研究集会 PPM2005

アブストラクト

「偏微分方程式と現象：
PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005」
2005年11月18日(金)～11月19日(土)

http://www.pref.miyazaki.lg.jp/h-mythroad/toha/index_i.htm

研究集会　「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005 (略称：PPM2005)」

日時：　2005 年 11 月 18 日（金）～ 11 月 19 日（土）

会場：　宮崎大学工学部総合研究棟２階プレゼンテーション室 (D204)

案内：　http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2005.html

プログラム

11 月 18 日（金）

午後の部

14:30-15:20　**中原 明生**（日本大学）

「ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御」

15:40-16:30　**中根 和昭**（大阪電気通信大学）

「剥離現象に対するモデリングとその数理解析」

16:40-17:30　**野々村 真規子**（広島大学）

「ソフトマテリアルにみられる秩序構造について」

11 月 19 日（土）

午前の部

10:00-10:50　**友枝 謙二**（大阪工業大学）

「吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について」

11:00-11:50　**中島 主恵**（東京海洋大学）

「競争係数無限大の競争系の界面の形成について」

午後の部

13:30-14:20　**宮本 安人**（北海道大学）

「2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が
不安定になるための一般的な判定法について」

14:30-15:20　**小林 孝行**（佐賀大学）

「Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について」

15:40-16:30　**宮崎 倫子**（静岡大学）

「Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について」

16:40-17:30　**愛木 豊彦**（岐阜大学）

「バネの方程式と自由境界問題」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉／若手 B：北、矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関する漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

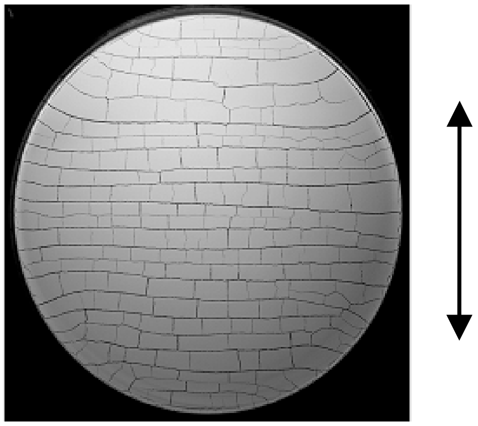
世話人：　辻川 亨、仙葉 隆、北 直泰、矢崎成俊（宮崎大学）

連絡先：　辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科
E-mail：tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL：0985-58-7381／0985-58-7288（事務室）& FAX：0985-58-7289

ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御

日本大学理工学部・一般教育　中原明生

粉と水を混ぜて混合液を作り容器に入れ乾燥させると、「干上がった沼地」のような等方的なセル状亀裂が発生する。我々は粉と水との混合比を変化させて乾燥破壊の実験をおこなったところ、粉に対して水の混合比率が低く混合液がペースト状の場合には、混合液を入れた容器を初期段階で揺すっておくと、その後乾燥して発生する亀裂パターンが「初期に揺すった方向」に垂直な縞模様になることを実験的に見出した。



この実験結果は、ペーストに対して降伏応力以上の外力を加えるとペーストがせん断流動をすること、このせん断流動の方向がペーストに記憶されていること、この記憶に従ってその後の乾燥破壊時に現れる亀裂の進行方向が決められていることを示している。これらのことより、この実験はソフトマターのレオロジーとしては「ペーストのメモリー効果」という理学的に興味深い現象となっている。

また、この実験は「亀裂の進行方向の制御」という工学的な応用面でも非常に意義のあるテーマであることがわかる。破壊制御とは本来破壊をおこさないようにする制御のことであるが、本実験は「仮に破壊は避けられない場合においても、その際どのように破壊されるか事前に制御できれば、常に最悪の状況は回避できる」という新たな破壊制御の考えを実現したものと言えよう。

