

報告集

ひむか神話街道 ルート図

- 凡例
- 有形文化財、場所等
 - 無形文化財、祭り等



「偏微分方程式と現象 :
PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005」
2005年11月18日(金)~11月19日(土)

はじめに

お陰さまで PPM と題した研究集也会も昨年度で 3 回目を無事終了することができました。前回までは 3 日間であった会期を今回は 2 日間にしての開催でしたが、参加者は講演者も含め延べ 20 人となり、少数精鋭で盛り上がった会合になったと思います。講演者の方々は、最先端の現在進行中の研究を惜しげなく披露され、魅力的な講演のオンパレードで、あっという間の研究集会であったと感じたのは我々だけではないでしょう。改めまして講演者の皆様、また、遠方から駆けつけてくださいました参加者の皆様に感謝申し上げます。

さて、本冊子は楽しかった研究集会の証です。講演者の方々には、報告集作成にあたり、以下の目的とお願いをいたしておりました。

作成目的 それぞれのご専門で発展した優れた技術の伝承、共有、もしくは再認識のための、または萌芽的研究の紹介のための、あるいはフィールドの異なる研究間における共通言語獲得のための、冊子を目指しております。

お願い このような目的のため、論文調よりもむしろ以下のような点を含めまして、原稿を作成していただけますと幸いです。

- 多少の入門的解説、あるいは概説
- 問題意識、詳しい動機背景、あるいは面白い点、セールスポイント
- 今後の発展、もしくは妄想も含めた展開（大歓迎！）

誠に僭越なお願いではございましたが、講演者の皆様には、日本語でわかりやすい講演録を書いていただき、本研究集会の“証”を発刊することができました。重ねて御礼を申し上げます。

尚、本報告集の PDF ファイルは、

<http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2005.html>

より入手できます。カラー図版等の閲覧にご利用ください。また、過去の研究集会 PPM2003, PPM2004 の報告集も上記 WEB サイトから迎えることができますので、合わせてご参照いただけますと幸いです。

本研究集会は、いくつかの科学研究費補助金の援助を受けました。補助金番号の一覧は次々ページのプログラムの最後に掲載してあります。最後に、研究集会開催にあたり、ご協力くださった関係者の方々全てに感謝の意を表したいと思っております。

2006 年 4 月

世話人を代表して

矢崎成俊

目次

1. 中原 明生 (日本大学)
ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御 6-11
2. 中根 和昭 (大阪電気通信大学)
剥離現象に対するモデリングとその数理解析 12-19
3. 野々村 真規子 (広島大学)
ソフトマテリアルにみられる秩序構造について 20-24
4. 友枝 謙二 (大阪工業大学)
吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について ... 26-31
5. 中島 主恵 (東京海洋大学)
競争係数無限大の競争系の界面の形成とその挙動について 32-44
6. 宮本 安人 (北海道大学)
2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が不安定になるための一般的な判定法に
ついて 46-53
7. 小林 孝行 (佐賀大学)
Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について 54-58
8. 宮崎 倫子 (静岡大学)
Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について 60-75
9. 愛木 豊彦 (岐阜大学)
バネの方程式と自由境界問題 76-80

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005 (略称：PPM2005)」

日時： 2005年11月18日(金)～11月19日(土)

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2005.html>

プログラム

11月18日(金)

午後の部

14:30-15:20 中原 明生(日本大学)

「ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御」

15:40-16:30 中根 和昭(大阪電気通信大学)

「剥離現象に対するモデリングとその数理解析」

16:40-17:30 野々村 真規子(広島大学)

「ソフトマテリアルにみられる秩序構造について」

11月19日(土)

午前の部

10:00-10:50 友枝 謙二(大阪工業大学)

「吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について」

11:00-11:50 中島 主恵(東京海洋大学)

「競争係数無限大の競争系の界面の形成について」

午後の部

13:30-14:20 宮本 安人 (北海道大学)

「2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が
不安定になるための一般的な判定法について」

14:30-15:20 小林 孝行 (佐賀大学)

「Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について」

15:40-16:30 宮崎 倫子 (静岡大学)

「Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について」

16:40-17:30 愛木 豊彦 (岐阜大学)

「バネの方程式と自由境界問題」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C(2) : 辻川、仙葉 / 若手 B : 北、矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関する漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御

日本大学理工学部 中原明生、松尾洋介

ペーストを乾燥させると収縮に伴い通常は等方的なセル状亀裂パターンが発生するが、乾燥前にペーストを揺すっておくと乾燥破壊後に発生する亀裂の方向を制御することができ、その結果縞状パターンなどの異方的な亀裂パターンを作成できることがわかった。ここで、制御され発生した亀裂の方向と事前の揺すりの方向がいつも垂直な関係にあることから、ペーストは初期に揺すった方向をその後も記憶していることになる。ペーストのレオロジー測定と亀裂パターンの形態相図を作成することにより、ペーストのメモリー効果には塑性が重要な役割を果たしていることが分かった。

1章「はじめに」

本実験を進めるにあたり、我々は二つの目的を掲げた。一つは理学的な側面として最近話題の「ソフトマターのレオロジー」の基礎研究、特に「ペーストのメモリー効果」の探求であり、もう一つは工学的な応用面としての「破壊の制御」である。

これら二つの目的を達成するテーマとして、我々は「ペーストの乾燥破壊の実験」を選んだ。ペーストとして炭酸カルシウムの粉と水の混合液を用意し、アクリル容器に流し込んで温度 25℃・湿度 30%の一定環境下で乾燥させた。乾燥が進むにつれ通常は等方的でセル状の亀裂パターン [1] が発生するが、本研究ではこれらの亀裂の進行方向を制御し異方的な亀裂パターンを作成することができたので、報告する。

2章「異方的な亀裂パターンの出現」

最初の実験的な結果として、図1のような異方的な亀裂パターンを作成できたことを報告する。ここでは、3,000 gの炭酸カルシウムの粉を1,500の水と混ぜてペーストを用意し、直径500mmの円状のアクリル容器に流し込んで乾燥破壊の実験をおこなった。

ペーストを流し込んだ直後に60秒ほど容器を水平のまま角度方向に回す形で振動させてペーストを容器内に一様に広げてから乾燥させると、乾燥を開始してから3日後に図1(a)のような放射状の亀裂パターンを得た。最初は容器の形状による効果で放射状の亀裂パターンが発生したのかと思ったが、すぐに

このアイデアは間違いであることが分かった。というのは、次の実験では揺する方向を変え、容器を水平に一方向に振動させてから乾燥させたところ、今度は図1 (b) のような縞状亀裂パターンが発生したのだ。

異方的な亀裂パターンの発生原因を見極めるために図1の (a) と (b) を注意深く見ると、「初期に揺すった方向」と「その後発生する亀裂の方向」が垂直な関係にあることが分かる。すなわち、ペーストは初期に揺すられた方向を記憶しており、このメモリー効果がその後発生する亀裂の進行方向に影響を及ぼしていることが分かった [2]。

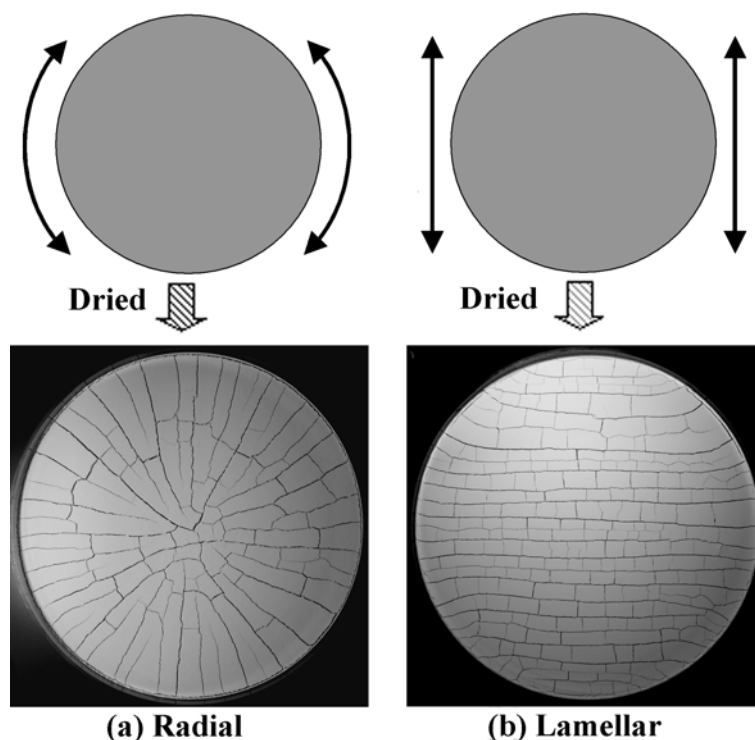


図1：異方的な亀裂パターン [2] (a) 放射状の亀裂パターン。初期に回転方向に振動させて作成。(b) 縞状の亀裂パターン。初期に一方向に振動させて作成。

異方的な亀裂パターンの成長過程も調べてみよう。図2は図3 (b) で示された縞状亀裂の成長プロセスである。図2 (a) に示された破壊の初期段階では、初期に揺すった方向に垂直な縞がまばらに発生することがわかる。時間とともに、すでにできた縞と縞の間に新たな縞ができ (図2 (b))、その後新たな縞の発生は縞間の距離がだいたいペーストの厚さ程度に減少するまで続く。破壊の最終段階では「縞状亀裂パターンの形成にともなって発生した横長の長方形形状の破片」のそれぞれが図2 (c) のように切断されて多数の短い長方形となり、最後にはアミダくじを横にしたようなパターンが得られた。

