^{2,p}(\mathbf{R}^n)$  は、“ $f$  に凸性があれば”一意であることが示されているが、粘性解の意味では非負を仮定しても一意性は分からない。

ここでは、定理 4 から我々の Perron の方法で構成した粘性解が上記の微分可能性を持つことを示す。

実際、(12) は、粘性劣解  $\underline{u} \equiv 0$  と粘性優解  $\bar{u} := \nu(1 + |x|^2)$  (十分大きな  $\nu > 0$  に対し) が簡単に見つかり、修正ペロンの方法で粘性解  $u$  が与えられる。更に、前章の結果によって  $u \in C(\mathbf{R}^n)$  である。

一方、 $v := e^{-u}$  は次の粘性解である事がすぐ分かる。

$$-\frac{1}{2} \Delta v = v(\alpha - f) \quad \text{in } \mathbf{R}^n.$$

すると、 $v \in W_{loc}^{2,p}(\mathbf{R}^n)$  が導かれ、 $u \in L_{loc}^\infty(\mathbf{R}^n)$  に注意すれば  $u \in W_{loc}^{2,p}(\mathbf{R}^n)$  もすぐ分かる。

## 6 付録

前章で鍵となる半連続粘性解の ABP 最大値原理・弱ハルナック不等式・局所最大値原理を述べておく。この章では、 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  は有界開集合とする。

$v : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  と  $r > 0$  に対し、上接触集合  $\Gamma_r[v, \Omega]$  を次で与える。

$$\Gamma_r[v, \Omega] := \{x \in \Omega \mid \text{次を満たす } p \in \overline{B}_r \text{ が存在する。} \lceil v(y) \leq v(x) + \langle p, y - x \rangle \text{ for } y \in \Omega \rceil \}$$

次の命題は、直接は使われていないが、命題 6・7 の証明に用いられる。

命題 5 (ABP 最大値原理 cf. [4]) (2) を仮定する。次を満たす  $C_0 > 0$  が存在する。 $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$  が

$$\mathcal{P}^-(D^2u) = f \quad \text{in } \Omega,$$

の粘性劣解ならば、

$$\max_{\overline{\Omega}} u^* \leq \max_{\partial\Omega} (u^*)^+ + C_0 \text{diam}(\Omega)^{2-\frac{n}{p}} \|f^+\|_{L^p(\Gamma_{r_0/2}[u^*, \Omega])}.$$

を満たす。但し、

$$r_0 := \max_{\overline{\Omega}} u^* - \max_{\partial\Omega} (u^*)^+ > 0$$

実際に 4 章の証明に使うのは以下の命題である。

命題 6 (弱ハルナック不等式, cf. [3]) (2) を仮定する。次を満たす  $\hat{q} = \hat{q}(\Lambda/\lambda, n) > 0$  と  $C_1 := C_1(\Lambda/\lambda, n) > 0$  が存在する。 $u : B_{2\sqrt{n}} \rightarrow [0, \infty)$  が

$$\mathcal{P}^+(D^2u) = f \quad \text{in } B_{2\sqrt{n}}$$

の粘性優解ならば次が成り立つ。

$$\|u_*\|_{L^{\hat{q}}(Q_1)} \leq C_1 \left( \inf_{Q_{1/2}} u_* + \|f^-\|_{L^p(B_{2\sqrt{n}})} \right)$$

命題 7 (局所最大値原理, cf. [3]) (2) を仮定する。任意の  $q > 0$  に対し、次を満たす  $C_2 := C_2(\Lambda/\lambda, n) > 0$  が存在する。  $u : B_{2\sqrt{n}} \rightarrow [0, \infty)$  が

$$\mathcal{P}^-(D^2u) = f \quad \text{in } Q_2$$

の粘性劣解ならば、次を満たす。

$$\sup_{Q_1} u^* \leq C_2 \left( \|(u^*)^+\|_{L^q(Q_2)} + \|f^+\|_{L^p(Q_2)} \right)$$

## 参考文献

- [1] O. ALVAREZ, A quasilinear elliptic equation in  $\mathbf{R}^N$ , *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **126** (5), (1996), 911-921.
- [2] L. A. CAFFARELLI, Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, *Ann. Math.*, **130** (1989), 189-213.
- [3] L. A. CAFFARELLI & X. CABRÉ, Fully Nonlinear Elliptic Equations, Colloquium Publications **43**, AMS, 1995.
- [4] L. A. CAFFARELLI, M. G. CRANDALL, M. KOCAN & A. ŚWIĘCH, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), 365-397.
- [5] M.G. CRANDALL, H. ISHII, AND P.-L. LIONS, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 1-67.
- [6] M. G. CRANDALL AND A. ŚWIĘCH, A note on generalized maximum principles for elliptic and parabolic PDE, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **234** (2003), 121-127.
- [7] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition, Springer-Verlag, 1983.
- [8] H. ISHII, Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 369-384.
- [9] H. ISHII AND P.-L. LIONS, Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations, *J. Differential Equations*, **83** (1990), 26-78.
- [10] S. KOIKE, A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions, *MSJ Memoirs*, **13**, Math. Soc. Japan, 2004.
- [11] S. KOIKE, Perron's method for  $L^p$ -viscosity solutions, preprint.



- [12] S. KOIKE AND A. ŚWIĘCH, Maximum principle and existence of  $L^p$ -viscosity solutions for fully nonlinear, uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms, *Nonl. Differential Equations Appl.*, **11** (4) (2004), 491-509.
- [13] P.-L. LIONS, A remark on Bony maximum principle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **88** (7), (1983), 503-508.
- [14] N. NADIRASHVILI, Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **24** (4), (1997), 537-549.
- [15] O. PERRON, Eine neue Behandlung der Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ , *Math. Z.*, **18** (1923), 42-54.
- [16] M. V. SAFONOV, Nonuniqueness for second-order elliptic equations with measurable coefficients, *SIAM J. Math. Anal.*, **30** (4), (1999), 879-895.

# 表面拡散流方程式による 3 相境界運動の定常解の 線形安定性について\*

高坂良史 (室蘭工業大学)

## §1. 序

有界領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  内で運動している 3 相境界の幾何学的時間発展モデルを考える。このモデルは H. Garcke と A Novick-Cohen [GN] によって、ある退化型移動度係数をもつ Cahn-Hilliard 方程式系から特異極限をとることによって形式的に導かれたものであり、異種境界面 (interface boundary) の運動を記述するモデルである。

今、 $t > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  対し、

[相境界  $\Gamma^i(t)$  に沿って]

$$V^i = -m^i \gamma^i \kappa_{ss}^i \quad (\text{表面拡散流方程式}), \quad (1)$$

[triple-junction  $\mathbf{p}(t)$  において]

$$\angle(\Gamma^i(t), \Gamma^j(t)) = \theta^k \quad (\text{角度条件}), \quad (2)$$

$$\gamma^1 \kappa^1 + \gamma^2 \kappa^2 + \gamma^3 \kappa^3 = 0 \quad (\text{化学ポテンシャルの連続性}), \quad (3)$$

$$m^1 \gamma^1 \kappa_s^1 = m^2 \gamma^2 \kappa_s^2 = m^3 \gamma^3 \kappa_s^3 \quad (\text{流量の平衡に関する条件}), \quad (4)$$

[ $\Gamma^i(t) \cap \partial\Omega$  において]

$$\Gamma^i \perp \partial\Omega \quad (\text{直交条件}), \quad (5)$$

$$\kappa_s^i = 0 \quad (\text{流量 } 0), \quad (6)$$

[初期条件]

$$\Gamma^i(0) = \Gamma_0^i, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0. \quad (7)$$

ここで、 $V^i$  は  $\Gamma^i(t)$  の法速度、 $\kappa^i$  は  $\Gamma^i(t)$  の曲率、 $s$  は  $\Gamma^i(t)$  に沿った弧長パラメータである。また、 $m^i$  は移動度係数に関する定数 ( $> 0$ )、 $\gamma^i$  は表面エネルギーに関する定数 ( $> 0$ ) である。さらに、 $\theta^i$  は正定数であり、*Young's law* と呼ばれる関係式

$$\frac{\gamma^1}{\sin \theta^1} = \frac{\gamma^2}{\sin \theta^2} = \frac{\gamma^3}{\sin \theta^3}$$

を満たす。(1)-(7) は  $\Gamma(t) := \bigcup_{i=1}^3 \Gamma^i(t)$  と triple-junction  $\mathbf{p}(t)$  を未知量とする。

表面拡散流方程式  $V = -\Delta_\Gamma \kappa$  ( $V$ : 法速度,  $\kappa$ : 平均曲率,  $\Delta_\Gamma$ :  $\Gamma$  の Laplace-Beltrami 作用素) は 1950 年代に W. W. Mullins [M] によって材料工学の論文の中で界面の動

---

\*この研究は H. Garcke 氏 (レゲンスブルグ大学) と伊藤一男氏 (九州大学) との共同研究である。

きを支配する方程式として提唱された幾何学的発展方程式の1つである。界面の動きを支配する幾何学的発展方程式としては平均曲率流方程式  $V = \kappa$  がよく知られているが、表面拡散流方程式と平均曲率流方程式には以下のような違いがある。

- 平均曲率流方程式：  $V = \kappa$ 
  - 逆位相境界 (anti-phase boundary) の運動や結晶粒成長 (grain growth) を記述する。
  - エネルギー汎関数の  $L^2$ -勾配流である。
  - 平均曲率 0 が定常状態。
  - Allen-Cahn 型方程式の特異極限として得られる。
- 表面拡散流方程式：  $V = -\Delta_\Gamma \kappa$ 
  - 異種境界面 (interface boundary) の運動を記述する。
  - エネルギー汎関数の  $H^{-1}$ -勾配流である。
  - $\Gamma$  で囲まれる領域の体積が時間に依らず一定 (体積保存性)。
  - 平均曲率一定が定常状態。
  - Cahn-Hilliard 方程式の特異極限として得られる。