ソフトマテリアルにみられる秩序構造について

野々村真規子（広島大学）

高分子ジブロック共重合体は、相分離におけるドメインの成長がメソスケール以下でとまり、安定な周期構造が形成されることで知られている。このような相分離はミクロ相分離とよばれている。形成される周期構造には、ラメラ構造、シリンダー構造、BCC 球構造、ジャイロイド構造があり、どのような条件（温度や組成比など）でどれが熱平衡構造であるかはよく調べられている。また近年では、温度の変化によって、安定だった構造を不安定化させ、別の構造への転移過程を調べる実験が行われているようになってきている。我々は、ミクロ相分離に汎用的に適用できる自由エネルギーを用いて、この構造間の転移キネティクスを研究している。転移の過程で見られる様々な中間構造を中心に転移キネティクスのシミュレーションの結果を紹介する。

吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について

友枝 謙二
大阪工業大学工学部
E-mail: tomoeda@ge.oit.ac.jp

要約
拡散と吸収との相互作用に関する数理モデルは 多くの分野での興味深い現象を記述するのに用いられている．中でもこの相互作用によって引き起こされる著しい性質の一つにサポートの分離現象がある．典型的な数理モデルとしては、1 次元空間での吸収性媒体流れを記述する次の方程式が知られている．この場合 サポートとは流体の浸透領域を意味する．

$$v_t = (v^m)_{xx} - cv^p, \qquad x \in \mathbf{R}^1, \quad t > 0, \tag{1}$$
$$v(0,x) = v^0(x), \qquad x \in \mathbf{R}^1, \tag{2}$$

ただし以下の仮定をおく．

(i) $m(>1)$, $p(>0)$ と $c(\geq 0)$ は 定数で $m+p \geq 2$ とする;

(ii) $v^0(x) \in C^0(\mathbf{R}^1)$ は非負でコンパクトサポートを持つ．

解析的な観点からは以下のことが示されている ([2, 3],[6]):

(P-1) $c = 0$, または $c > 0$ 且つ $p \geq 1$ の時は 拡散効果が優勢であり supp $v(t,\cdot)$ は時間発展に伴って単調に拡がっていく．

(P-2) $c > 0$ 且つ $0 < p < 1$ の時は 吸収効果が優勢であり、解はある有限時刻 $T^*(>0)$ で消滅する．

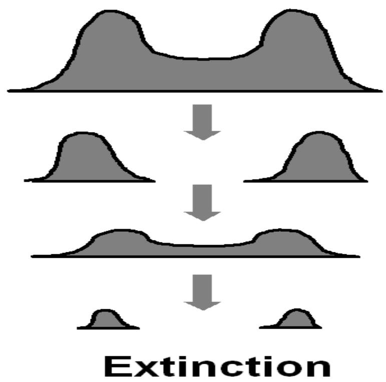


Figure 1: Numerical support re-splitting phenomena.

(P-1) の場合、 連結な初期サポートから出発した解のサポートは 決して分離しない．(P-2) の場合、2 つの極大値を持つ初期関数から出発した解のサポートは 分離する可能性がある ([1],[5])．さらに 数値サポートの再分離現象をも得られている．数値計算の観点から、分離現象、融合現象、さらに再分離現象が正しいか否か判定するのは困難である．なぜなら 数値計算に用いた時間ステップと空間メッシュ幅は十分小ではあるがしかし零ではないからである．本講演では、$m+p=2$ $(0<p<1)$ の場合を扱い、再分離現象を再現するような初期関数の構成法について述べる．そのための準備として分離現象と界面方程式について記す．なお、記号についての詳細は講演時に述べる．

分離現象と界面方程式
$u \equiv v^{m-1}$ と置き換えることによってもとの方程式を以下の形に書き換える．

$$u_t = muu_{xx} + \frac{m}{m-1}(u_x)^2 - (m-1)c, \tag{3}$$
$$u(0,x) = u^0(x) \equiv (v^0(x))^{m-1}. \tag{4}$$