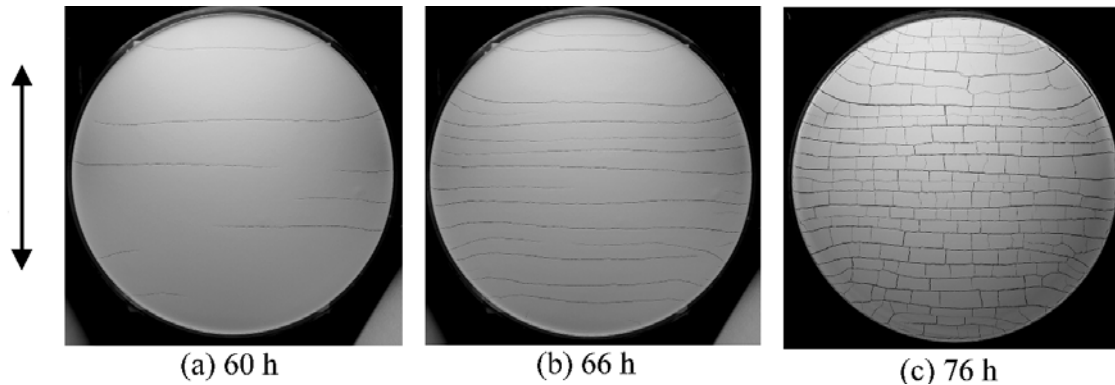


図 2 : 縞状亀裂パターンの成長 [3]。矢印は初期振動外力の方向を示す。(c)で示された最終的なパターンは図 1 (b) に対応。

3 章 「レオロジー測定」

ペーストのメモリー効果の成因について調べるために、応力制御型のレオロメーターを用いてレオロジー測定をおこなった。図 3 は「炭酸カルシウムと水の混合液」の降伏応力 σ_Y [Pa] を混合液中の粉の体積比 (volume fraction) ρ [%] で表したものである。

図中の点線は液性限界 ($\rho = 25\%$) であり、このライン以下では降伏応力がなく混合液は粘性流体と見なせる。一方、一点破線は塑性限界 ($\rho = 54\%$) を表し、このライン以上では混合液が半固体状態となり流動性を失う。そして、液性限界と塑性限界の間の領域でのみ、混合液はゼロではない有限の降伏応力を持つ塑性流体として扱うことができ、このとき降伏応力の値は体積比の増加に伴い単調にそして急激に増加する。

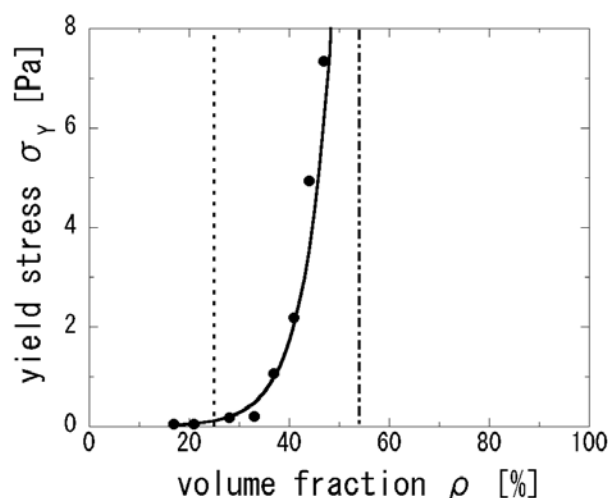


図 3 : 炭酸カルシウムと水の混合液の降伏応力 σ_Y [Pa] を体積比 ρ [%] の関数として実線で表した図 [2]。点線は液性限界、一点破線は塑性限界。

以上の結果より、本実験では塑性限界以下の体積比を持つ混合液に対して体積比を系統的に変えながら乾燥破壊の実験を行い、混合液のレオロジー特性がその後のメモリー効果にどのように影響を及ぼしているのか調べていく。

4章「亀裂パターンの形態相図」

この章では、ペーストが初期の外力を記憶してその後の亀裂パターンが異方的になる条件を求めるために、ペースト内の粉の体積比 ρ [%] と初期振動外力の強さを系統的に変化させた実験を行い、形態相図を作成した。ここで初期振動外力の強さとは初期振動の加速度を意味し、振動の振幅を r [m]、周波数を f [1/s] で表したときには、 $4\pi^2 r f^2$ [m/s²] で表現される。以下の一連の実験では、初期外力の振幅を $r = 15$ [mm] に固定し、振動数を $f = 20 \sim 60$ [rpm] に変化させて実験をおこなった。容器としては一辺の長さが 200 [mm] の正方形の亚克力製容器を用いた。各容器に入れる炭酸カルシウムの粉の量を 360 [g] に固定し、水の量を変化させて混合液中の粉の体積比を変化させた。

図4に実験的に得られた亀裂パターンの形態相図を示す。図中、等方的なセル状亀裂は○、縞状亀裂は■、セル状亀裂と縞状亀裂の混合パターンは△と▲で表している。図4から、液性限界 ($\rho = 25\%$ 、点線で示す) より体積比の大きさが小さい領域では等方的なセル状亀裂しか出現しないことが分かる。これは液性限界より下では混合液は降伏応力を持たない粘性流体なので、初期に揺すったとしてもその結果を記憶することができない、と理解される。また、塑性限界 ($\rho = 54\%$ 、一点破線で示す) よりも体積比の大きさが大きい領域では、粉と水を一緒に混ぜることができず、その結果乾燥破壊の実験自体ができないことを述べておこう。

液性限界と塑性限界の間の領域は、領域A、B、Cと三等分される。領域AとCでは等方的なセル状亀裂しか出現せず、唯一領域Bにおいてのみ異方的な縞状亀裂パターンが出現する。そして、この「縞状亀裂の方向」と「初期に容器を揺すったときの方向」とが常に垂直方向であることから、このパターンは初期外力の方向を記憶し亀裂模様として視覚化したパターンであると言える。

それでは、領域A、B、Cともに同じように液性限界と塑性限界の間の領域にあり塑性を持つペーストに対応しながら、なぜ領域Bの状況でしかペーストは初期外力の方向を記憶しなのだろうか？その答えは、「領域AとBを隔てる実線」と「領域BとCを隔てる破線」の持つ意味を知ることによって理解されることになる。

領域AとBを隔てる実線は実は図3のレオロジー測定の結果得られた混合液の降伏応力の値を用いて「降伏応力の大きさ」と「初期振動外力の最大値の大きさ」が等しい状態を描いた線である。そのため、実線より下の領域Aでは

初期外力の強さが降伏応力の値よりも常に小さい場合に該当するので、例え初期に容器は揺すられたとしても容器内のペーストは相対的にはいっさい動いていないことになる。ペーストは揺すられたと言う経験自体をしていないので、その記憶は存在しない。一方、実線よりも上の領域 B では初期外力の強さは降伏応力よりも大きくなるので、ペーストは揺れを感じ「ずり運動」をする。このずり運動の方向をペーストは記憶するわけで、その後発生する縞状亀裂の方向はつねにずり運動の方向とは垂直な関係になっている。

では、実線よりも上の領域 B と C のどちらにおいてもペーストは揺れを経験しているのに、その揺れを記憶してその後縞状亀裂が発生するのはなぜ領域 B のみなのであろうか？その答えは、初期にペーストを揺すったときのペーストの流動性を観察することによって理解される。領域 B と C を隔てる破線であるが、この破線よりも下の領域 B ではペーストは「ずり運動」していたが、この破線より上の領域 C では初期外力の強さが大きいため「波」が発生したり「乱流状態」になっている。すなわち、領域 C ではペーストが揺すられすぎて乱れが生じたため、せっかく揺れを経験したのにその記憶がかき消されてしまったことがわかった。

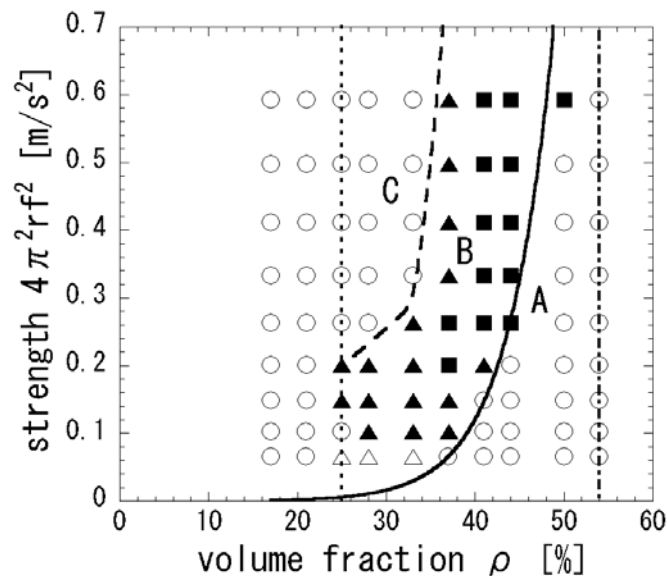


図4：亀裂パターンの形態相図 [2]。パラメーターとしては、体積比 ρ [%] と初期振動外力の強さ $4\pi^2 r f^2$ [m/s²] を系統的に変化させた。○：セル状亀裂、■：縞状亀裂、▲と△：セル状亀裂と縞状亀裂の混合パターン。点線：液状限界、一点破線：塑性限界。実線：降伏応力の大きさと初期振動外力の最大値の大きさが等しいライン、領域AとBの境界に対応。破線：領域BとCの境界、揺すったときの混合液の流動性で判別され、破線より下はずり運動、破線より上は波や乱流の発生、に対応。

最近の理論的な研究により、塑性を持つペーストが受けた外力を記憶する理論的なモデルが大志田・関本両氏によって提案され [4]、その後大槻氏により乾燥破壊に応用されて実際に初期外力の方向とは垂直な方向に縞状亀裂が発生することが示された [5]。