この特徴をふまえて、モデル (1)-(7) は以下の基本性質をもつ。

[基本性質 1]

今、相境界  $\Gamma^i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) が

$$\Gamma^i(t) = \{X^i(s, t) \mid s \in [r_-^i(t), r_+^i(t)]\}$$

で表されているとする。但し、 $r_+^i(t) - r_-^i(t) = L[\Gamma^i(t)]$  で  $L[\Gamma^i(t)]$  は  $\Gamma^i(t)$  の長さを表す。ここで、(1)-(7) に対応するエネルギー汎関数  $E[\Gamma(t)]$  を次のように定義する：

$$E[\Gamma(t)] := \sum_{i=1}^3 \gamma^i L[\Gamma^i(t)].$$

このとき、方程式 (1) 及び境界条件 (3), (4), (6) 等から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[\Gamma(t)] &= \sum_{i=1}^3 \gamma^i \frac{d}{dt} L[\Gamma^i(t)] \\ &= - \sum_{i=1}^3 \gamma^i \int_{r_-^i(t)}^{r_+^i(t)} \kappa^i V^i ds \\ &= \sum_{i=1}^3 m^i (\gamma^i)^2 \int_{r_-^i(t)}^{r_+^i(t)} \kappa^i \kappa_{ss}^i ds \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[ \gamma^i \kappa^i \cdot m^i \gamma^i \kappa_s^i \right]_{s=r_-^i(t)}^{s=r_+^i(t)} - m^i (\gamma^i)^2 \int_{r_-^i(t)}^{r_+^i(t)} (\kappa_s^i)^2 ds \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^3 m^i (\gamma^i)^2 \int_{r_-^i(t)}^{r_+^i(t)} (\kappa_s^i)^2 ds \leq 0. \end{aligned}$$

したがって、エネルギー汎関数  $E[\Gamma(t)]$  は  $t$  に関して単調非増加である。

[基本性質 2]

$D_{ij}(t)$  ( $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ ) を  $\Gamma^i(t), \Gamma^j(t)$ , 及び  $\partial\Omega$  で囲まれる領域とし、 $\mu(D)$  を  $D$  の面積とする。このとき、方程式 (1) 及び境界条件 (4), (6) 等から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mu(D_{ij}(t)) &= \int_{r_-^j(t)}^{r_+^j(t)} V^j ds - \int_{r_-^i(t)}^{r_+^i(t)} V^i ds \\ &= -m^j \gamma^j \int_{r_-^j(t)}^{r_+^j(t)} \kappa_{ss}^j ds + m^i \gamma^i \int_{r_-^i(t)}^{r_+^i(t)} \kappa_{ss}^i ds \\ &= -m^j \gamma^j \left[ \kappa_s^j \right]_{s=r_-^j(t)}^{s=r_+^j(t)} + m^i \gamma^i \left[ \kappa_s^i \right]_{s=r_-^i(t)}^{s=r_+^i(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって、 $D_{ij}(t)$  の面積は  $t$  に関して一定である (面積保存性)。

以上、基本性質 1 及び 2 より、幾何学的時間発展モデル (1)-(7) は変分問題としては

『各領域  $D_{ij}$  の面積が一定であるという条件下で、triple-junction で交わる 3 つの曲線の長さを最小にする』

という問題になる。

(注 1) 曲率流方程式  $V = \kappa$  により運動が支配される 3 相境界モデルが L. Bronsard と F. Reitich [BR] によって提唱されている。このモデルの場合は面積保存性がないので、変分問題としては『triple-junction で交わる 3 つの曲線の長さを最小にする』という問題になる。

幾何学的時間発展モデル (1)-(7) に対する定常解の安定性解析に関しては [EG1], [IK1], [IK2] などの結果がある。これらの論文では定常解の非線形安定性の解析を行っているが、領域  $\Omega$  が三角形や四角形など特別な場合に限られる。またそれぞれ個別の解析をしていて統一的ではない。よって、本研究ではより一般的な有界領域  $\Omega$  に関して定常解の安定性を解析することを目的とし、まずはその足掛かりとして、非線形問題である (1)-(7) を線形化し、得られた線形化問題に対応する固有値問題を解析することによって、定常解の線形化安定性に関する結果を導出する。

(注 2) 曲率流方程式に対する 3 相境界モデルの定常解の線形化安定性に関しては [IY] の結果がある。この場合、triple-junction で交わる 3 直線が定常解となる。

## §2. 線形化問題と固有値

モデル (1)-(7) の定常解を  $\Gamma_* := \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_*^i$  で表すことにする。但し、 $\Gamma_*^i$  は円弧又は線分であり、

$$\Gamma_*^i = \{\Phi_*^i(\sigma) \mid \sigma \in [0, \ell^i], \Phi_*^i(0) = \mathbf{0}, \Phi_*^i(\ell^i) \in \partial\Omega\}$$

で表されているものとする．ここで， $\sigma$  は  $\Gamma_*^i$  に沿った弧長パラメータであり， $\ell^i$  は  $\Gamma_*^i$  の長さである．さらに，

$$\kappa_*^i : \Gamma_*^i \text{ の曲率, } h^i : \Gamma_*^i \cap \partial\Omega \text{ での } \partial\Omega \text{ の曲率}$$

とする．

今， $\Gamma^i(t)$  を  $\Gamma_*^i$  からのある種の符号付距離関数  $\rho^i(s, t)$  と  $\Gamma(t)$  の triple-junction の位置に関連する関数  $\mu^i(t)$  とで表記すると，幾何学的時間発展モデル (1)-(7) は  $(\rho^i, \mu^i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を未知関数とする 4 階放物型偏微分方程式の初期値・境界値問題となる．得られた非線形問題を定常解  $\Gamma_*$  (i.e.  $(\rho^i(\sigma, \cdot), \mu^i) \equiv (0, 0)$ ) の周りで線形化すると，以下の線形化問題を得る：

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t^i = -m^i \gamma^i \partial_\sigma^2 \{ \partial_\sigma^2 + (\kappa_*^i)^2 \} \rho^i, \quad \sigma \in (0, \ell^i), \\ \sum_{i=1}^3 \gamma^i \rho^i = 0, \quad \sigma = 0, \\ \frac{1}{s^1} (c^2 \kappa_*^2 - c^3 \kappa_*^3) \rho^1 + \partial_\sigma \rho^1 = \frac{1}{s^2} (c^3 \kappa_*^3 - c^1 \kappa_*^1) \rho^2 + \partial_\sigma \rho^2, \quad \sigma = 0, \\ \frac{1}{s^1} (c^2 \kappa_*^2 - c^3 \kappa_*^3) \rho^1 + \partial_\sigma \rho^1 = \frac{1}{s^3} (c^1 \kappa_*^1 - c^2 \kappa_*^2) \rho^3 + \partial_\sigma \rho^3, \quad \sigma = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \gamma^i \{ \partial_\sigma^2 + (\kappa_*^i)^2 \} \rho^i = 0, \quad \sigma = 0, \\ m^1 \gamma^1 \partial_\sigma \{ \partial_\sigma^2 + (\kappa_*^1)^2 \} \rho^1 = m^2 \gamma^2 \partial_\sigma \{ \partial_\sigma^2 + (\kappa_*^2)^2 \} \rho^2, \quad \sigma = 0, \\ m^1 \gamma^1 \partial_\sigma \{ \partial_\sigma^2 + (\kappa_*^1)^2 \} \rho^1 = m^3 \gamma^3 \partial_\sigma \{ \partial_\sigma^2 + (\kappa_*^3)^2 \} \rho^3, \quad \sigma = 0, \\ (\partial_\sigma + h^i) \rho^i = 0, \quad \sigma = \ell^i, \\ \partial_\sigma \{ \partial_\sigma^2 + (\kappa_*^i)^2 \} \rho^i = 0, \quad \sigma = \ell^i, \\ \left\{ \begin{array}{l} \mu^1 = -\frac{1}{1 - c^1 c^2 c^3} \{ c^3 c^1 s^2 \rho^1(0, \cdot) + s^3 \rho^2(0, \cdot) + c^3 s^1 \rho^3(0, \cdot) \}, \\ \mu^2 = -\frac{1}{1 - c^1 c^2 c^3} \{ c^1 s^2 \rho^1(0, \cdot) + c^1 c^2 s^3 \rho^2(0, \cdot) + s^1 \rho^3(0, \cdot) \}, \\ \mu^3 = -\frac{1}{1 - c^1 c^2 c^3} \{ s^2 \rho^1(0, \cdot) + c^2 s^3 \rho^2(0, \cdot) + c^2 c^3 s^1 \rho^3(0, \cdot) \}, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (8)$$

但し， $c^i := \cos \theta^i$ ， $s^i := \sin \theta^i$  である．さらに，モデル (1)-(7) は基本性質として面積保存性をもつので，面積保存性を表す式を線形化すると以下の式を得る：

$$\int_0^{\ell^1} \rho^1 d\sigma = \int_0^{\ell^2} \rho^2 d\sigma = \int_0^{\ell^3} \rho^3 d\sigma \quad (9)$$

(注 3) (8) から (9) は導かれない．実際，(8) からは

$$\int_0^{\ell^1} \rho^1 d\sigma = \int_0^{\ell^2} \rho^2 d\sigma + C_2 = \int_0^{\ell^3} \rho^3 d\sigma + C_3$$

( $C_2, C_3$  : 任意定数)

を得る．よって，モデル(1)-(7)の線形化問題を考える場合，(9)を満たす  $\rho^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に対して (8) を解析する必要がある．