分離定理 ([5]) supp $v^0(t,\cdot) = [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta_2 < \alpha_2$ とし 以下の不等式を仮定する．

$$\frac{u^0(\beta_j)}{(m-1)c + mC_0C_E} > \frac{\|u^0\|_{L^1(\gamma_1,\gamma_2)}}{(m-1)c(\gamma_2-\gamma_1) - (m+a)C_0TV(u_x^0)} > 0\ . \tag{5}$$

ただし、$a = \frac{m}{m-1}$. すると 解 $v(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0$ 且つ $v(\tilde{t}, \beta_j) > 0 (j = 1, 2)$ となる $\tilde{t} > 0$ と $\tilde{x} \in [\gamma_1, \gamma_2]$ が存在する.

界面方程式 ([4]) 以下のことを仮定する.

$$u_x^0(\alpha_1 + 0) > 0. \tag{6}$$

ただし、supp $u^0 = [\alpha_1, \alpha_2]$. このとき 左側の界面 $\xi(t)$ は次式で表される.

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{m}{m-1} u_x(t, \xi(t) + 0) + \frac{(m-1)c}{u_x(t, \xi(t) + 0)} \quad \text{for } t \in (0, T), \tag{7}$$

$$\xi(0) = \alpha_1, \tag{8}$$

ただし T は $u_x^0(\alpha_1 + 0)$ に依存する正数である.

なお、右側の界面方程式もこの定理に倣って表すことができる.

References

[1] X.-Y. Chen, H. Matano and M. Mimura, *J. reine angew. Math.*, **459**(1995),1–36.

[2] A.S. Kalashnikov, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **14** (1974), 891–905.

[3] A.S. Kalashnikov, *Russian Math. Surveys*, **42** (1987), 169–222.

[4] T. Nakaki and K. Tomoeda, A finite difference approach to the interface equation for some nonlinear diffusion equations with absorption, *Proc. Japan Acad.*, **77**, Ser. A(2001), 32–37.

[5] T.Nakaki and K.Tomoeda, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40**(2002),945-964.

[6] O.A. Oleinik, A.S.Kalashnikov and Chzou Yui-Lin, *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22** (1958), 667–704.

競争係数無限大の競争系の界面の形成について

中島主恵
東京海洋大学 海洋科学部

次のようなロトカ・ボルテラ型の競争拡散系をノイマンゼロ境界条件下で考える.

$$\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + (a - eu - bv)u, & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ v_t = D_2 \Delta v + (e - fv - cu)v, & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

ここで $D_1, D_2, a, b, c, d, e, f$ は正の定数, Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかなものとする. $u = u(x,t)$ と $v = v(x,t)$ は競争関係にある２種の生物の個体数密度である. 本講演では２種間の競争が非常に激しい場合の解の挙動を考える. 方法としては, 種間競争率 b, c を $b, c \to \infty$ とした特異極限を解析することにより競争係数が非常に大きい状況について論じる. とりわけ興味があるのは u と v の間に極端な優劣の差がない状況である. すなわち b/c を一定に保ったまま $b, c \to \infty$ とする状況を考える.

形式的計算や数値実験より, 微小時間内に２種の棲息領域は完全に分離され, 両種の縄張りの境目 $\Gamma(t)$ があらわれる. その後 $\Gamma(t)$ はある法則に従い運動をはじめるが, その運動は次の自由境界問題に支配される.

$$\begin{cases} u_t^* = \Delta u^* + (a - u^*)u^*, \quad v^* \equiv 0 \quad \text{in } R(t), \\ v_t^* = D\Delta v^* + (d - v^*)v^*, \quad u^* \equiv 0 \quad \text{in } \Omega \backslash R(t), \\ c\dfrac{\partial u^*}{\partial \nu} + bD\dfrac{\partial v^*}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \Gamma(t), \end{cases} \tag{1}$$

ここで

$$\Gamma(t) = \partial R(t),$$

ν は $\Gamma(t)$ の内向き法線.