5章「まとめ」

我々はペーストを事前に揺すって「ずり運動」を与えることによりその後の乾燥破壊時に現れる亀裂パターンの形状を制御することができることを実験的に見出した。この制御においては、ペーストが加えられた外力を記憶するメモリー効果が利用されている。本来破壊はおこっては欲しくないことだが、この実験のようにたとえ破壊は止められなくても代わりに事前の操作で壊れ方を制御できるのであれば、工学的な応用範囲は広いと考えられる。

謝辞

この研究を遂行するにあたり、元中央大学理工学部の植松英隆氏、東大総合文化研究科の佐々真一助教授・大槻道夫氏、鳥取大工学部の大信田丈志助手には有意義な議論をしていただき、感謝いたします。また、レオロジー測定の際は山形大工学部機能高分子工学科と VBL の小山清人教授・谷口貴志専任講師・杉本昌隆助手の指導と協力をお願いしました。重ねて感謝いたします。

引用文献

- [1] A. Groisman and E. Kaplan, “An experimental study of cracking induced by desiccation”, *Europhys. Lett.*, 25 (1994) 415.
- [2] A. Nakahara and Y. Matsuo, “Imprinting the memory into paste and its visualization as crack patterns in drying process”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 74 (2005) 1362.
- [3] A. Nakahara and Y. Matsuo, “Imprinting memory into paste to control crack patterns in the drying process”, in: *Powders and Grains 2005*. ed. by R. Garcia-Rojo, H.J. Herrmann and S. McNamara (A.A.Balkema, Rotterdam 2005) pp. 1081-1085
- [4] T. Ooshida and K. Sekimoto, “Internal stress in model elasto-plastic fluids”, *Phys. Rev. Lett.*, 95 (2005) 108301.
- [5] M. Otsuki, “Memory effect on the formation of drying cracks”, *Phys. Rev. E*, 72 (2005) 046115.

剥離現象に対するモデリングとその数理解析

大阪電気通信大学 中根 和昭* AND 東京都立高専 篠原 知子†

Abstract. テープを剥がすときに振動が生じる事は日常でよく経験することである。テープの剥がれる場所からの影響がその振動に大きく関与していることは容易に想像がつくが、それをどう表現するかは考察を要するところである。またたとえ数理モデルとして定式化出来ても、振動体自体の長さが時間により変化する事もあり、解析を進めていく事が困難である様に思われる。このノートではこの現象に対するあるモデルを提案すると同時にそのモデルから得られた数値計算・数学解析の結果を紹介する。

Key words. free boundary, hyperbolic equation, variational problem

1. Introduction. テープを剥がしたり硬い棒状の物を壁にこすりつけたりする時に、振動が生じる事は日常の経験からよく見られることである。接着力が非常に弱かったり、緩く壁面に接触している場合の事を考えれば、接触面からの影響が振動に大きな影響を与えているのは事実であろう。しかし、これらの現象を数理モデルとして定式化し解析を進めて行くには幾つかの困難な点が見受けられる。まず接触面からの影響をどうモデルの中に取り込むかである。この影響を数学的にどの様に表現していくかはこれとって知られている方法はない。次に振動する部分の長さが時間によって変化していく事があげられる。振動する部分の長さの変化はフーリエの方法を適用しにくくしている。このノートではこれらの現象をモデル化することについて一考察を与える。ただしここではテープを剥がす場合のように振動する部分は長くなっていく場合のみを考えていく事にして、振動の様子（横波）は双曲型方程式に従うものとする。

まず形式的なモデリングを試みる。いまテープの一端を持ち、テープが剥ける角度が一定になるように引き上げていくことを考える。テープが剥れるところに特別な力がかかると考えられるので、このモデルは形式的には剥がれる部分にサポートを持つ δ 関数 $\delta_{\partial\{u>0\}}$ を非線形項に持つ方程式として表現される。これでは方程式の意味がはっきりしないし本当に解けるかどうか分からない。

そこで非線形項の特異性を緩和するためにも、このモデルを Lagrange 形式で考える事にする。テープを引き上げる様子を簡潔に表現するために、テープは貼ってある部分とはがれた部分が直交するように剥がしていくものとする。剥れる部分の長さとして時間を θ として時間によらず一定とすれば、引き上げる端点は x 軸と角度 θ で交わる直線上に乗るはずである。これを y 軸として剥がれていく方向を正の向きに取る。すると作用積分は以下ようになる。ただし剥れる部分からの影響はここでは Q として表現するが、この意味は第二章で述べる事とする。以下では ρ は線密度、 τ は張力を表わすものとする。

$$\int_0^{T^*} \int_{\Omega} \left(\tau u_x^2 / \tan \theta - \rho (D_t u)^2 \tan \theta + Q \right) \chi_{u>0} dx dt$$

*Faculty of Engineering, Osaka Electro-Communication University, 18-8 Hatsu-machi, Neyagawa, Osaka 572-8530, (k-nakane@isc.osakac.ac.jp).

†Tokyo Metropolitan College of Technology, 1-10-40 Higashi-ooi, Shinagawa, Tokyo 140-0011, Japan

ただし Ω は \mathbf{R} 上のある区間、 T^* はある定数、 $\chi_{u>0}$ は集合 $\{(x, t) \in \Omega \times (0, T^*); u(x, t) > 0\}$ の特性関数であるとする。

以下では $\theta = \pi/4$ (剥がれる前後でテープの長さは変化しない) として考える事にする。

$$(J) \quad J(u) = \int_0^{T^*} \int_{\Omega} \left(\tau u_x^2 - \rho (D_t u)^2 + Q \right) \chi_{u>0} dx dt \quad u \in K.$$

この汎関数の停留点を求めていかねばならないのだがこの汎関数はその非線形項故に凸とはならず、また定義域となる関数空間 K を工夫しないと連続にはならない。そこで停留点には適度な正則性が有るものとして Euler-Lagrange 方程式を導出する。

$$(P) \quad \begin{cases} \tau u_{xx} - \rho u_{tt} = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \{t > 0\} \cap \{u > 0\}, \\ \tau u_x^2 - \rho u_t^2 = Q & \text{on } (0, \infty) \times \{t > 0\} \cap \partial\{u > 0\}, \end{cases}$$

以下ではこの方程式系を考えていく事にする。数学的な興味としては局所的・大域的を問わず解の存在が挙げられる。また Lagrange 形式からの定式化で有るので周期解の構成と漸近挙動についての考察も必要である。

2. Q についての考察. 外部からの影響として Lagrangian に Q を付け加えた汎関数を考えた。これについての考察を行う。ただしこの章の話題は多次元の場合でも成立するので、次元を一般次元に拡張して考える ([1], [2], [4] 参照)。

(P) の第二式は以下の様に導出される。 $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega \times (0, t_*), \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ を任意にとり、以下の関数を定義する。

$$u_\epsilon(z) := u \circ \sigma_\epsilon^{-1}(z),$$

ただし $\sigma_\epsilon(z) := z + \epsilon \eta(z)$ で z は空間に時間を加えたベクトル

$$z := (x, t) \quad \text{i.e.} \quad (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n, t)$$

とする。いま停留点に滑らかさを仮定すると、この関数に対して第一変分を取ることができる。すると

$$0 = \delta J = \int_{\partial\{u>0\}} \langle \eta, \nu \rangle (-\tau |\nabla u|^2 + \rho u_t^2 + Q) dS$$

が得られる。すなわち

$$\tau |\nabla u|^2 - \rho u_t^2 = Q$$

である。ここで解の漸近展開の一次近似が成立するとすれば、左辺は特性多項式と解釈できる。更に、特性多項式が内部から自由境界を移動させるものを表現しているとすると、この式は、これと

外部の影響 Q が釣り合っている状態を表していると解釈できる。たとえば一次元の場合に、この第二式から境界の伝播速度を導出すると

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \left| \frac{du}{dt} \right| / \left| \frac{du}{dx} \right| = \sqrt{\tau/\rho - Q/(\rho u_x^2)}$$

となる。この式より Q が正であれば境界の移動速度は振動体の伝播速度より遅い事がわかる。ここではこれが振動の原因であると考ええる。

3. 数値計算の紹介. ここでは数値計算結果を紹介する ([3] 参照)。数値計算は一次元の場合に固定領域法を用いた。以下では変数変換より $\tau = 1$, $\rho = 1$ となっているものとする。

$$(P) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \{t > 0\} \cap \{u > 0\}, \\ u_x^2 - u_t^2 = Q^2 & \text{on } (0, \infty) \times \{t > 0\} \cap \partial\{u > 0\}, \end{cases}$$

ここで初期条件は

$$(I) \quad \begin{cases} u(x, 0) = e(x) & \text{on } (-l_0, 0), \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{on } (-l_0, 0), \end{cases}$$

境界条件は

$$(B) \quad u(-l_0, t) = f(t) \quad \text{on } [0, \infty),$$

ただし $e(x), g(x), f(t)$ は与えられた関数で Q と l_0 は正の定数とする。初期条件 (I) は既に $(-l_0, 0)$ だけ剥がれている状態を示しており (B) は引き上げる端点の位置を示している。

以下の数値計算では初期条件・境界条件は次の様に設定しておく。

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - \frac{x}{l_0} && \text{in } [0, l_0], \\ e(x) &= f'(0) && \text{in } [0, l_0], \end{aligned}$$

ただし

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(0))^2}}.$$

以下は計算例であるが、境界条件は全て $f(t) = \sqrt{t+1}$ としてある。

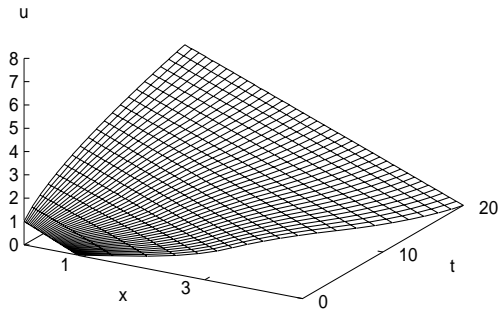


Fig. 1. $u(x,t)$ の様子

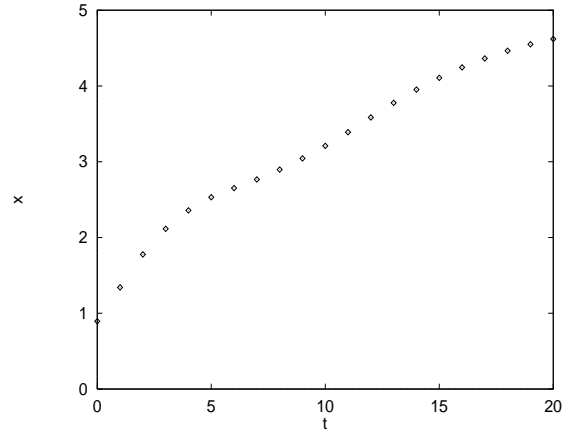


Fig. 2. 自由境界 $l(t)$ の動き $0 \leq t \leq 20$.