条件(9)の下で(8)に対応する固有値問題を考える．ここで，

$$\mathcal{E} := \left\{ \xi = {}^t(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in H^1(0, \ell^1) \times H^1(0, \ell^2) \times H^1(0, \ell^3) \mid \right. \\ \left. \gamma^1 \xi^1 + \gamma^2 \xi^2 + \gamma^3 \xi^3 = 0 \ (\sigma = 0), \quad \int_0^{\ell^1} \xi^1 d\sigma = \int_0^{\ell^2} \xi^2 d\sigma = \int_0^{\ell^3} \xi^3 d\sigma \right\}$$

とする．さらに，固有値の特徴付けを行うため，双線形形式

$$I[\rho_1, \rho_2] := \sum_{i=1}^3 \gamma^i \int_0^{\ell^i} \{ \partial_\sigma \rho_1^i \partial_\sigma \rho_2^i - (\kappa_*^i)^2 \rho_1^i \rho_2^i \} d\sigma + \sum_{i=1}^3 \gamma^i h^i \rho_1^i \rho_2^i \Big|_{\sigma=\ell^i} \\ - \frac{\gamma^1}{s^1} (c^2 \kappa_*^2 - c^3 \kappa_*^3) \rho_1^1 \rho_2^1 \Big|_{\sigma=0} - \frac{\gamma^2}{s^2} (c^3 \kappa_*^3 - c^1 \kappa_*^1) \rho_1^2 \rho_2^2 \Big|_{\sigma=0} \\ - \frac{\gamma^3}{s^3} (c^1 \kappa_*^1 - c^2 \kappa_*^2) \rho_1^3 \rho_2^3 \Big|_{\sigma=0}$$

と  $H^{-1}$ -内積

$$(\rho_1, \rho_2)_{-1} := \sum_{i=1}^3 m^i \int_0^{\ell^i} \partial_\sigma u_{\rho_1^i} \partial_\sigma u_{\rho_2^i}$$

を定義する．但し， ${}^t(u_{\rho^1}, u_{\rho^2}, u_{\rho^3})$  は

$$\begin{cases} -m^i \partial_\sigma^2 u_{\rho^i} = \rho^i, & \sigma \in (0, \ell^i), \\ u_{\rho^1} + u_{\rho^2} + u_{\rho^3} = 0, & \sigma = 0, \\ m^1 \partial_\sigma u_{\rho^1} = m^2 \partial_\sigma u_{\rho^2} = m^3 \partial_\sigma u_{\rho^3}, & \sigma = 0, \\ \partial_\sigma u_{\rho^i} = 0, & \sigma = \ell^i, \end{cases}$$

の弱解である．このとき， $\rho = {}^t(\rho^1, \rho^2, \rho^3)$  を固有値  $\lambda$  に対応する固有関数とすると，

$$\lambda(\rho, \xi)_{-1} = -I[\rho, \xi] \quad (\xi \in \mathcal{E})$$

が成り立つ．ここで，固有値に関して以下の補題を得る．

補題 1. 固有値は離散的であり，実数である．

このとき，固有値  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ ) は  $I[\rho, \rho]$  と  $(\rho, \rho)_{-1}$  によって特徴付けされる．特に

$$\lambda_1 = - \inf_{\rho \in \mathcal{E} \setminus \{0\}} \frac{I[\rho, \rho]}{(\rho, \rho)_{-1}} \quad (10)$$

である．

補題 2. 固有値は  $h^i$ ,  $\ell^i$ ,  $\kappa_*^i$  に連続的に依存し，特に， $h^i$  に関して単調減少である．

### §3. 線形化安定性の解析

まず，次を定義する．

定義. 固有値  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  がすべて負であるとき，定常解  $\Gamma_*$  は線形安定であるという．

(10) より，

$$I[\rho, \rho] > 0 \quad (\rho \in \mathcal{E} \setminus \{0\}) \quad (11)$$

であれば， $\Gamma_*$  は線形安定である．ここで，

$$N_N = \{0\text{-固有値の数}\}, \quad N_U = \{\text{不安定固有値の数}\}$$

とする．このとき，補題 1 及び 2 を踏まえて，以下の場合について線形化安定性を考える．

#### 3.1. $\kappa_*^i = 0$ ( $i = 1, 2, 3$ ) の場合

次の補題が成り立つ

補題 3.  $h^i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) であれば，(11) が成り立つ．

補題 4. 固有値が 0 であるための必要十分条件は

$$J(h^1, h^2, h^3) = 0$$

但し， $\gamma^i, \ell^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に依存する正定数  $\alpha_{123}, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_0$  に対し，

$$\begin{aligned} J(h^1, h^2, h^3) = & \alpha_{123} h^1 h^2 h^3 + \alpha_{12} h^1 h^2 + \alpha_{23} h^2 h^3 + \alpha_{31} h^3 h^1 \\ & + \alpha_1 h^1 + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \alpha_0. \end{aligned}$$

$J(h^1, h^2, h^3) = 0$  を  $(h_1, h_2, h_3)$ -座標空間で描いてみよう．簡単のため

$$\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = 1, \quad \ell^2 = \ell^3 = 1 \quad (12)$$

とする (Young's law から  $\theta^1 = \theta^2 = \theta^3 = 2\pi/3$  となることに注意)．このとき，

$$\begin{aligned} \alpha_{123} &= 2(\ell^1)^4 + 16(\ell^1)^3 + 12(\ell^1)^2 + 4\ell^1 + 2, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{31} = 3(\ell^1)^4 + 32(\ell^1)^3 + 30(\ell^1)^2 + 12\ell^1 + 7, \\ \alpha_{23} &= 8(\ell^1)^3 + 48(\ell^1)^2 + 24\ell^1 + 4, \\ \alpha_1 &= 48(\ell^1)^3 + 72(\ell^1)^2 + 36\ell^1 + 24, \\ \alpha_2 &= \alpha_3 = 12(\ell^1)^3 + 96(\ell^1)^2 + 60\ell^1 + 12, \\ \alpha_0 &= 36(1 + 2(\ell^1))^2. \end{aligned}$$

ここで， $\ell^1 = 1$  及び  $\ell^1 = 0.001$  として  $J(h^1, h^2, h^3) = 0$  を描くと以下のようなになる (但し， $x = h_1, y = h^2, z = h^3$ ).