以上の現象を数学的に厳密に証明する. 証明は２種類の相異なる優劣解を構成することによる. ２種類のうちひとつは界面が形成される初期段階における優劣解であり, もうひとつはその後界面が自由境界問題の解とともに運動する過程における優劣解である. 最後に２つの優劣解をつなぎあわせて一連の解の挙動を記述する.

2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が不安定になるための一般的な判定法について

宮本 安人[†]
(北海道大学大学院工学研究科知識メディアラボラトリー)

非線形解析において，安定定常解すなわち物理的に実現可能である安定なパターンを探すことは，多くの研究者の興味を引き付けてきた．数学的な視点からは，1. 定常解の形状，2. それらの安定性，3. 領域の形状，の三つの関連が興味の対象となってきた．本講演では，自然現象のモデル方程式（系）に多く現れる Neumann 境界条件下の反応拡散方程式（系）の定常解の安定性について考える．

Casten-Holland[CH78] は 1978 年に，俣野 [M79] は 1979 年に，独立に一般次元の凸領域上の単独反応拡散方程式の非定数定常解は不安定となることを示した．西浦 [N94] は 1994 年に，１次元有界区間上の活性・抑制系と呼ばれる反応拡散系の shadow system（下記の (SS) のような関数とスカラーの組の偏微分方程式系）において，定数関数と単調関数以外の定常解は不安定であることを示した（この結果は，後に Ni-Poláčik-柳田 [NPY01] によって，より広いクラスの反応拡散系に対して成立することが示された）．

多次元領域上の（単独ではない）反応拡散系における定常解の形状と不安定性の関係は，どのようになっているのだろうか？いくつかの重要な系については,（例えば球などの）凸領域の場合においても，安定な非定数定常解の存在が知られている．例えばヒドラと呼ばれる体長 5mm ほどの小さな生物の「頭」の形態形成に関するモデル方程式系である Gierer-Meinhardt 系の shadow system は，2 次元円盤領域では（中立）安定な境界スパイク解と呼ばれる非定数定常解を持つことが知られている [NTY01]．一方，反応拡散系が勾配系 [JM94] や歪勾配系 [Y02] などの特殊な構造を持つ場合は，多次元においても領域が凸ならば,「抑制方程式の時定数と呼ばれる変数（下記の (SS) における τ に相当）がある程度大きい」といった条件の下で，全ての非定数定常解が，不安定であることが知られている．特に上記の Gierer-Meinhardt 系は歪勾配系の例となっており，一見矛盾した結果に思われる．しかし，上記の条件は，時定数 τ が小さい場合を含まず，その場合において，安定な非定数定常解が存在することが，予想される（このことは，下記の系Bの後に記した直感的議論によって自然に了解されるであろう）．従って，反応拡散系においては非定数定常解が安定になりやすいと思われる時定数 τ が小さな場合を含む結果が，重要となる．

そこで，1. 時定数 τ が小さい場合を含み，2. 多次元領域上の，3. 特定の系ではなく広いクラスの（単独ではない）反応拡散系に対し，**「安定ならば，どのような形か？」**，すなわち，定常解の形状とその不安定性の関係が問題となる．しかし，この問題に関する結果は，これまで知られていないように思われる．それは,「多次元領域上で定義された関数の形状を，どのように数学的に表現するか？」といった問題が潜在的でありあまり意識されないことが,（数学上の技術的困難さと共に）原因であるように思われる．

本講演では，2 次元円盤領域上の（Gierer-Meinhardt 系や FitzHugh-Nagumo 系と呼ばれる代表的な反応拡散系を含む）活性・抑制系の shadow system （f, g は C^2 級．また，定理Aの (N1) と (N2) を参照せよ）

$$u_t = \Delta u + f(u,\xi) \ \text{ in } \ B_R(O), \qquad \tau\xi_t = \int_{B_R(O)} g(u,\xi)dxdy, \qquad \text{(SS)}$$
$$\partial_\nu u = 0 \ \text{ on } \ \partial B_R(O),$$