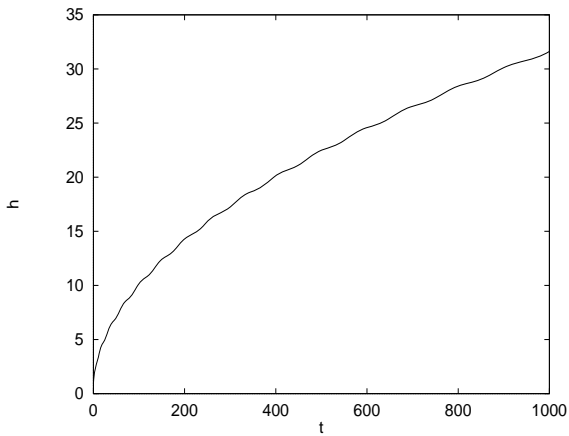


Fig. 3. $l(t)$ $0 \leq t \leq 1000$

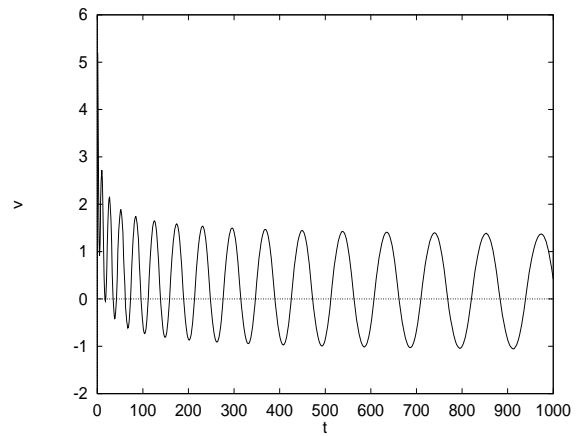


Fig. 4. $(l(t) - \sqrt{t+1}) \times 100$.

これらの数値計算の結果から自由境界は f の形に添って振動している事が分かる。またこの振動の様子は張力や密度のような物理パラメータによっている。これらを調節して伝播速度と数値計算の結果とを比較してみると非常に強い相関が得られている。これらの結果から振動体の伝播速度より自由境界の速度が遅い事によって自由境界と引き上げる端点間での反射が生み出され、このような振動になっているものと考えられる。次の章ではこの考え方に基づいて解の構成を行う。

4. 数学解析の結果の紹介. 以下では今までに得られている数学解析の結果を紹介する。まず、次のような変数変換を施す。

$$t = (\xi + \eta)/2, \quad x = (\xi - \eta)/2.$$

初期条件 e と g は直線 $\{(x, t); t = 0\}$ 上で定義されているので、これらは $\{(\xi, \eta); \xi + \eta = 0\}$ で新たに定義される事になる。しかし簡単のために変数を変えたとしても同じ記号 e と g で表現する物とする。境界条件 f についても同様に $\{(\xi, \eta); \xi - \eta + 2l_0 = 0\}$ で与えられているので η の関数として f を表現する。すると (P) , (I) , (B) は以下の様になる。

$$(P') \quad \begin{cases} u_{\xi\eta} = 0 & \text{in } \{u > 0\}, \\ -4u_{\xi}u_{\eta} = Q^2 & \text{on } \partial\{u > 0\}, \end{cases}$$

$$(I') \quad \begin{cases} u(\xi, -\xi) = e(\xi) & \text{on } (-l_0, 0), \\ u_{\eta}(\xi, -\xi) + u_{\xi}(\xi, -\xi) = g(\xi) & \text{on } (-l_0, 0), \end{cases}$$

$$(B') \quad u(\eta - 2l_0, \eta) = f(\eta - l_0) \quad \text{on } [l_0, \infty).$$

これを元にして問題の定式化を行う。変数変換 (回転) を施す事で解を元の変数 (x, t) に戻す事は非常に容易であるので、このノートでは以下の問題の解の構成を行う。

Problem 4.1 T を正の定数として、 (P') , (I') , (B') を $\eta < T$ で満たし、以下の条件を満足する関数の組みを見つけよ。 $u \in C^0(\{(\xi, \eta); \xi \geq \eta - 2l_0, \xi \geq -\eta\})$, $l \in C^0([0, T]) \cap C^1((0, T))$

(i) $l(0) = 0$,

(ii) $u \in C^2(\{(\xi, \eta); \eta - 2l_0 < \xi < l(\eta), \xi > -\eta\}) \cap C^1(\{(\xi, \eta); \eta - 2l_0 < \xi \leq l(\eta), \xi \geq -\eta\})$,

(iii) $u > 0$ in $\{(\xi, \eta); \eta - 2l_0 \leq \xi < l(\eta), \xi > -\eta\}$,

(iv) $u(\xi, \eta) = 0$ in $\{(\xi, \eta); \xi \geq l(\eta)\} \cup \{(\xi, \eta); \xi \geq -\eta, \eta < 0\}$.

Assumption 4.2 関数 $f(\eta - l_0) \in C^2([l_0, \infty))$, $e(\xi) \in C^2([-l_0, 0])$, $g(\xi) \in C^1([-l_0, 0])$ は以下の条件を満たすとする。

$$(A.0) \quad \begin{cases} e(\xi) > 0 & \text{on } [-l_0, 0), \\ g(\xi) > 0 & \text{on } (-l_0, 0), \end{cases}$$

$$(A.1) \quad \begin{cases} f(0) = e(-l_0), \\ f'(0) = g(-l_0), \\ f''(0) = e''(-l_0), \end{cases}$$

$$(A.2) \quad \begin{cases} e(0) = 0, \\ e'(0)^2 - g(0)^2 = Q^2, \\ (e''(0) + g'(0))(e'(0) - g(0))^4 = Q^2(e''(0) - g'(0)), \end{cases}$$

$$(A.3) \quad \begin{cases} e'(\xi) < g(\xi) & \text{on } [-l_0, 0], \\ f'(\xi + l_0) - (e'(\xi) + g(\xi))/2 > 0 & \text{on } [-l_0, 0], \end{cases}$$

$$(A.4) \quad f'(\eta - l_0) \geq 0 \quad \text{on } [l_0, \infty).$$

Remark 4.3 (A.1) は引き上げる点での整合性を (A.2) は自由境界の $t = 0$ での整合性を示している。これらは解の滑らかさを保障している。(A.3) はここでは数学的な理由として付け加えられた

仮定であるが、これは自由境界上での CFL 条件であると考えられる。(A.4) は大域解が存在するための十分条件である。

次の Lemma により局所解を構成する。これは本質的には [4] で与えられた物である。

Lemma 4.4 ([4], [5] 参照) c を正の定数、 $I = [0, c)$ を η 軸上の区間とする。 $\gamma(\eta) \in C^2(I)$ を以下を満たす関数とする。

$$(i) \gamma(0) = 0,$$

$$(ii) \gamma'(\eta) > 0 \quad \text{on } I.$$

すると以下の関数が定義できて

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &:= \gamma(\eta) && \text{on } I, \\ l(\eta) &:= \frac{4}{Q^2} \int_0^\eta \psi'(s)^2 ds && \text{on } I, \\ \phi(\xi) &:= -\psi(l^{-1}(\xi)) && \text{on } [0, l(c)), \end{aligned}$$

関数の組み $u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta) \in C^2(\{(\xi, \eta); \eta \in I, 0 < \xi < l(\eta)\}) \cap C^1(\{(\xi, \eta); \eta \in I, 0 \leq \xi \leq l(\eta)\})$ と $l(\eta) \in C^2(I)$ は

$$(PL) \begin{cases} u_{\xi\eta} = 0 & \text{in } \{(\xi, \eta); 0 < \xi < l(\eta), \eta \in I\}, \\ -4u_{\xi}u_{\eta} = Q^2 & \text{on } \{(l(\eta), \eta); \eta \in I\}, \\ u(l(\eta), \eta) = 0 & \text{on } I, \\ u(0, \eta) = \gamma(\eta) & \text{on } I, \\ l(0) = 0. \end{cases}$$

を満たす。さらに、この関数の組み (u, l) は (PL) を満たす唯一つの解である。

この様にして与えられた局所解を帰納的に接続していく事で大域解を構成する。帰納法におけるステップは伝播の半周期（引き剥がす場所の影響が自由境界まで届くまで、あるいは自由境界の影響が引き剥がす場所まで届くまで）を基準に考えている。

Theorem 4.5 ([5] 参照) 任意の $T > 0$ に対して Problem 4.1 の解は一意的に存在する。

次に周期解の存在について議論を行う。ある時刻から $f' = 0$ となる例を考える。すると自由境界が周期的な挙動を示す事がわかる (Theorem 4.6)。またこの問題は時間局所的に well-posed である (Theorem 4.7) ので f' が非常に小さいときに自由境界は周期解のように振舞う事が分かる (Theorem 4.9)。