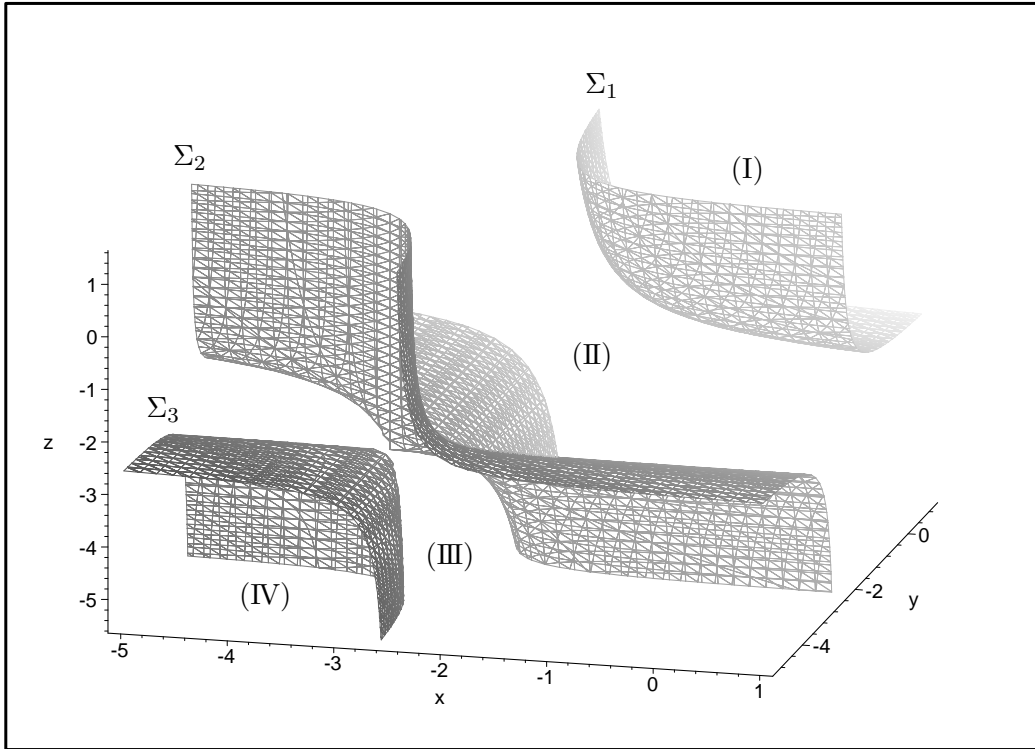


図 1:  $l^1 = 1$  の場合

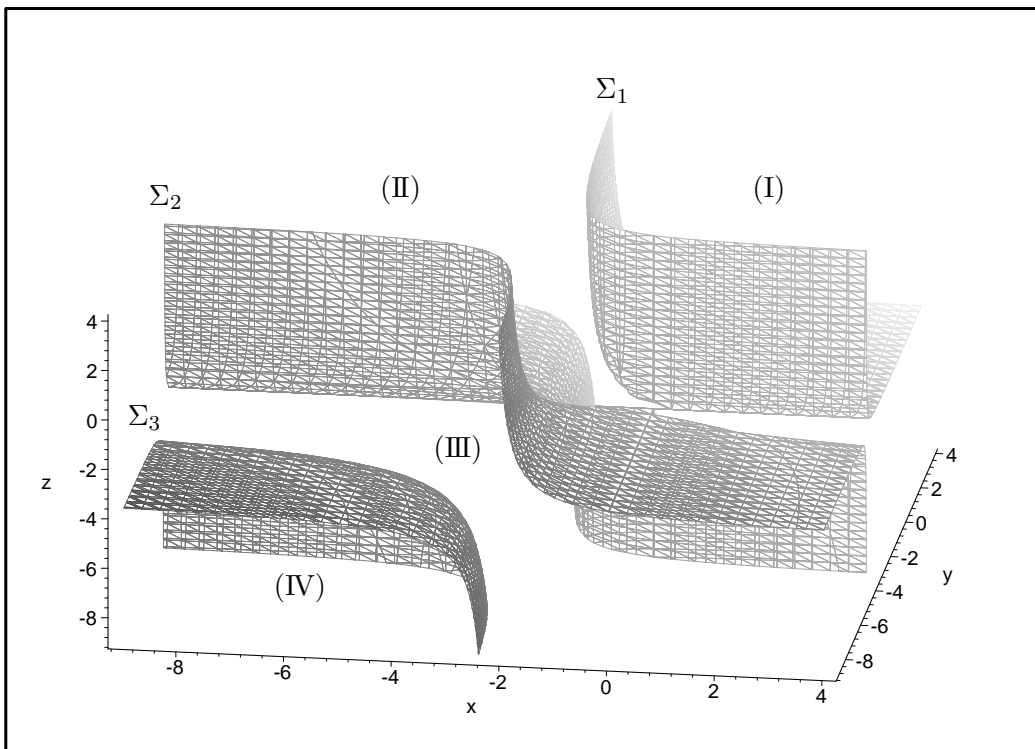


図 2:  $l^1 = 0.001$  の場合



$\{(h^1, h^2, h^3) \mid h^1 > 0, h^2 > 0, h^3 > 0\}$  は図 1 及び 2 において領域 (I) 内にあることに注意すると, 補題 1 ~ 補題 4 より以下の結果を得る .

定理.

(A)  $-1 + 6(\ell^1)^2 + 16(\ell^1)^3 + 3(\ell^1)^4 < 0$  の場合

- (A-i)  $\mathbf{h}$  が領域 (I) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 0$  (i.e.  $\Gamma_*$  は線形安定).
- (A-ii)  $\mathbf{h}$  が曲面  $\Sigma_1$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 0$ .
- (A-iii)  $\mathbf{h}$  が領域 (II) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 1$ .
- (A-iv)  $\mathbf{h}$  が曲面  $\Sigma_2 \setminus \{h_c\}$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 1$ .
- (A-v)  $\mathbf{h}$  が領域 (III) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 2$ .
- (A-iv)  $\mathbf{h}$  が曲面  $\Sigma_3 \setminus \{h_c\}$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 2$ .
- (A-vi)  $\mathbf{h}$  が領域 (IV) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 3$ .
- (A-vii)  $\mathbf{h} = h_c$  であるとき :  $N_N = 2, N_U = 1$ .

(B)  $-1 + 6(\ell^1)^2 + 16(\ell^1)^3 + 3(\ell^1)^4 > 0$  の場合

- (B-i)  $\mathbf{h}$  が領域 (I) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 0$  (i.e.  $\Gamma_*$  は線形安定).
- (B-ii)  $\mathbf{h}$  が曲面  $\Sigma_1 \setminus \{h_c\}$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 0$ .
- (B-iii)  $\mathbf{h}$  が領域 (II) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 1$ .
- (B-iv)  $\mathbf{h}$  が曲面  $\Sigma_2 \setminus \{h_c\}$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 1$ .
- (B-v)  $\mathbf{h}$  が領域 (III) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 2$ .
- (B-iv)  $\mathbf{h}$  が曲面  $\Sigma_3$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 2$ .
- (B-vi)  $\mathbf{h}$  が領域 (IV) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 3$ .
- (B-vii)  $\mathbf{h} = h_c$  であるとき :  $N_N = 2, N_U = 0$ .

但し,  $\mathbf{h} = (h^1, h^2, h^3)$ ,  $\mathbf{h}_c = (h_c^1, h_c^2, h_c^3)$  であり,

$$h_c^1 = -\frac{12\ell^1\{1 + 4\ell^1 + (\ell^1)^2\}}{-1 + 6(\ell^1)^2 + 16(\ell^1)^3 + 3(\ell^1)^4}, \quad h_c^2 = h_c^3 = -3.$$

(注 4) 簡単のため (12) を仮定したが, 一般の場合も同様の結果が得られる .

(注 5) 曲率流方程式に対する 3 相境界モデルの場合は

$$J(h^1, h^2, h^3) = (\gamma^1\ell^1 + \gamma^2\ell^2 + \gamma^3\ell^3)h^1h^2h^3 + \gamma^3h^1h^2 + \gamma^1h^2h^3 + \gamma^2h^3h^1$$

となる . この場合  $\mathbf{h}_c = (0, 0, 0)$  であり,  $J(h^1, h^2, h^3) = 0$  の描く曲面は図 2 のタイプの図になる . したがって, 定理の (B) と同様の結果を得る ([IY] を参照) .

(注 6)  $\kappa_*^i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の場合, 双線形形式  $I[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}]$  は

$$I[\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}] = \sum_{i=1}^3 \gamma^i \int_0^{\ell^i} (\partial_\sigma \rho^i)^2 d\sigma + \sum_{i=1}^3 \gamma^i h^i (\rho^i)^2 \Big|_{\sigma=\ell^i}$$

となる．よって，この場合は線形化安定性の判定において triple-junction の影響はなく， $\Gamma_*^i$  の長さと  $\partial\Omega \cap \Gamma_*^i$  での  $\partial\Omega$  の曲率にのみ依存していることがわかる．

### 3.2. $\kappa_*^1 = 0, \kappa_*^2 = -\kappa_*^3$ の場合

$$\begin{cases} \gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = 1, & \ell^1 = 1, & \ell^2 = \ell^3 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \\ \kappa_*^1 = 0, & \kappa_*^2 = -\kappa_*^3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (13)$$

とする．このとき，以下の補題を得る．

補題 5.  $h^i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) が十分大きければ，(11) が成り立つ．

補題 6. 固有値が 0 であるための必要十分条件は

$$J(h^1, h^2, h^3) = 0$$

但し，

$$\begin{aligned} J(h^1, h^2, h^3) &= \frac{243}{8}h^1h^2h^3 + \left\{ \frac{27}{2} + 4\pi\sqrt{3} \right\}h^2h^3 \\ &+ \left\{ \frac{189}{32} + \frac{13\pi\sqrt{3}}{4} \right\}(h^1h^2 + h^3h^1) \\ &+ \left\{ \frac{9}{8} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{8\pi^2}{9} \right\}(h^1 + h^2 + h^3) \end{aligned}$$

ここで， $J(h^1, h^2, h^3) = 0$  を  $(h_1, h_2, h_3)$ -座標空間で描いてみると図 4 のようになる ( $(h^1, h^2, h^3) = (0, 0, 0)$  は  $J(h^1, h^2, h^3) = 0$  上にあることに注意)．このとき，補題 1, 2 及び補題 5, 6 より以下の結果を得る．

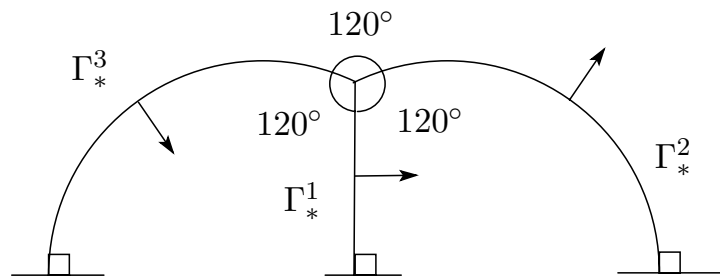


図 3: 仮定 (13) にともなう  $\Gamma_*$  の形状  
(この場合  $(h^1, h^2, h^3) = (0, 0, 0)$  は固有値 0)

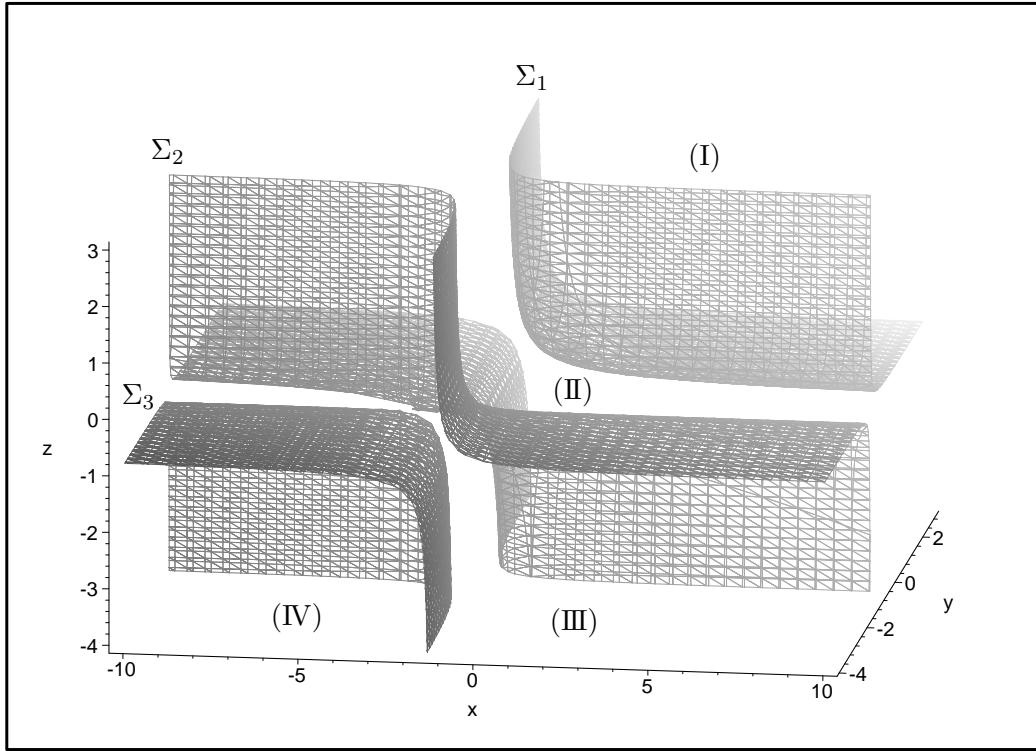


図 4:  $\kappa_*^1 = 0, \kappa_*^2 = -\kappa_*^3 = -\sqrt{3}/2$  の場合

定理.