に対して，定常解 $(u(x,y),\xi) \in (C^2(B_R(O)) \cap C^0(\overline{B_R(O)})) \times \mathbb{R}$ が不安定となるための下記の十分条件 (A) を提示する．

$$\mathcal{Z}\left[U_\theta(\,\cdot\,)\right] \geq 3, \quad \text{かつ } u \text{ は（円盤領域 } B_R(O) \text{ 上で）定数定常解ではない．} \qquad \text{(A)}$$

ここで，$U(\theta) := u(R\cos\theta, R\sin\theta)$，$\mathcal{Z}\left[\,\cdot\,\right]$ は，次で定義する任意の 2π 周期連続関数の零等高面の濃度とする．すなわち，任意の $w(\theta) \in C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ に対して，

$$\mathcal{Z}\left[w(\,\cdot\,)\right] := \sharp\{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\ w(\theta) = 0\}.$$

条件 (A) において，２次元円盤領域上定義された関数の形状が，領域の境界に制限した関数 $U(\theta)$ の臨界点の数 $\mathcal{Z}\left[U_\theta(\,\cdot\,)\right]$ を用いて表現されていることに注意せよ．

[†] 〒 060-0812 北海道札幌市北区北 12 条西 6 丁目北海道大学電子科学研究所，情報数理分野（西浦教授室）
e-mail: miyamoto@nsc.es.hokudai.ac.jp

下記の定理Ａと系Ｂが本講演の主結果である．

定理 A

$(u(x,y),\xi)$ は (A) を満たす (SS) の定常解とする．
(ｉ) 非線形項が (N1) を満たすとき，任意の $\tau>0$ について，(u,ξ) は不安定．
(ii) 非線形項が (N2) を満たすとき，ある $\tau_0>0$ が存在し，$\tau>\tau_0$ ならば，(u,ξ) は不安定．
ここで，(N1) と (N2) は以下で定義する．

$$f_\xi<0,\quad g_\xi<0,\quad \text{ある関数 } k(\xi) \text{ が存在し}, g_u(u,\xi)=k(\xi)f_\xi(u,\xi) \text{ を満たす}, \tag{N1}$$

$$f_\xi<0,\quad g_u>0,\quad g_\xi<0. \tag{N2}$$

条件 (A) の否定命題は，必ずしも自明ではないが，上記の定理Ａ (ｉ) の対偶命題が下記の系Ｂである．

系 B

(u,ξ) を (SS) の定常解とする．非線形項が (N1) を満たすとき，ある $\tau>0$ について (u,ξ) が安定ならば，$\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)]=2$ または，u は（円盤領域 $B_R(O)$ 上の）定数定常解．

主結果のうち，特に定理Ａ (ｉ) と系Ｂは，時定数 τ が小さい場合も含み，この場合が重要であることは上記したが，それを直感的に解釈すると次のようになる．時定数 τ は抑制因子の反応速度を表し，τ が小さいときは，その反応速度が速く系全体を安定化させる効果があり，その意味において安定化させる効果が強い状況（τ が小さい場合）をも含む結果であるからである（ところで時定数 τ を適当に固定したときの活性・抑制系の定常解が不安定であっても，時定数 τ を固定した値より小さくすると安定となる場合がある．そのような場合は通常，τ を 0 付近から大きくすると，その安定な定常解は Hopf 分岐を起こし不安定化し，時間周期的な解が現れる）．

最近，Lin-高木 [LT01] によって，上記の 2 次元円盤領域上の Gierer-Meinhardt 系の shadow system の（中立）安定な境界スパイク解は，$\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)]=2$ であることが示されており，この結果は系Ｂと符合する．また，系Ｂによって，2 次元円盤領域上の活性・抑制系の安定定常解は，Gierer-Meinhardt 系における境界スパイク解に似た形状の定常解のみであることが，示唆される．

参考文献

[CH78] R. Casten and R. Holland, Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions, J. Diff. Eq., **27**(1978), 266–273.