Theorem 4.6 ([6] 参照) 境界条件 f は以下を満たすとする

$$f'(\eta) \equiv 0 \quad \text{on } \eta > T_p,$$

ただし $T_p > l_0$ はある正の数とする。すると自由境界は周期的な運動をする。

Theorem 4.7 ([6] 参照) 関数 $u(\eta, \xi) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$ と $\hat{u}(\eta, \xi) = \hat{\phi}(\xi) + \hat{\psi}(\eta)$ は Problem 4.1 の

解でそれぞれの初期・境界条件は (e, g, f) と $(\hat{e}, \hat{g}, \hat{f})$ で与えられる物とする。むしろ (e, g, f) と $(\hat{e}, \hat{g}, \hat{f})$ は (A.0-4) を満たしているとする。

T を正の数とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、もし $\|e(\xi) - \hat{e}(\xi)\|_\infty \leq \delta$, $\|e'(\xi) - \hat{e}'(\xi)\|_\infty \leq \delta$, $\|g(\xi) - \hat{g}(\xi)\|_\infty \leq \delta$, $\|f'(\eta - l_0) - \hat{f}'(\eta - l_0)\|_\infty \leq \delta$ ならば

$$\begin{aligned} \|u(\eta, \xi) - \hat{u}(\eta, \xi)\|_\infty &< \varepsilon \quad \text{in} \quad (\eta, \xi) \in [-l_0, l(T)] \times [0, T] \\ \|l(\eta) - \hat{l}(\eta)\|_\infty &< \varepsilon \quad \text{on} \quad \eta \in [0, T], \end{aligned}$$

である。

Remark 4.8 (i) 初期条件 \hat{e}, \hat{g} の定義域を $[-l_0, 0]$ より広く取る事を許せば、この問題は ill-posed になる。これは解の構成から簡単に導かれる。

(ii) δ は T と独立に取ることはできない。なぜなら Theorem 4.6 から、もし $f'(\eta) \equiv 0$ が十分大きな η で成り立っていたなら、自由境界はある定数 \mathbf{p} を周期にもつ周期関数になることがわかる。この周期は初期条件に連続に依存するので、Theorem 4.7 の \hat{l} の周期 $\hat{\mathbf{p}}$ を $|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}|$ が無理数になるように取ることができ、任意の $\delta > 0$ と ε_0 に対しても、ある $t_0 > 0$ が存在して

$$|l(t_0) - \hat{l}(t_0)| \geq \varepsilon_0$$

とできるからである。

最後に漸近挙動について考える。引き上げる速度は (A.5) の様に 0 に収束するものとする。

$$(A.5) \quad \text{単調減少関数 } h \in L^1([l_0, \infty)) \text{ が存在して } f' < h$$

以下の定理は、テープを引き剥がす速さ f' が非常に小さくなる場合に、自由境界は周期関数に非常に良く似た動きをする事を示している。証明には、ある意味で速度の一様性が必要であるが、その条件が (A.5) である。

Theorem 4.9 ([6] 参照) (u, l) は Problem 4.1 の解で初期・境界条件は e, g, f とする。また f には (A.5) の条件を付加しておく。

任意の実数 $s \in (l_0, \infty)$ に対し $f_s \in C^2([l_0, \infty))$ を次の条件を満たす関数とする。

$$\begin{aligned} (i) \quad & f(\eta - l_0) = f_s(\eta - l_0) \quad \text{on} \quad [l_0, s], \\ (ii) \quad & f'_s(\eta - l_0) = 0 \quad \text{on} \quad [s + \alpha, \infty), \\ (iii) \quad & f'_s(\eta - l_0) \geq 0, \quad \|f'(\eta - l_0) - f'_s(\eta - l_0)\|_\infty \leq \delta \quad \text{on} \quad [s, s + \alpha), \end{aligned}$$

但し α と δ は任意に小の正の定数とする。 (u_s, l_s) を境界条件を f_s に変えた Problem 4.1 の解であるとする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ と $T > 0$ に対し、ある正の定数 s_0 が存在し、任意の $s > s_0$ に対し、以下が成り立つ。

$$\sup_{[s, s+T]} |l(\eta) - l_s(\eta)| < \varepsilon.$$

5. 今後の課題. これまでの研究では、時間が正の方向に進展する場合に、自由境界を構成していった。この方法を応用して、時間が負の方向に進展する場合にも自由境界を構成することが出来ると考えている。今後は、これを数学的に定式化するのが課題である。これが実現できれば、以下の現象にも応用することができると考えている

たとえば“棒状の物を壁面にこすり付けると壁面が傷つく事がある。では、どのくらいの仕事か傷を付けるのに使われるのだろうか?”という現象を考える。仕事の使われる概略を示すと

$$\text{「加えた仕事」} = \text{「熱に変わる仕事」} + \text{「棒を振動させる仕事」} + \text{「傷をつける仕事」}$$

となる。ここで熱に変わる仕事については観測が可能である。もし、この棒を振動させる仕事の詳細が分かれば最も興味のある「傷をつける仕事」が判明するはずである。棒の振動は縦波と横波の二つに分けられる。縦波は通常のスリップ・スティック運動としてフックの公式を用いて定式化している。この時端点での摩擦が問題になるが、それは端点の速度により決定される。この速度は横波の効果に強く影響を受けていると考えられるので、この議論によってこの現象がより精密に定式化できると考えている。

REFERENCES

- [1] H. W. Alt and L. A. Caffarelli, *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math., **325** (1981), 105–144.
- [2] H. W. Alt, L. A. Caffarelli and A. Friedman, *A free boundary problem for quasi-linear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **11** (1984), 1–44.
- [3] H. Imai, K. Kikuchi, K. Nakane, S. Omata and T. Tachikawa, *A Numerical Approach to the Asymptotic Behavior of Solutions of a One-Dimensional Free Boundary Problem of Hyperbolic Type*, J.J.I.A.M., **18-1** (2001), 43–58.
- [4] K. Kikuchi and S. Omata, *A free boundary problem for one dimensional hyperbolic equation*, Adv. Math. Sci. Appl. **9**(2) (1999), 775–786.
- [5] K. Nakane and T. Shinohara, *Some properties of solutions for a free boundary problem of hyperbolic type*, proceedings of the Eccomath 2004, vol2 (2004) (573.pdf).
- [6] K. Nakane and T. Shinohara, *Existence of periodic solutions for a free boundary problem of hyperbolic type*, preprint.

ソフトマテリアルにみられる秩序構造について

野々村真規子 山田耕太郎 太田隆夫

高分子ジブロック共重合体は、相分離におけるドメインの成長がメソスケール以下でとまり、安定な周期構造が形成されることで知られている。このような相分離はミクロ相分離とよばれている。形成される周期構造には、ラメラ構造、シリンダー構造、BCC 球構造、ジャイロイド構造があり、どのような条件（温度や組成比など）でどれが熱平衡構造であるかはよく調べられている。また近年では、温度の変化によって、安定だった構造を不安定化させ、別の構造への転移過程を調べる実験が行われているようになってきている。我々は、ミクロ相分離に汎用的に適用できる自由エネルギーを用いて、この構造間の転移キネティクスを研究している。¹⁻³ 研究会では、転移の過程で見られる様々な中間構造を中心に研究結果を紹介した。

ミクロ相分離を表わす自由エネルギー⁴は次のように書けることが知られている。

$$F\{\phi\} = \int d\vec{r} \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{\tau}{2}\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4 \right] + \frac{\alpha}{2} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') (\phi(\vec{r}) - \bar{\phi})(\phi(\vec{r}') - \bar{\phi}) \quad (1)$$

ここで、 ϕ は高分子ジブロック共重合体のブロック局所体積分率の差である。また、 α と g は正定数、 $\bar{\phi}$ は ϕ の空間平均である。 τ は温度に関するパラメータで、その値が小さいと高温の一相状態を、大きいと低温のミクロ相分離状態を表わす。関数 G は $-\nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ で定義されるグリーン関数である。変数 ϕ は保存量であるので、式 (1) から ϕ の時間発展方程式は次のようになる。⁵

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla^2 \frac{\delta F}{\delta\phi} = \nabla^2 (-\nabla^2\phi - \tau\phi + g\phi^3) - \alpha(\phi - \bar{\phi}) \quad (2)$$

この方程式の解の一つにジャイロイド構造があることは三次元シミュレーションで示されている。⁶

ジャイロイド構造は他の構造と平衡周期が異なる。一般に三次元しかも平衡周期が異なる構造間の転移に、式 (2) を直接用いることは、境界やシステムサイズの影響が大きく難しい。そこで、我々は以下のようにモード展開を行い、振幅方程式を導出することで転移キネティクスを調べた。

$$\phi(\vec{r}, t) = \bar{\phi} + \left[\sum_{l=1}^{12} a_l(t) e^{i\vec{q}_l \cdot \vec{r}} + \sum_{m=1}^6 b_m(t) e^{i\vec{p}_m \cdot \vec{r}} + \sum_{n=1}^{12} c_n(t) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + c.c. \right] \quad (3)$$