- (i)  $h$  が領域 (I) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 0$  (i.e.  $\Gamma_*$  は線形安定).
- (ii)  $h$  が曲面  $\Sigma_1$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 0$ .
- (iii)  $h$  が領域 (II) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 1$ .
- (iv)  $h$  が曲面  $\Sigma_2 \setminus \{h_c\}$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 1$ .
- (v)  $h$  が領域 (III) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 2$ .
- (iv)  $h$  が曲面  $\Sigma_3 \setminus \{h_c\}$  上にあるとき :  $N_N = 1, N_U = 2$ .
- (vi)  $h$  が領域 (IV) 内にあるとき :  $N_N = 0, N_U = 3$ .
- (vii)  $h = h_c$  であるとき :  $N_N = 2, N_U = 1$ .

但し,  $h = (h^1, h^2, h^3)$ ,  $h_c = (h_c^1, h_c^2, h_c^3)$  であり,

$$h_c^1 = -\frac{4(2560\pi^3\sqrt{3} + 9792\pi^2 + 648\pi * \sqrt{3} - 2187)}{27(1600\pi^2 - 720\pi\sqrt{3} + 243)},$$

$$h_c^2 = h_c^3 = -\frac{(8\pi\sqrt{3} + 27)(64\pi^2 + 96\pi\sqrt{3} + 81)}{54(64\pi^2 + 144\pi\sqrt{3} + 243)}.$$

#### §4. 最後に

今回、幾何学的時間発展モデル(1)-(7)の定常解の線形化安定性の判定基準の導出に関して部分的な結果を得た。しかし、定常解が円弧を含むような場合に関しては、解析に際し triple-junction の影響が無視できず、また安定性に関連するパラメータの多さから、現段階では一般化に至っていない。今後は本質的な部分をより明確にしてこの結果を一般化し、ネットワークタイプ (triple-junction が 1 つでない場合) のモデルも研究していきたい。さらにこの結果を踏まえて、非線形安定性に関して研究を進めていく予定である。一方で、円弧を含む場合の定常解を図示して形状を眺めていると、このモデルの安定性の解析は泡の解析とも密接に絡んでいるように思われる。今後はそのあたりの関連性も考えてみたいと思う。

#### 参考文献

- [BR] L. Bronsard, F. Reitich, *On three-phase boundary motion and the singular limit of a vector-valued Ginzburg-Landau equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., 124(1993), pp. 355-379.
- [EGI] J. Escher, H. Garcke, K. Ito, *Exponential stability for a mirror-symmetric three phase boundary motion by surface diffusion*, Math. Nachr., 257(2003), pp.3-15.
- [GN] H. Garcke, A. Novick-Cohen, *A singular limit for a system of degenerate Cahn-Hilliard equations*, Adv. Diff. Equations, 5(2000), pp.401-434.
- [IK1] K. Ito, Y. Kohsaka, *Three phase boundary motion by surface diffusion: stability of a mirror symmetric stationary solution*, Interfaces and Free Boundaries, 3(2001), pp.45-80.
- [IK2] K. Ito, Y. Kohsaka, *Three phase boundary motion by surface diffusion in triangular domain*, Adv. Math. Sci. Appl., 11(2001), pp.753-779.
- [IY] R. Ikota, E. Yanagida, *A stability criterion for stationary curves to the curvature-driven motion with a triple junction*, Diff. Int. Equations, 16(2003), pp.707-726.
- [M] W. W. Mullins, *Theory of thermal grooving*, J. Appl. Phys., 28(1957), pp.333-339.



# 不変領域を持つ反応拡散系における 擾乱の伝播速度の有界性について

井古田 亮 (九州大学・大学院数理学研究院)

## 1 導入

本研究では、反応拡散系における擾乱の伝播速度について考察する。1次元空間上の反応拡散系は以下の形に書ける：

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_t(x, t) = D\mathbf{u}_{xx}(x, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ここで  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  は  $\mathbb{R}^n$  に値をとり、 $D$  は対角行列である：

$$(2) \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \quad d_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

反応項もまた  $\mathbb{R}^n$  値である：

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{u})).$$

本研究では反応項  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  にいくつかの仮定をおく。記号  $\mathcal{R}$  は方形領域  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  を表すものとする。ここで  $a_i$  と  $b_i$  は  $a_i < b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たす定数である。以下を仮定する：

(A1) 反応項  $\mathbf{f}$  は、 $\mathcal{R}$  から  $\mathbb{R}^n$  への滑らかな関数であるとする。

(A2) 反応項  $\mathbf{f}$  は  $\mathcal{R}$  の中に零点を持つとする：

$$(3) \quad \mathbf{f}(c_1, \dots, c_n) = 0,$$

ここで  $c_i$  は  $a_i \leq c_i \leq b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たす定数である。

(A3) 方形領域  $\mathcal{R}$  は不変である：

$$(4) \quad \begin{aligned} f_i(\mathbf{u}) &\geq 0 && \text{on } \{\mathbf{u} \in \partial\mathcal{R} \mid u_i = a_i\}, \\ f_i(\mathbf{u}) &\leq 0 && \text{on } \{\mathbf{u} \in \partial\mathcal{R} \mid u_i = b_i\}. \end{aligned}$$

上記の仮定を満たす系としては, FitzHugh-Nagumo 方程式, Field-Noyes 方程式 (Belousov-Zhabotinskii 反応のモデルの一つ), 表皮の傷の回復を記述するモデルなどが挙げられる (文献 [9] の第 8 章, 文献 [10] の第 9 章 3 節文献 [12] の第 1 4 章 B 節などを参照).

ここから少し, 話は横道にそれる. 外来種の伝播速度, 狂犬病を持ったキツネの伝播速度, 伝染病の伝播速度などを見積もることはそれらの対策を考える上では重要なことのようなのである (筆者はよく知らないが). たとえば, [18] では伝染病伝播モデルについて概観している (その記事で扱われている方程式に, 本研究における手法を直接適用できるわけではないが, ここに参照することにする).

また, [18] では, 反応拡散系における進行波解の速度を求めるための一般的な指導原理である「線形予測」について解説している. 反応拡散系において進行波解を厳密に求めることは一般に難しい. そのため, 「線形予測」を用いて進行速度を求めて数値シミュレーションと比較することが行われてきた. この「線形予測」は, 成り立つこともあれば成り立たないこともある. 文献 [8] では, 変分原理を用いて (ということは, 変分原理で扱えるような方程式を対象として) 「線形予測」がどのようなときに成り立つかを厳密に論じている (筆者はきちんとこの論文を読んではいない).

話を本題に戻そう. 本研究では, 条件 (A1)–(A3) の下で, 反応拡散系 (1) における擾乱の伝播速度を評価する. 今回採用する手法の長所は, 上記のような一般的な設定の下で広い範囲の初期値を扱えることである. そのために, 以下の Fisher 方程式の進行波解を用いる.

$$(5) \quad u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

ここで  $u$  はスカラー値である.

関数  $\phi(z)$  を以下のように定める:

$$(6) \quad \phi(z) = 1/\{1 + \exp(z/\sqrt{6})\}^2.$$

定数  $\theta_e$  を  $\theta_e = 5/\sqrt{6}$  とおくと,  $\phi(x - \theta_e t)$ , は (5) の進行波解になっていることに注意する.

結果を述べる上で必要な定数をここで定義する. 定数  $\gamma_i^+$ ,  $\gamma_i^-$ ,  $\omega$  は以下で定義される:

$$\gamma_i^+ = \begin{cases} \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \partial \mathcal{R} \\ u_i = b_i}} \sup_{0 \leq \sigma < \tau \leq 1} \frac{|f_i(\mathbf{c} + \tau(\mathbf{u} - \mathbf{c})) - f_i(\mathbf{c} + \sigma(\mathbf{u} - \mathbf{c}))|}{|(b_i - c_i)(\tau - \sigma)|} & \text{if } b_i \neq c_i, \\ 0 & \text{if } b_i = c_i, \end{cases}$$

$$\gamma_i^- = \begin{cases} \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \partial \mathcal{R} \\ u_i = a_i}} \sup_{0 \leq \sigma < \tau \leq 1} \frac{|f_i(\mathbf{c} + \tau(\mathbf{u} - \mathbf{c})) - f_i(\mathbf{c} + \sigma(\mathbf{u} - \mathbf{c}))|}{|(a_i - c_i)(\tau - \sigma)|} & \text{if } a_i \neq c_i, \\ 0 & \text{if } a_i = c_i, \end{cases}$$

$$\omega = \max_{1 \leq i \leq n} \{\gamma_i^\pm\},$$

ここで  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$  である. さらに,

$$(7) \quad \theta_0 = 2\sqrt{6}\omega, \quad \theta_1 = \theta_e \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\},$$

$$(8) \quad \theta = \theta_0 + \theta_1,$$

とおく.

以上の準備の下, 結果を述べる.