[JM94] S. Jimbo and Y. Morita, Stability of nonconstant steady-state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions, Nonlinear Anal., **22**(1994), 753–770.

[LT01] C. S. Lin and I. Takagi, Method of rotating planes applied to a singularly perturbed Neumann problem, Calc. Var. Partial Differential Equations, **13**(2001), 519–536.

[M79] H. Matano, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **15**(1979), 401–454.

[N94] Y. Nishiura, Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit, Dynamics Reported, **3**(1994), 25–103.

[NPY01] W. M. Ni, P. Poláčik and E. Yanagida, Monotonicity of stable solutions in shadow systems, Trans. Amer. Math. Soc., **353**(2001), 5057–5069.

[NTY01] W. M. Ni, I. Takagi and E. Yanagida, Stability of least energy patterns of the shadow system for an activator-inhibitor model, Japan J. Indust. Appl. Math., **18**(2001), 259–272.

[Y02] E. Yanagida, Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure, J. Diff. Eq., **179**(2002), 311–335.

Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について

佐賀大・理工　小林　孝行
Takayuki KOBAYASHI
Department of Mathematics
Faculty of Science and Engineering, Saga University

大阪大・基礎工　鈴木　貴
Takashi SUZUKI
Division of Mathematical Science
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

自己重力場における圧縮性粘性気体の運動を記述した Navier-Stokes-Poisson 方程式:

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + \nabla\cdot(\rho u) = 0,\\
&(\rho u)_t + \nabla\cdot(\rho u\otimes u) + \rho\nabla\Phi + a\nabla\rho^\gamma = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u),\\
(1)\quad &\Delta\Phi = 4\pi g\left(\rho - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \rho\,dx\right) \qquad \text{in} \quad \Omega\times(0,T),\\
&u = 0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,T),\\
&\rho|_{t=0} = \rho_0,\quad (\rho u)|_{t=0} = q_0 \qquad \text{in} \quad \Omega,
\end{aligned}
$$

を考える．ここで，Ω は $C^{2,\theta}$ の境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbf{R}^3$ の有界領域，ν は単位外法線ベクトル，$\rho=\rho(x,t)$ は流体の密度，$u=(u^1(x,t),u^2(x,t),u^3(x,t))$ は流速，$\Phi=\Phi(x,t)$ は Newtonian gravitational potential，$\gamma>1$ は adiabatic constant，$\mu>0$ と λ は $\lambda+\frac{2}{3}\mu\ge 0$ をみたす粘性係数，$a=e^S$ はエントロピー S によって決まる定数，$g>0$ は万有引力定数である．

解が滑らかのとき，方程式 (1) より質量保存則

$$M = \int_\Omega \rho\,dx$$

が得られ，またエネルギー

$$
\begin{aligned}
E &= \int_\Omega\left(\frac{\rho}{2}|u|^2 + \frac{P}{\gamma-1}\right)dx + \frac{g}{2}\int\int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)\rho(x)\rho(y)\,dxdy\\
&\qquad + \int_\Omega\left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\nabla\cdot u|^2\right)dx\\
&= \frac{a}{\gamma-1}\|\rho\|_\gamma^\gamma + \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}u\|_2^2 - \frac{1}{8\pi g}\|\nabla\Phi\|_2^2 + \mu\|\nabla u\|_2^2 + (\lambda+\mu)\|\nabla\cdot u\|_2^2
\end{aligned}
$$