式 (3) 中の c.c は複素共役を表わす。また、逆格子ベクトル \vec{q}_l 、 \vec{p}_m 、 \vec{k}_n の定義は以下の通りである。

$$\vec{q}_1 = C_Q(2, -1, 1) \quad \vec{q}_2 = C_Q(-2, 1, 1)$$

$$\begin{aligned}
\vec{q}_3 &= C_Q(-2, -1, 1) & \vec{q}_4 &= C_Q(2, 1, 1) \\
\vec{q}_5 &= C_Q(-1, -2, 1) & \vec{q}_6 &= C_Q(1, -2, 1) \\
\vec{q}_7 &= C_Q(-1, 2, 1) & \vec{q}_8 &= C_Q(1, 2, 1) \\
\vec{q}_9 &= C_Q(1, -1, -2) & \vec{q}_{10} &= C_Q(1, 1, -2) \\
\vec{q}_{11} &= C_Q(-1, 1, -2) & \vec{q}_{12} &= C_Q(-1, -1, -2) \\
\vec{p}_1 &= C_P(2, 2, 0) & \vec{p}_2 &= C_P(2, -2, 0) \\
\vec{p}_3 &= C_P(0, 2, 2) & \vec{p}_4 &= C_P(0, -2, 2) \\
\vec{p}_5 &= C_P(2, 0, 2) & \vec{p}_6 &= C_P(-2, 0, 2) \\
\vec{k}_1 &= C_Q(-z, -z+1, z+1) & \vec{k}_2 &= C_Q(z-1, z+1, z) \\
\vec{k}_3 &= C_Q(z, -z-1, z-1) & \vec{k}_4 &= C_Q(-z+1, z, z+1) \\
\vec{k}_5 &= C_Q(-z, z+1, z-1) & \vec{k}_6 &= C_Q(z, z-1, z+1) \\
\vec{k}_7 &= C_Q(-z-1, -z, z-1) & \vec{k}_8 &= C_Q(z-1, -z, z+1) \\
\vec{k}_9 &= C_Q(z+1, -z+1, z) & \vec{k}_{10} &= C_Q(z+1, z, z-1) \\
\vec{k}_{11} &= C_Q(-z-1, z-1, z) & \vec{k}_{12} &= C_Q(-z+1, -z-1, z)
\end{aligned} \tag{4}$$

ただし、 $C_Q = Q/\sqrt{6}$ 、 $C_P = P/(2\sqrt{2})$ 、 $z = 2\sqrt{3}/3$ であり、 P と Q の間には

$$Q^2 = \frac{3}{4}P^2 \tag{5}$$

という関係がある。例えば、ラメラ構造は $a_1 \neq 0$ 以外の振幅がゼロ、ヘキサゴナルシリンダー構造は $a_2 = a_6 = a_{10} \neq 0$ 以外の振幅がゼロ、BCC 構造は $a_1 = a_7 = a_{12} = c_1 = c_7 = c_{12} \neq 0$ 以外の振幅がゼロ、ジャイロイド構造は $a_l = a_G \neq 0, b_m = b_G \neq 0, c_n = 0$ ($l, n = 1, \dots, 12, m = 1, \dots, 6$) などのように、式 (3) を用いると、ラメラ構造、ヘキサゴナルシリンダー構造、BCC 構造、ジャイロイド構造の 4 つをすべて表わすことができる。式 (3) を式 (2) に代入し逆格子ベクトル間の関係 ($q_2 + q_6 + q_{10} = 0$ など) を考慮すると、それぞれの振幅に対する振幅方程式が求まる。

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= (-Q^4 + \tau Q^2 - \alpha)a_1 - gQ^2[3(\bar{\phi}^2 - a_1^2)a_1 \\
&+ 6(\sum_{l=1}^{12} a_l^2 + \sum_{m=1}^6 b_m^2 + \sum_{n=1}^{12} c_n^2)a_1 \\
&+ 6(\bar{\phi}a_3b_4 + \bar{\phi}a_7a_{12} + \bar{\phi}c_7c_{12} + a_1b_2b_5 + a_2a_3a_4 \\
&+ a_2a_5a_8 + a_2a_6a_7 + a_3b_1b_2 + a_3b_1b_5 + a_3b_2b_6 \\
&+ a_3b_5b_6 + a_4a_9a_{10} + a_4a_{11}a_{12} + a_5a_{10}b_2 + a_5a_{10}b_5 \\
&+ a_5a_{12}b_6 + a_6a_9b_3 + a_6a_9b_6 + a_6a_{11}b_2 + a_6a_{11}b_4 \\
&+ a_6a_{11}b_5 + a_7a_{10}b_1 + a_7c_1c_7 + a_8a_9b_4 + a_8a_{11}b_1 \\
&+ a_8a_{11}b_3 + a_{12}c_1c_{12} + b_4c_8c_9)] \tag{6}
\end{aligned}$$

他の振幅に対しても同様な形の振幅方程式が求められる。また、前述したように一般にジャイロイド構造と他の構造間の転移は平衡周期の変化を伴うため、

周期の時間発展も考慮する必要がある。そこで、我々は波数に対して次のような時間発展を導入した。

$$\begin{aligned} \frac{dP^2}{dt} &= -h \frac{\partial F_{amp}}{\partial P^2} \\ &= -h \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{4\alpha}{3P^4} \right) \left(\sum_{l=1}^{12} a_l^2 + \sum_{n=1}^{12} c_n^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\alpha}{P^4} \right) \sum_{m=1}^6 b_m^2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 F_{amp} は式 (3) を式 (1) に代入して求めた自由エネルギーで、振幅と波数を用いて $F_{amp} = F(\{a_l\}, \{b_m\}, \{c_n\}, P)$ とかける。 h は正の定数である。また Q を消すために式 (5) を用いている。

ここからは式 (6) などの振幅方程式と式 (7) の数値シミュレーションの結果を紹介する。以下のシミュレーションではすべて $\alpha = g = h = 1$ とした。図 1 は 2 モード展開により求めた相図である。無秩序相を初期値として振幅方程式と式 (7) を数値的に解き、得られた平衡構造の自由エネルギーを比較して求めた。図中の L はラメラ構造、 G はジャイロイド構造、 H はヘキサゴナルシリンダー構造、 S は BCC 構造、 DIS は無秩序相がもっとも安定であることを示す。Matsen ら⁷や Milner ら⁸が求めた相図と同様に、この図からもヘキサゴナルシリンダー構造とラメラ構造が安定な領域の間にジャイロイド構造が安定な領域が存在していることがわかる。

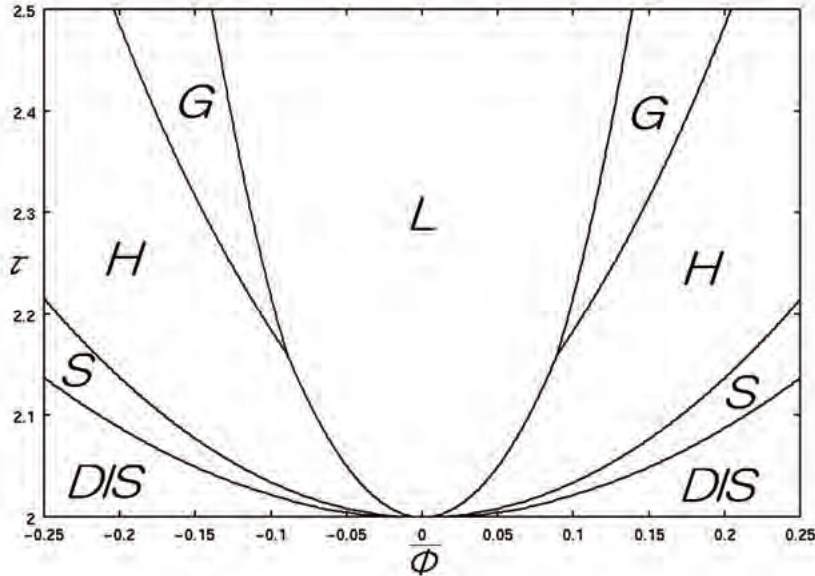


図 1 : 2 モード展開で求めた相図。L, G, S, DIS はそれぞれラメラ構造、ジャイロイド構造、ヘキサゴナルシリンダー構造、BCC 構造、無秩序相が安定であることを示す。

次に、ジャイロイド構造 ($\bar{\phi} = -0.1, \tau = 2.2$) からラメラ構造 ($\bar{\phi} = -0.1, \tau = 2.5$) への構造間転移の結果を紹介する。構造間転移は一次転移であるた

め式(6)などの振幅方程式には揺らぎの項を加えてシミュレーションを行った。図2は $t = 0$ で $\tau = 2.2$ を $\tau = 2.5$ へと変化させたときの転移の様子である。途中 $t = 14400$ あたりで中間構造をとることがわかる。この中間構造はFddd対称性をもっている。(図3)この構造は、界面活性剤系⁹やトリブロック高分子¹⁰の実験で報告されているでなく、ブロック共重合体の平衡構造の一つであるという論文¹¹が出て議論を呼んでいる。

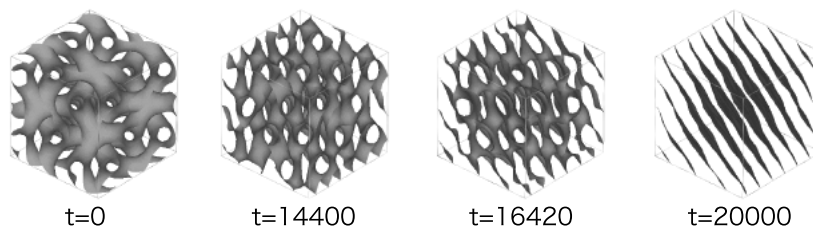


図2：ジャイロイド構造からラメラ構造への転移。($\phi=0.1$ の等高面)

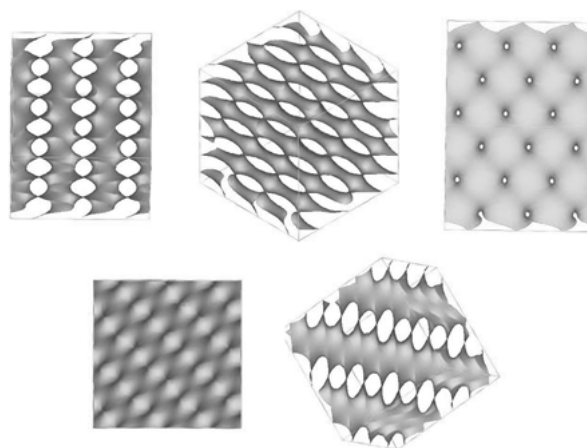


図3：Fddd構造 ($\phi=0.1$ の等高面)