**Theorem 1.** 関数  $u_i(x, 0) \in BUC^1(\mathbb{R})$  は  $(a_i - c_i)\phi(x) \leq u_i(x, 0) - c_i < (b_i - c_i)\phi(x)$  を満たすとする ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 反応項  $\mathbf{f}$  は, 条件 (A1)–(A3) を満たすものとする. このとき, (1) の解  $\mathbf{u}$  は以下を満たす:

$$(9) \quad (a_i - c_i)\phi(x - \theta t) \leq u_i(x, t) - c_i \leq (b_i - c_i)\phi(x - \theta t)$$

for all  $x \in \mathbb{R}$  and  $t > 0$ .

作用素分割法を用いることで, 上記の定理を証明できる. 本報告では, 証明の概略について述べる.

## 2 非線形 Trotter 積公式

この節では, 非線形 Trotter 積公式 (Nonlinear Trotter Product Formula) を導入する.

記号  $\mathcal{F}^t$  はベクトル場  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  によって生成されるフローであるとする. すなわち,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  に対し,  $\mathbf{v}(t) = \mathcal{F}^t \mathbf{w}$  は以下の方程式の解である:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)), \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{w}. \end{cases}$$

次に, 関数空間  $V$  と  $W$  を次のように定義する:

$$(10) \quad V = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_i \in BUC^1(\mathbb{R}) \ (i = 1, \dots, n)\},$$

$$(11) \quad W = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_i \in BUC(\mathbb{R}) \ (i = 1, \dots, n)\}.$$

関数空間  $V$  と  $W$  のノルムは

$$(12) \quad \|\mathbf{u}\|_V = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|u_i\|_{BUC^1(\mathbb{R})}\},$$

$$(13) \quad \|\mathbf{u}\|_W = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|u_i\|_{BUC(\mathbb{R})}\}$$



によって与えられる.

次に, 記号  $e^{tL}$  でもって, (1) の線形部分の定める半群を表す. すなわち,

$$\begin{cases} \partial_t e^{tL} \mathbf{u}_0 = \partial_x^2 D e^{tL} \mathbf{u}_0 & (t > 0) \\ \lim_{t \downarrow 0} \|e^{tL} \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0\|_W = 0, \end{cases}$$

である. ここで,  $\mathbf{u}_0 \in W$  であり, また,  $\partial_t, \partial_x^2$  は各要素に作用する.

文献 [13], の 15 節に従って次のように定める:

$$(14) \quad \mathbf{v}_k = \left( e^{(1/m)L} \mathcal{F}^{1/m} \right)^k \mathbf{u}_0,$$

$$(15) \quad \mathbf{v}(t) = e^{sL} \mathcal{F}^s \mathbf{v}_k \quad \text{for } t = k/m + s, 0 \leq s \leq 1/m,$$

文献 [13] の命題 5.4(p.314) を, 本報告で使用するのに適した形で以下に述べる:

**Theorem 2 (M. E. Taylor).** 初期値  $\mathbf{u}_0$  は  $V$  の要素であるとし, また,  $\mathbf{u}$  は (1) の解であるとする. 関数  $\mathbf{v}$  は (15) によって定められているとする. このとき, 任意の正定数  $T$  に対して定数  $C = C(T, D, f)$  が存在して次を満たす:

$$(16) \quad \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|_W \leq C m^{1/2} \quad \text{for } 0 \leq t \leq T$$

このような積公式については, 少し古い文献ではあるが, ([4]) に良いサーベイがある. このような近似方法は作用素分割法 (Operator Splitting method) と呼ばれ, Navier-Stokes 方程式の数値計算にもしばしば用いられるようである. MathSciNet で operator-splitting をキーワードとして検索すると, いろいろ出てくる. 特に, Glowinski の仕事が目を引く. Kato もこの方面での貢献が大きいらしく, Kato formula と呼ばれることもあるらしい.

### 3 証明の概略

証明の方針は,

(i) まず, 方程式 (1) を非線形 Trotter 積公式を用いて近似する.

(ii) 次に, 反応項の部分と拡散項の部分を別々に評価する.

実際には, 次の 2 つの命題を証明することになる.

**Proposition 3.** 関数  $\mathbf{w}_0(x) = (w_{0,1}(x), \dots, w_{0,n}(x)) \in W$  に対し,  $\mathbf{w}(x, t) = \mathcal{F}^t \mathbf{w}_0(x)$  とおく. もし  $(a_i - c_i)\phi(x) \leq w_{0,i}(x) - c_i \leq (b_i - c_i)\phi(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) であるならば,

$$(a_i - c_i)\phi(x - \theta_0 t) \leq w_i(x, t) - c_i \leq (b_i - c_i)\phi(x - \theta_0 t) \quad \text{for } t \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

である.

**Proposition 4.** 関数  $w_0(x) \in W$  に対し,  $w(x, t) = e^{tL}w_0(x)$  とする. もし,  $(a_i - c_i)\phi(x) \leq w_{0,i}(x) - c_i \leq (b_i - c_i)\phi(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) であれば,  $(a_i - c_i)\phi(x - \theta_1 t) \leq w_i(x, t) - c_i \leq (b_i - c_i)\phi(x - \theta_1 t)$  for  $t \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) となる.

これらの命題から,

$$(a_i - c_i)\phi(x - (\theta_0 + \theta_1)t) \leq v_i(x, t) - c_i \leq (b_i - c_i)\phi(x - (\theta_0 + \theta_1)t),$$

という不等式が従う. ここで,  $v_i$  は (14), (15) で定義される  $v$  の  $i$  番目の成分である. パラメータ  $m$  を無限大に飛ばすことで, 所望の (9) を得る.

## 4 その他

多変数の放物型方程式では一般的には比較定理は成り立たない. しかしながら, 特殊な比較関数であれば構成できることを本研究では示した. このような研究は, 本研究が初めてではない. 論文 [5] では, 有界領域において空間的に一様な (しかし, 時間的には変動する) 比較関数を構成している.

今後, 「反応拡散系を非線形 Trotter 積公式で近似して定性的な性質を導く」という戦略を適応できるような問題を探して行きたいと思っている. また, この公式に限らず数値解法として知られる方法を, 解の定性的性質を調べるために利用することは, 常に念頭に置いている.

## 謝辞

本研究は, 九州大学 21 世紀 COE プログラム・機能数理学の構築と展開の支援を受けて行われたものである. 著者は, 北海道大学の下澤楯夫教授の激励に感謝する. また, 本研究で使用している厳密解は九州大学の丸野健一氏に教えて頂いた. ここに感謝する次第である.

## References

- [1] M. J. Ablowitz and A. Zeppetella. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. *Bull. Math. Biol.*, 41:835–840, 1979.
- [2] D. G. Aronson and H. F. Weinberger. *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, volume 446 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1975.

- [3] D. G. Aronson and H. F. Weinberger. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Adv. in Math.*, 30(1):33–76, 1978.
- [4] A. J. Chorin, T. J. R. Hughes, M. F. McCracken, and J. E. Marsden. Product formula and numerical algorithms, 1978.
- [5] E. Conway and J. Smoller. A comparison technique for systems of reaction-diffusion equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 2(7):679–697, 1977.
- [6] S.-I. Ei. The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems. *J. Dynamics Differential Equations*, 14(1):85–137, 2002.
- [7] S. P. Hastings. On the existence of homoclinic and periodic orbits for the FitzHugh-Nagumo equations. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 27(105):123–134, 1976.
- [8] M. Lucia, C. B. Muratov, and M. Novaga. Linear vs. nonlinear selection for the propagation speed of the solutions of scalar reaction-diffusion equations invading an unstable equilibrium. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 57(5):616–636, 2004.
- [9] J. D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 1. Springer-Verlag, 3 edition, 2002.
- [10] J. D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 2. Springer-Verlag, 3 edition, 2003.
- [11] S. Nii. A topological proof of stability of  $n$ -front solutions of the FitzHugh-Nagumo equations. *J. Dynam. Differential Equations*, 11(3):515–555, 1999.
- [12] Joel Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. A series of comprehensive studies in mathematics. Springer-Verlag, second edition edition, 1994.
- [13] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations*. Number III in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1996.
- [14] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations*. Number I in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1996.
- [15] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations*. Number II in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1996.

- [16] E. Yanagida. Stability of fast travelling pulse solutions of the FitzHugh-Nagumo equations. *J. Math. Biol.*, 22(1):81–104, 1985.
- [17] E. Yanagida. Standing pulse solutions in reaction-diffusion systems with skew-gradient structure. *J. Dynamics Differential Equations*, 14(1):189–205, 2002.
- [18] 細野雄三. 伝染病伝播の反応拡散モデルについて. **応用数理**, 14(2):29–39, 2004.



## Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations.

梶木屋 龍治      長崎総合科学大学・工学部

この講演では, symmetric mountain pass lemma に関連した新しい critical point theorem について述べる. またその応用として, 劣線形楕円型方程式に対して無限に多くの解の存在を証明する. symmetric mountain pass lemma は, バナッハ空間上の実数値汎関数が, 適当な仮定のもとに critical value を無限に多く持つことを保証する.

**定義 1.** バナッハ空間の閉部分集合  $A$  が 「 $x \in A$  ならば  $-x \in A$ 」を満たすとき, 対称であるという.  $A$  を対称な閉部分集合で,  $0 \notin A$  とする.  $A$  から  $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$  への連続な奇関数が存在するような自然数  $k$  の最小値を  $A$  の genus といい,  $\gamma(A)$  で表す. どの様な自然数  $k$  に対しても, その様な連続な奇関数が存在しないとき,  $\gamma(A) = \infty$  と定義する. 空集合に対しては,  $\gamma(\emptyset) = 0$  と定義する. 各自然数  $k$  に対して, 集合族  $\Gamma_k$  を次のように定義する.

$$(1) \quad \Gamma_k \equiv \{A : \gamma(A) \geq k\}.$$

**例 1.**  $n$  次元球面  $S^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  の genus は,  $\gamma(S^n) = n + 1$ .

なぜならば,  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  なので,  $\gamma(S^n) \leq n + 1$ .  $S^n$  から  $\mathbb{R}^n$  への連続な奇関数は零点を持つ (Borsuk-Ulam の定理) ので,  $S^n$  から  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  への連続な奇関数は存在しない. よって  $\gamma(S^n) \geq n + 1$ . ゆえに  $\gamma(S^n) = n + 1$ .