は減衰することがわかる．ここで， $P = a\rho^\gamma$ は圧力であり，$G = G(x, y)$ は Poisson 方程式の Green 関数，即ち

$$\Phi(x) = g \int_\Omega G(x, y)\rho(y)\,dy$$

である．我々は次の結果を得た．

定理 1 $T > 0$ とし $\gamma > \dfrac{3}{2}$ とする．初期値 (ρ_0, q_0) は $\rho_0 = \rho_0(x) \geq 0$, $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega)$, $|q_0^i|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$, さらに，$\rho_0(x) = 0$ のとき $q_0^i(x) = 0$ を満たすとする．このとき，次をみたすエネルギー有限な (1) の弱解 (ρ, u, Φ) が存在する*:*

1. $\rho = \rho(x,t) \geq 0, \rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega)), u^i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.
2. $E = E(t) \in L^1_{loc}(0, T)$.
3. $\dfrac{d}{dt}E(t) \leq 0 \quad in \quad \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$.
4. 方程式 $(1)_1, (1)_2$ は $\mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ の意味で成り立つ．
5. $\Phi(\cdot, t) = g \displaystyle\int_\Omega G(\cdot, y)\rho(y, t)\,dy \quad for\ a.e.\ t \in (0, T)$.
6. ρ, u の Ω の外への零拡張は，方程式 $(1)_1$ を $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3 \times (0, T))$ の意味でみたす．
7. 方程式 $(1)_1$ は *renormalized solution* の意味で成り立つ．すなわち任意の $b \in C^1(\mathbf{R})$, $b'(z) = 0$ ($|z|$: 十分大) に対して，$\mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ の意味で
$$\frac{d}{dt}b(\rho) + \nabla \cdot (b(\rho)u) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\nabla \cdot u = 0$$
が成り立つ．

証明は *E. Feireisl, A. Novotoný, and H. Petzelotová* [1] の方法に従う．

参考文献

[1] E. Feireisl, A. Novotoný, and H. Petzelotová, On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids, J. math. fluid mech. 3 (2001) 358–392

Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について

宮崎倫子 (静岡大学・工学部)

次の n 次元の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

を考える．ここで, Ω を n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内のある領域とし, f は領域 Ω から $\mathbf{R}^n$ への C^1 級関数であると仮定する．また, (1) は周期が $\omega > 0$ の不安定な周期解 $x^*(t)$ を持つとする．この不安定な周期解 $x^*(t)$ を安定化する方法のひとつとして, 1992 年に Pyragas [4] によって提案された Delayed Feedback 制御（以下, DF 制御）というものがが知られている．それは, (1) に状態フィードバックを施した次の時間遅れを持つ n 次元の微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + u(t) \\ u(t) = K(x(t-\omega) - x(t)) \end{cases} \tag{2}$$

で与えられる．ここで, K は $n \times n$ 定数行列でフィードバックゲインと呼ばれている．制御入力 $u(t)$ は, 時刻 t での状態と, 安定化したい周期解の周期分だけさかのぼった時刻 $t-\omega$ での状態の差で与えられると言うのがこの方法の特長である．Pyragas はこの方法をレスラー方程式に適用した数値シミュレーション結果を提示することによって提案した．その後, 手法の簡便性から応用分野においてうまく適用された結果が得られているが, 解析的な研究はまだまだ追いついていないのが実状である (例えば, [5] の本文の第 1 段落から第 3 段落参照).

DF 制御において, 解析的に証明すべき観点としては, (i) DF 制御がうまく適用できるようなシステムの条件を求める; (ii) DF 制御によって得られた周期解のロバスト性の保証; などが考えられる．(i) については, 周期解のまわりでの線形変分方程式のフロッケ指数を解析することが解析手法の主流となっている．特に, 不安定周期解が正のフロッケ指数を奇数個もつ場合には, DF 制御が適用できないことが古くから知られている [1,2]. 最近では, ゲイン行列に制約はあるものの, DF 制御が適用できるようなフロッケ乗数についての注目すべき結果も得られている [3]. (ii) に関しては, DF 制御の解析的な結果の多くは, 時間遅れを周期に一致させた上での理論である．しかし, 数値計算において時間遅れを周期に誤差なく一致させることは困難である．したがって, このような観点での研究も必要であると思われるが, 現段階ではあまり注目されていないようである.