我々は振幅方程式を用いてジャイロイド構造を考慮に入れたメソフェイズの安定性と構造間転移について研究を行った。それによって転移過程での中間構造の形成も調べることができた。しかし多くの実験でみられているような核成長による転移キネティクス、また最後に述べたFddd構造の安定性など、まだいくつかの課題を残している。今後これらの問題にも取り組んでいく予定である。

参考文献

- [1] M. Nonomura, K. Yamada, T. Ohta: *J. Phys.: Condens. Matter* **2003**, 15 L423

- [2] M. Nonomura, T. Ohta: *J. Phys.: Condens. Matter*, **13**, 9089 (2001)
- [3] K. Yamada, M. Nonomura, A. Saeki, T. Ohta: *J. Phys.: Condens. Matter*, **17** 4877 (2005)
- [4] T. Ohta, K. Kawasaki: *Macromolecules*, **19**, 2621 (1986)
T. Ohta, K. Kawasaki: *Macromolecules*, **23**, 2413 (1990)
- [5] M. Bahiana, Y. Oono: *Phys. Rev. A*, **41**, 6763 (1990)
- [6] T. Teramoto, Y. Nishiura: *J. Phys. Soc. Jpn*, **71**, 1611 (2002)
- [7] M. W. Matsen, M. Schick: *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 2660 (1994)
- [8] S. T. Milner, P. D. Olmsted: *J. Phys. II France*, **7**, 249(1997)
- [9] M. Imai, A. Saeki, T. Teramoto, A. Kawaguchi, K. Nakaya, T. Kato, K. Ito: *J. Chem. Phys.*, **115**, 10525 (2001)
- [10] T. H. Epps, III, E. W. Cochran, T. S. Bailey, R. S. Waletzko, C. M. Hardy, F. S. Bates : *Macromolecules* , **37**, 8325 (2004)
- [11] C. A. Tyler, D. C. Morse : *Phys. Rev. Lett*, **94** , 208302 (2005)

吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について

友枝 謙二

大阪工業大学工学部

E-mail: tomoeda@ge.oit.ac.jp

はじめに

拡散と吸収との相互作用に関する数理モデルは多くの分野での興味深い現象を記述するのに用いられている。中でもこの相互作用によって引き起こされる著しい性質の一つにサポートの分離現象がある。典型的な数理モデルとしては、1次元空間での吸収性媒体流れを記述する次の方程式が知られている。この場合 サポートとは流体の浸透領域を意味する。

$$v_t = (v^m)_{xx} - cv^p, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad (2)$$

ただし以下の条件をおく。

条件 1

- (i) $m(> 1)$, $p(> 0)$ と $c(\geq 0)$ は定数で $m + p \geq 2$ とする;
- (ii) $v^0(x) \in C^0(\mathbf{R}^1)$ は非負でコンパクトサポートを持つ。

解析的な観点からは以下のことが示されている ([2, 3],[7]):

(P-1) $c = 0$, または $c > 0$ 且つ $p \geq 1$ の時は 拡散効果が優勢であり $\text{supp } v(t, \cdot)$ は時間発展に伴って単調に広がっていく。すなわち

(i) $p \geq m > 1$ 且つ $c \geq 0$ の場合は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{supp } v(t, \cdot) = \mathbf{R}^1 \quad (3)$$

(ii) $m > p \geq 1$ 且つ $c > 0$ の場合は 次の式を満たすある定数 M_1 と M_2 が存在する。

$$\text{supp } v(t, \cdot) \subset [M_1, M_2] \quad (t \geq 0). \quad (4)$$

(P-2) $c > 0$ 且つ $0 < p < 1$ の時は 吸収効果が優勢であり、解はある有限時刻 $T^*(> 0)$ で消滅する。

(P-1) の場合、連結な初期サポートから出発した解のサポートは決して分離しない。

(P-2) の場合、2つの極大値を持つ初期関数から出発した解のサポートは分離する可能性がある ([1],[6])。さらに 数値サポートの再分離現象をも得られている。数値計算の観点から、分離現象、融合現象、さらに再分離現象が正し

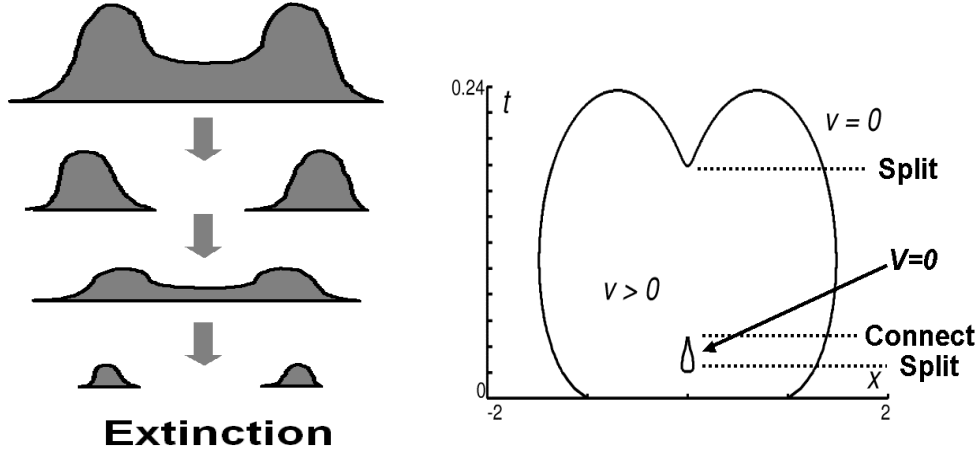


図 1: サポートの再分離現象, 左は模式図, 右は数値例

いか否かを判定するのは困難である. なぜなら 数値計算に用いた時間ステップと空間メッシュ幅は十分小ではあるがしかし零ではないからである. 言い換えればメッシュ幅 $h \rightarrow 0$ としたときに, 各 h において分離したサポートがそのまま保たれるか否かは一概には結論できないからである.

本文では, $m + p = 2$ ($0 < p < 1$) の場合を扱い, 再分離現象を再現するような初期関数の構成法について述べる. そのための準備として分離現象と界面方程式に関する結果を次節に記す.

2. 分離現象と界面方程式

$u \equiv v^{m-1}$ と置き換えることによってもとの方程式を次の形に書き換える.

$$u_t = muu_{xx} + \frac{m}{m-1}(u_x)^2 - (m-1)c, \quad (5)$$

$$u(0, x) = u^0(x) \equiv (v^0(x))^{m-1}. \quad (6)$$

条件 2

- (i) $u_x^0 \in L^\infty(\mathbf{R}^1) \cap BV(\mathbf{R}^1)$;
- (ii) $u_x^0(x)$ は $\mathbf{I} \equiv \text{supp } u^0$ 上で絶対連続, 且つ $\text{ess. inf}_{x \in \mathbf{I}} u_{xx}^0(x)$ は有限である.

以下の議論では m, p, c は次の条件 3 を, 初期関数 $v^0(x)$ は条件 1-ii) と条件 2 をそれぞれ満たしているものとする.

条件 3

$$m + p = 2, \quad m > 1, \quad c > 0. \quad (7)$$

条件 3 に制限する理由は, 差分法の収束および分離・融合・再分離の証明に用いる幾つかの不等式が $m + p > 2$ ($m > 1, 0 < p < 1$) の場合に得られていないことにある.

分離定理 ([6]) $\text{supp } v^0(t, \cdot) = [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta_2 < \alpha_2$ とし以下の不等式を仮定する.

$$\frac{u^0(\beta_j)}{(m-1)c + mC_0C_E} > \frac{\|u^0\|_{L^1(\gamma_1, \gamma_2)}}{(m-1)c(\gamma_2 - \gamma_1) - (m+a)C_0TV(u_x^0)} > 0. \quad (8)$$

ただし、

$$C_0 = \|u^0\|_\infty, \quad C_E = -\text{ess.inf}_{x \in \mathbf{I}} u_{xx}^0(x), \quad a = \frac{m}{m-1}, \quad \|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty}.$$

すると解 $v(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0$ 且つ $v(\tilde{t}, \beta_j) > 0$ ($j = 1, 2$) となる $\tilde{t} > 0$ と $\tilde{x} \in [\gamma_1, \gamma_2]$ が存在する。

この定理は、零点の発生を述べているだけで、零点集合の区間が発生するという意味のサポート分離ではない。ただし、界面が縮むための十分条件の一つとして界面方程式 (14)(後述) において $\dot{\xi}(t) > 0$ と置くことによって得られた不等式

$$\|u_x^0\|_\infty < \sqrt{\frac{(m-1)c}{a}} \quad (9)$$

を初期関数 $u^0(x)$ に課すれば、零点発生後はサポートは縮むことから、零点集合の区間が発生することになる。分離後再融合することはない ($\|u_x(t, x)\|_\infty \leq \|u_x^0(x)\|_\infty$ は差分解の解析から得られている)。従って、分離・融合・再分離過程を議論するには (9) が成り立たない場合の分離定理を考える必要がある。

式 (8) は以下の考えから導かれる。 $u(t, \beta_1)$ と $u(t, \beta_2)$ を下から L^∞ -ノルムで評価する。すなわちこれらが消滅しない時刻を評価する。(8) の左辺がその時刻を表す。一方、区間 $[\gamma_1, \gamma_2]$ では、 $u(t, x)$ を上から評価し零点が発生する時刻を求める。しかし、上からの評価には L^∞ -ノルムは使えない。むしろ差分解の収束証明などに用いられた評価式等から考えると L^1 -ノルムが好都合である。それらの評価式を用いて得られた時刻が右辺である。