**仮定 (A).**  $E$  は無限次元バナッハ空間,  $I(u)$  は,  $E$  上の  $C^1$  級の実数値汎関数で, 次の条件 (A1), (A2) を満たすものとする.

(A1)  $I(0) = 0$ ,  $I(u)$  は 下に有界な偶汎関数で, 次のパレ・スメイル条件 (PS) を満たす.

(PS)  $\{I(u_k)\}$  が有界で,  $\lim_{k \rightarrow \infty} I'(u_k) = 0$  を満たす  $E$  内の列  $\{u_k\}$  は, 収束部分列を持つ.

(A2) 各  $k \in \mathbb{N}$  に対して,  $\sup_{u \in A_k} I(u) < 0$  を満たす  $A_k \in \Gamma_k$  が存在する.

仮定 (A) のもとに, 次の値  $c_k$  を定義する.

$$(2) \quad c_k \equiv \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} I(u).$$

**定理 0.** (symmetric mountain pass lemma [1], [2]) 仮定 (A) をおく. このとき  $c_k$  は,  $I(\cdot)$  の critical value であり,  $c_k \leq c_{k+1} < 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$  が成り立つ. さらに, もし  $c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+p} \equiv c$ , ならば  $\gamma(K_c) \geq p + 1$  である. ここで

$$K_c \equiv \{u \in E : I'(u) = 0, I(u) = c\}.$$

定理 0 の証明に関しては, [1], [2] または [3] を参照せよ. 本講演の主結果は, 次の定理 1 と後に述べる定理 2 である.

定理 1. (A) を仮定する. このとき次のような列  $\{u_k\}$  が存在する.

$$I'(u_k) = 0, I(u_k) \leq 0, u_k \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0.$$

注意 1. 定理 0 と定理 1 を比較すると, 「定理 1 に出てくる  $u_k$  は, 定理 0 の  $c_k$  に対応する critical point として取れるのではないか.」という問題が考えられる. これに関連して, 次の条件を考察する.

(A3) もし  $I'(u) = 0$  かつ  $I(u) = 0$  ならば,  $u = 0$  である.

(A1), (A2), (A3) が成り立つとき,  $c_k$  に対応する  $u_k$  を取れば, パレ・スメイル条件により  $\{u_k\}$  は, 0 に収束する. しかしながら, (A3) が成り立たないときは,  $c_k$  に対応する  $u_k$  は必ずしも 0 に収束しない. 実際に次の例がある.

例 2. 次のようなバナッハ空間  $E$  と汎関数  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  の例がある.  $I(u)$  は (A1), (A2) を満たし, (A3) を満たさない. さらに, ある定数  $r_0 > 0$  が存在して, もし  $I'(u) = 0, I(u) = c_k$  ならば  $\|u\| \geq r_0$  である. ここで,  $r_0$  は,  $u$  と  $k$  に無関係な正定数である.

定理 1 の証明. 簡単のため,  $E$  をヒルベルト空間とする.

$$(3) \quad \frac{d\eta}{dt} = -I'(\eta) \quad (\in E^* \cong E), \quad \eta(0) = u,$$

の解を  $\eta(t, u)$  と表す. ここで  $I'(\eta) \in E^*$  は リースの表現定理により  $I'(\eta) \in E$  とみなす. 簡単のため, 解  $\eta(t, u)$  は一意大域解であると仮定する.

今, 定理 1 が誤りであると仮定して矛盾を導く. 定理 1 を否定すると次が成り立つ.

(A4)  $\exists r > 0: 0 < \|u\| \leq r, I(u) \leq 0 \implies I'(u) \neq 0.$

$I$  は偶汎関数だから, 原点は critical point である. (A4) は  $I(u) \leq 0$  を満たすものの中で原点が孤立した critical point である事を意味する. 原点の回りでベクトル場  $I'(u)$  が消えないので,  $\eta(t, u)$  は停滞せずに流れている. このことから, 次の補題が導かれる.

補題 1. ある  $r_0 > 0$  が存在して, 次が成り立つ.

$$\forall c > 0, \exists T(c) > 0: I(u) \leq -c \implies \|\eta(t, u)\| > r_0 \quad (\forall t \geq T(c)).$$

以下の議論は, 補題 1 と [3, Proposition 9.33] の論法を組み合わせたものである.

$$K \equiv \{u \in E : I'(u) = 0, I(u) \leq 0\}, \quad L \equiv K \setminus \{0\}.$$

とおく.  $I$  は下に有界で, (PS) 条件を満たすので,  $K$  はコンパクト. また (A4) より  $L$  もコンパクト.  $L$  は原点を含まない対称なコンパクト集合なので genus は有

限である.  $p \equiv \gamma(L)$  とおく. 一方  $\delta > 0$  を小さく取ると次が成り立つことが知られている.

$$(4) \quad \gamma(L_\delta) = \gamma(L) = p.$$

ここで  $L_\delta$  は  $L$  の  $\delta$  近傍を表す. 必要ならば,  $\delta$  を小さく取りなおして  $r_0 > \delta > 0$  としておく.  $I(u)$  は方程式 (3) のリアプノフ関数なので, (PS) 条件を使うと, 次が証明できる. (deformation lemma と呼ばれている.)

$$(5) \quad \exists \varepsilon > 0 : I(u) \leq \varepsilon, u \notin K_\delta \implies I(\eta(1, u)) \leq -\varepsilon.$$

ここで  $K_\delta$  は  $K$  の  $\delta$  近傍を表す. 定理 0 の  $\{c_k\}$  を使う.  $\{c_k\}$  は 0 に収束するので, 上の  $\varepsilon$  に対して,

$$(6) \quad -\varepsilon < c_q < 0$$

となる  $q \in \mathbb{N}$  をとることができる. この  $q$  と (4) の  $p$  に対して  $c_{p+q} < -c < 0$  となる  $c$  をとる.  $c_{p+q}$  の定義により  $\sup_{u \in P} I(u) < -c$  を満たす  $P \in \Gamma_{p+q}$  が存在する. 書き直すと,

$$(7) \quad I(u) < -c \quad (u \in P).$$

補題 1 により

$$(8) \quad \|\eta(t, u)\| > r_0 \quad (u \in P, t \geq T(c)).$$

$I'(u)$  は, 奇関数なので  $\eta(t, u)$  は  $u$  について奇関数である.  $P \in \Gamma_{p+q}$  なので  $\eta(t, P) \in \Gamma_{p+q}$  となる.  $Q \equiv \eta(T(c), P)$  とおく.  $I(u)$  は (3) に対するリアプノフ関数なので,

$$(9) \quad \sup_{u \in Q} I(u) \leq \sup_{u \in P} I(u) < -c < \varepsilon$$

が成り立つ. (8) により,  $u \in Q$  のとき  $\|u\| > r_0 > \delta$  なので,

$$(10) \quad Q \setminus K_\delta = Q \setminus L_\delta$$

になる.  $\gamma(Q \setminus L_\delta) \geq \gamma(Q) - \gamma(L_\delta) \geq q$  なので  $\overline{Q \setminus L_\delta} \in \Gamma_q$  になる. (5), (10) により

$$I(\eta(1, u)) \leq -\varepsilon \quad (u \in \overline{Q \setminus L_\delta}).$$

$R = \eta(1, \overline{Q \setminus L_\delta})$  とおくと,  $R \in \Gamma_q$  であり

$$c_q \leq \sup_{u \in R} I(u) \leq -\varepsilon.$$

これは (6) に反する. この矛盾は (A4) から生じたものである. よって, (A4) は誤り. (証明終)

定理 1 の応用として次の劣線形楕円型方程式に対する無限に多くの解の存在を証明する.

$$(11) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$



ただし,  $\Omega$  は滑らかな境界を持つ  $\mathbb{R}^n$  の有界領域,  $n \geq 1$  とする.

仮定 (B). ある  $\varepsilon > 0$  が存在して,  $f(x, u)$  は  $\bar{\Omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  で定義されたヘルダー連続関数で, 次の (B1), (B2) を満たすものとする.

(B1)  $f(x, u)$  は  $u$  に関して奇関数である.

(B2) 次を満たす  $x_0 \in \Omega$  と  $\delta > 0$  が存在する.

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \left( \min_{|x-x_0| \leq \delta} u^{-2} F(x, u) \right) = \infty,$$

$$\liminf_{u \rightarrow 0} \left( \min_{|x-x_0| \leq \delta} u^{-2} F(x, u) \right) > -\infty,$$

$$F(x, u) \equiv \int_0^u f(x, s) ds.$$

定理 2. (B) を仮定する. このとき (11) は, その  $C^2(\bar{\Omega})$  ノルムが 0 に収束する非自明な解の列をもつ.

定理 2 は, 次の事を意味する. ある点  $x_0 \in \Omega$  が存在して, 非線形項  $f(x, u)$  が, 点  $(x, u) = (x_0, 0)$  の近傍で劣線形ならば, 方程式 (11) は 無限に多くの小さな解をもつ.

系 1.  $f(x, u) \equiv a(x)g(u)$  は  $u = 0$  の近傍で定義されたヘルダー連続関数とする.  $g(u)$  は奇関数であり,  $\lim_{u \rightarrow 0} g(u)/u = \infty$  を仮定する. このとき, 次の 2 条件は同値である.