本講演では, DF 制御について紹介すると共に, DF 制御における周期解の安定化問題を実際に解析する際に遭遇する問題点やその中で得られた結果について報告する.

参考文献

[1] Just, W. *et. al.*, Mechanism of time-delayed feedback control, *Phys. Rev. Lett.*, (1997), **78**, 203–206.

[2] Nakajima, H., On analytical properties of delayed feedback control of chaos, *Phys. Lett. A*, (1997), **232**, 207–210.

[3] Nakajima, H., Some sufficient conditions for stabilizing periodic orbits without the odd-number property by delayed feedback control in continuous-time systems, *Phys. Lett. A*, (2004), **327**, 44–54.

[4] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A*, (1992), **170**, 421–428.

[5] Pyragas, K. *et. al.*, Delayed feedback control of dynamical systems at a subcritical Hopf bifurcation, *Phys. Rev. E*, (2004), **70**, 056222.

バネの方程式と自由境界問題

愛木豊彦（岐阜大学・教育学部）

本講演では，バネの運動を記述する非線形方程式に対する初期値境界値問題を考える。以下，u は変位，ε は歪みを表し，$Q(T) := (0,T) \times (0,1)$, $T > 0$, とする。ここで，以下の問題を考える。

問題： Find $u = u(t,x)$ on $Q(T)$ satisfying

$$\rho_0 u_{tt} + \gamma u_{xxxx} - \mu u_{txx} - k\varepsilon_x = 0 \quad \text{in } Q(T), \tag{1}$$

$$u(t,0) = 0, u(t,1) = 0, u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) = 0 \quad \text{for } 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = v_0(x) \quad \text{for } 0 < x < 1, \tag{3}$$

ここで， ρ_0 は密度, κ はフックの法則の係数，$\gamma > 0$, $\mu > 0$，そして，u_0, v_0 は初期値である。さらに，歪みと変位の関係を次で与える。

$$\varepsilon = \frac{u_x}{1 - u_x}.$$

通常，u_x が十分に小さいと仮定し，$\varepsilon = u_x$ という線形化したものを扱うが，ここではそのままの形で扱う。最終的には，形状記憶合金問題に対する自由境界問題を扱いたいので，それを $\gamma > 0$, $\mu > 0$ という近似を考えているが，ここではまず，上記固定領域での場合について考える。

解の定義

$u \in W^{2,2}(0,T;(H_0^1(0,1))^*) \cap W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(0,1)) \cap L^\infty(0,T;H^3(0,1)) \cap W^{1,2}(0,T;H^2(0,1))$

$$< u_{tt}(t), \eta > -\gamma(u_{xxx}(t), \eta_x) - \mu(u_{txx}(t), \eta) - (\frac{u_x(t)}{1 - u_x(t)}, \eta) = 0 \text{ for } \eta \in H_0^1(0,1)$$

ここで， $(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積，$< \cdot,\cdot >$ は $(H_0^1(0,1))^* \times H_0^1(0,1))$ の duality pair.

主定理　ρ_0 は定数，$u_0 \in H^3(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $v_0 \in H_0^1(0,1)$

$$|v_0|^2_{L^2(0,1)} + \frac{\gamma}{2}|u_{0xx}|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 (\frac{u_{0x}}{1 - u_{0x}})dx \ll 1$$

ならば，上記の問題 (1)~(3) は任意の $T > 0$ に対し，一意的な弱解をもつ。

解の存在は，近似解の構成によって示される。また，解の一意性は共役の方程式を用いる方法 ([1]) から示される。ε が非線形なのでテスト関数を方程式にかけるという方法では証明ができない。

参考文献

[1] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type,* Transl. Math. Monograph 23, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1968.