(i) その  $C^2(\bar{\Omega})$  ノルムが 0 に収束する非自明な解の列  $\{u_k\}$  が存在する.

(ii)  $a(x_0) > 0$  となる  $x_0 \in \Omega$  が存在する.

証明. (ii) を仮定する. このとき, 仮定 (B) が成り立つ. 定理 2 より (i) が出る.

(ii) を否定する.  $a(x) \leq 0$  ( $\forall x \in \Omega$ ).

$\lim_{u \rightarrow 0} g(u)/u = \infty$  より, 次を満たす  $\delta > 0$  が存在する.

$$ug(u) > 0 \quad (0 < |u| \leq \delta).$$

もし  $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} < \delta$  なる解があれば, 方程式 (11) に  $u$  をかけて積分して

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} a(x)ug(u) dx \leq 0.$$

ゆえに,  $u \equiv 0$ . よって, (i) は成り立たない.

(証明終)

例 3. 仮定 (B) を満たす  $f(x, u)$  の例を述べる. 以下において,  $a(x), b(x)$  はヘルダー連続であり,  $a(x_0) > 0$  となる  $x_0 \in \Omega$  が存在するものとする.

(i)  $f(x, u) = a(x)|u|^p \operatorname{sgn} u$ ,  $(0 < p < 1)$ .

(ii)  $f(x, u) = -a(x)u \log |u|$ .

$$(iii) f(x, u) = a(x)|u|^p \operatorname{sgn} u + b(x)|u|^q \operatorname{sgn} u, \quad (0 < p < \min(1, q)).$$

このような  $f(x, u)$  に対して, (11) は  $C^2(\bar{\Omega})$  ノルムが 0 に収束する解の列をもつ.

定理 2 の証明. 非線形項  $f(x, u)$  は  $\bar{\Omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  で定義されている.  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  を次のように定義する.  $0 \leq \phi(t) \leq 1$  ( $t \in \mathbb{R}$ ),  $\phi(-t) = \phi(t)$ ,  $\phi(t) = 1$  ( $|t| \leq \varepsilon/2$ ),  $\phi(t) = 0$  ( $|t| \geq \varepsilon$ ). 次の方程式

$$-\Delta u = f(x, u)\phi(u)$$

に対して,  $\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$  となる解の列  $\{u_k\}$  が存在することを示せばよい. このとき, 楕円型方程式の regularity theorem により  $\|u_k\|_{C^2(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$  となる. 今後  $f(x, u)\phi(u)$  を改めて,  $f(x, u)$  と書く. (cut off が有効なのは, 定理 1 の場合である. 定理 0 の場合は, この論法は, 使えない.)  $f(x, u)$  は, コンパクトなサポートを持つので,

$$(B3) \quad |f(x, u)| + |F(x, u)| \leq \exists C \quad (\forall x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R}).$$

$$F(x, u) \equiv \int_0^u f(x, s) ds.$$

次の汎関数に対して定理 1 を使う.

$$I(u) \equiv \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u) \right) dx \quad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

$I(u)$  が定理 1 の仮定 (A1), (A2) を満たす事を示す. (A1) は明らか. (B2) を使って (A2) を示す. 簡単のため 仮定 (B2) において  $x_0 = 0$  とする.  $0 \in \Omega$  である.

$$D(r) \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq r \ (1 \leq i \leq n)\}$$

とおくと,  $D(r)$  は  $n$  次元の立方体.  $r > 0$  を十分小さく取り,  $D(r) \subset \Omega$  としておく. 仮定 (B2) より,  $\exists\{\alpha_j\}, \exists\{M_j\}$ :

$$(12) \quad \alpha_j \searrow 0, M_j \nearrow \infty, \quad \alpha_j^{-2} F(x, \alpha_j) \geq M_j \quad (x \in D(r)).$$

$$\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : u^{-2} F(x, u) \geq -C \quad (x \in D(r), |u| \leq \varepsilon).$$

今  $F(x, u)$  は  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  上で有界なので,  $C$  を取りなおせば,  $\varepsilon = \infty$  とできる. すなわち

$$(13) \quad \exists C > 0 : u^{-2} F(x, u) \geq -C \quad (x \in D(r), u \in \mathbb{R}).$$

$k \in \mathbb{N}$  を固定する.  $p^n \geq k$  となる最小の  $p \in \mathbb{N}$  をとる.  $D(r)$  を各辺ごとに  $p$  個に等分割する. 全部で  $p^n$  個の小立方体ができる. そのうち  $k$  個のみを利用する. 小立方体の一辺の長さは,  $r/p$  である. これを  $\delta$  と書く. すなわち  $\delta = r/p$ . 各小立方体に番号を打ち,  $\{D_i\}_{i=1}^k$  とする.  $D_i$  の真ん中に一辺の長さが  $\delta/2$  の小立方体を作り, これを  $E_i$  と書く.  $\phi(t)$  を図 1 のように定義する.

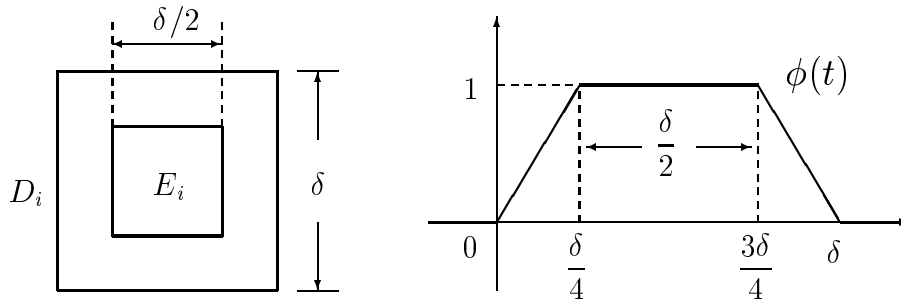


図 1:

$$\psi(x) \equiv A\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

とおく. ただし  $A > 0$  は,  $\|\nabla\psi\|_{L^2} = 1$  となるように取る.  $\psi(x)$  を平行移動し, そのサポートが  $D_i$  に入るようにしたものを  $\psi_i(x)$  と書く. 従って,

$$\text{supp } \psi_i \subset D_i, \quad \text{supp } \psi_i \cap \text{supp } \psi_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$\psi_i(x) = A \quad (x \in E_i), \quad 0 \leq \psi_i(x) \leq A, \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \|\nabla\psi_i\|_{L^2} = 1.$$

が成り立つ. 今,  $V_k$  と  $W_k$  を

$$V_k \equiv \left\{ (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : \max_{1 \leq i \leq k} |t_i| = 1 \right\}$$

$$W_k \equiv \left\{ \sum_{i=1}^k t_i \psi_i(x) : (t_1, \dots, t_k) \in V_k \right\}$$

と定義すると,  $V_k$  は  $k$  次元立方体の境界なので,  $\gamma(V_k) = \gamma(S^{k-1}) = k$ , また  $\gamma(W_k) = \gamma(V_k) = k$  である.  $W_k$  はコンパクトなので,  $\|\nabla u\|_2^2 \leq C_k$  ( $u \in W_k$ ) を満たす  $C_k > 0$  が存在する. ただし,  $\|\cdot\|_2$  は  $L^2$  ノルムを表す.

$s > 0$ ,  $u = \sum_{i=1}^k t_i \psi_i(x) \in W_k$  のとき,

$$\begin{aligned} I(su) &= \frac{s^2}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\Omega} F(x, su) dx \\ &\leq \frac{s^2}{2} C_k - \int_{D(r)} F(x, s \sum_{i=1}^k t_i \psi_i(x)) dx \\ (14) \quad &= \frac{s^2}{2} C_k - \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F(x, s t_i \psi_i(x)) dx. \end{aligned}$$

今,  $(t_1, \dots, t_k)$  の中で少なくとも1つ  $|t_j| = 1$  となる  $j$  があり, その他のものは,  $|t_i| \leq 1$  となる. (14) の最後の項を次のように評価する.

$$\sum_{i=1}^k \int_{D_i} F(x, s t_i \psi_i(x)) dx = \int_{E_j} \cdots dx + \int_{D_j \setminus E_j} \cdots dx + \sum_{i \neq j} \int_{D_i} \cdots dx.$$

右辺第一項は,

$$\int_{E_j} F(x, st_j \psi_j(x)) dx = \int_{E_j} F(x, sA) dx.$$

また, (13) より, ある  $A_k > 0$  が存在して, 第二項と第三項の積分は合わせて  $-A_k s^2$  で下から評価される. ゆえに

$$\sum_{i=1}^k \int_{D_i} F(x, st_i \psi_i(x)) dx \geq \int_{E_j} F(x, sA) dx - A_k s^2.$$

この式を (14) に代入して,

$$I(su) \leq \frac{s^2}{2} C_k + A_k s^2 - \int_{E_j} F(x, sA) dx.$$

この式に  $s = \alpha_m/A$  を代入する. ただし  $\alpha_m$  は (12) で定義したもの.  $M_m \rightarrow \infty$  なので,  $m$  が十分大きいとき,

$$\begin{aligned} I((\alpha_m/A)u) &\leq \alpha_m^2 A^{-2} (A_k + C_k/2) - M_m \alpha_m^2 \text{vol}(E_j) \\ &\leq \alpha_m^2 A^{-2} (A_k + C_k/2 - B_k M_m) < 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\sup_{u \in (\alpha_m/A)W_k} I(u) < 0.$$

$(\alpha_m/A)W_k \in \Gamma_k$  なので, (A2) が成り立つ.

(証明終.)

## 参考文献

- [1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.
- [2] D. C. Clark, A variant of the Lusternik-Schnirelman theory, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972) 65–74.
- [3] P. H. Rabinowitz, “Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,” CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 65, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.