サポート分離過程では、一旦零点が発生したら、その時刻から微小時間サポートが分離し続け零点区間が発生することが直感的に推測される。しかし、零点発生後の零点区間発生については著者にはまだ一般的な証明はできていない(怪我をした傷口が開くという現象)。しかし初期関数を $x = 0$ で左右対称に限ると可能となる。すなわち、 $x > 0$ で零点が発生したら、解も対称ゆえ $-x$ でも零点が発生する。ここで Chen, Matano と Mimura の結果 ([1]) ”極大値をとる点の数は非増加” を用いることによって区間 $[-x, x]$ 上で解は零になる。これが本文での証明の方法である。

零点の発生については

- 初期関数の谷底の区間の幅が十分広い
- 初期関数の谷底の高さが十分小さい

のいずれの場合にも期待される。後者については3節で示す。前者について示そう。次式を仮定する。

$$\frac{u^0(\beta_j)}{(m-1)c + mC_0C_E} > \frac{\varepsilon}{(m-1)c} \quad (j = 1, 2), \quad (10)$$

$$u^0(x) = \varepsilon \quad (\gamma_1 \leq x \leq \gamma_2) \quad (11)$$

すると、式 (8) は $\gamma_2 - \gamma_1$ を十分大にすることによって次式が得られることから導かれる。

$$\frac{u^0(\beta_j)}{(m-1)c + mC_0C_E} > \frac{\varepsilon}{(m-1)c - \frac{(m+a)C_0TV(u_x^0)}{\gamma_2 - \gamma_1}} > \frac{\varepsilon}{(m-1)c} \quad (j = 1, 2) \quad (12)$$

不等式 (10) は、その左辺の分母の mC_0C_E がなければ、自明である。しかし、2つの山頂(極大値)があってもサポートは必ずしも分離するとは限らない(具体例は [4] 参照)。また、山頂と谷底の高さを比べてその差が小さい場合にはどんなに谷底の幅 $\gamma_2 - \gamma_1$ を大きくしても分離しないだろうと予想される。2つの山頂は時間発展とともに1つの山頂になりそして消滅していく。従って不等式 (10) でその左辺の分母の mC_0C_E を削除しただけの自明な条件だけでは分離するための十分条件として不十分である。

界面方程式 ([5]) 以下のことを仮定する。

$$u_x^0(\alpha_1 + 0) > 0. \quad (13)$$

ただし、 $\text{supp } u^0 = [\alpha_1, \alpha_2]$ 。このとき左側の界面 $\xi(t)$ は次式で表される。

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{m}{m-1}u_x(t, \xi(t) + 0) + \frac{(m-1)c}{u_x(t, \xi(t) + 0)} \quad \text{for } t \in (0, T), \quad (14)$$

$$\xi(0) = \alpha_1, \quad (15)$$

ただし T は $u_x^0(\alpha_1 + 0)$ に依存する正数である。

なお、右側の界面方程式もこの定理に倣って表すことができる。

界面方程式 (14) の右辺の第1項はいわゆる $c = 0$ のときの porous media 方程式の解のサポートの拡張伝播を表し、第2項は吸収効果によるサポートの収縮伝播を表す。

3. 再分離現象

以下の形をした $x = 0$ で左右対称な初期関数 $v_\rho^0(x)$ を考える。分離・融合・再分離を引き起こすような初期関数の作り方を簡単に述べる。

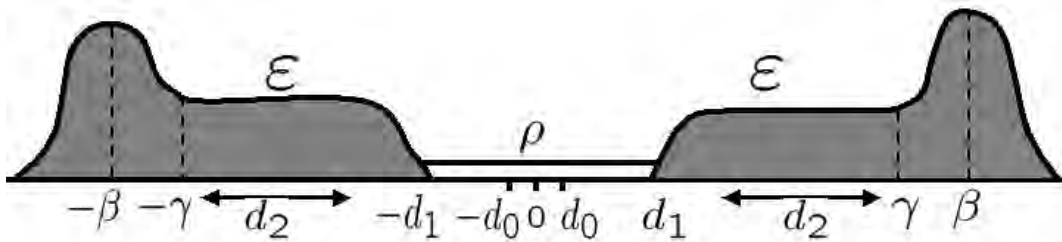


図 2: Initial function $v_\rho^0(x; \epsilon, d_1, d_2)$.

- 1) 図 2 に示した初期関数において $\rho = 0$ すなわち サポートが 2 つに分離した初期関数 $v_0^0(x; \epsilon, d_1, d_2)$ を考える。
- 2) $v_0^0(x; \epsilon, d_1, d_2)$ に対して $\beta_j = (-1)^j \beta (j = 1, 2)$ とし (10) を満たすような形状にする。
- 3) $v_0^0(x; \epsilon, d_1, d_2)$ に対して、サポートが融合するように $x = \pm d_1$ での $v_0^0(x; \epsilon, d_1, d_2)$ の傾きを設定する。界面方程式とそのとき決まる時刻 T によって、サポートの広がる距離を求め、それ未満に d_1 を設定する。同時に

$$v_0(T, \pm\beta; \epsilon, d_1, d_2) > 0$$

となるようにさらに T を十分小さくする。そのためには、 d_1 をさらに小さく取ることによって、融合する時刻を十分小さくする。改めてこの時刻を T と置くとサポートは遅くとも $t = T$ までに融合する。

- 4) $v_0^0(x; \varepsilon, d_1, d_2)$ に対して、高さ ε 部分に相当する区間幅 d_2 を十分大きくすることによって、 $(T, T'] \times [d_0, \gamma]$ ($d_0 > 0$) において零点の発生を可能とする ([8]).
- 5) $(0, T) \times [d_0, d_1]$ で $v_\rho(t, x)$ ($\rho > 0$) の零点が発生するように ρ を十分小さくとする.

再分離定理 上に述べた 1) から 5) の方法で構成された初期関数に対する解 $v_\rho(t, x; \varepsilon, d_1, d_2)$ について以下のことが成り立つ.

- i) 初期サポートは連結である;
ii) 零点は $(0, T) \times [d_0, d_1]$ で発生し、区間 $[-d_1, d_1]$ 内でサポートは分離する;
iii) 分離したサポートは $t = T$ までに融合する;
iv) 融合したサポートは $(T, T'] \times [d_0, \gamma]$ で再び零点が発生し、区間 $(-\gamma, \gamma)$ 内で再分離する.

証明 i) は自明であり、iii) は比較定理によって得られる. iv) は、 $v_0(t, x; \varepsilon, d_1, d_2)$ のサポート再分離の証明が $0 < \rho < \varepsilon$ の時にも適用できることから導かれる ([8]). 最後に ii) を示そう. 簡単のために

$$\begin{aligned} v_\rho(t, x) &= v_\rho(t, x; \varepsilon, d_1, d_2) \\ u_\rho(t, x) &= u_\rho(t, x; \varepsilon, d_1, d_2) \equiv (v_\rho(t, x; \varepsilon, d_1, d_2))^{m-1}. \end{aligned}$$

と置く.

$t < T$ かつ $\rho > 0$ に対して $v_\rho(t, \pm\beta) > 0$ がであることは初期関数の作り方より明らかである. $\mathbf{S} = [0, T] \times [d_0, d_1]$ とし、 \mathbf{S} がある $\tilde{\rho} (> 0)$ に対して $v_{\tilde{\rho}}(\tilde{t}, \hat{x}) = 0$ となる零点 (\tilde{t}, \hat{x}) を持つことを示そう. そのためには、 $\rho (> 0)$ に対して \mathbf{S} 上で $v_\rho(t, x) > 0$ と仮定しよう.

(5) から次式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{d_0}^{d_1} u_\rho(t, x) dx &= \int_{d_0}^{d_1} u_\rho(0, x) dx \\ &\quad + \int_0^t \int_{d_0}^{d_1} \left\{ m u_\rho(t, x) u_{\rho xx}(t, x) + a (u_{\rho x}(t, x))^2 - c' \right\} dx dt \\ &= (d_1 - d_0) \rho^{m-1} \\ &\quad - \int_0^t \left\{ (d_1 - d_0) c' \right. \\ &\quad \left. - (m-2) a \int_{d_0}^{d_1} u_\rho(t, x) u_{\rho xx}(t, x) dx - a \left[u_\rho(t, x) u_{\rho x}(t, x) \right]_{d_0}^{d_1} \right\} dt \\ &\leq (d_1 - d_0) \rho^{m-1} \\ &\quad - \left\{ (d_1 - d_0) c' - a \max_{[0, t] \times [d_0, d_1]} u_\rho(t, x) \left((2-m) TV(u_{\rho x}^0) + 2 \|u_{\rho x}^0\|_\infty \right) \right\} t \\ &\quad \text{for } t \in [0, T]. \quad (16) \end{aligned}$$

ρ_1 を次式を満たす任意の正定数とする.

$$\rho_1^{m-1} < \frac{(d_1 - d_0) c'}{a \left((2-m) TV(u_x^0) + 2 \|u_x^0\|_\infty \right)}. \quad (17)$$

すると解 $v_\rho(t, x)$ の t と x に関する連続性と ρ に関する比較定理によって次式を満たす正定数 ρ_2 と $\tilde{T} < T$ が存在する.

$$\max_{[0, t] \times [d_0, d_1]} u_\rho(t, x) < \rho_1^{m-1} \quad \text{for } t < \tilde{T} \quad \text{and} \quad \rho < \rho_2 < \rho_1. \quad (18)$$

$T(\rho)$ を

$$T(\rho) = \frac{(d_1 - d_0)\rho^{m-1}}{(d_1 - d_0)c' - a\rho_1^{m-1}\left((2 - m)TV(u_x^0) + 2\|u_x^0\|_\infty\right)}, \quad (19)$$

とし、 $\tilde{\rho} (< \rho_2)$ を $T(\tilde{\rho}) < \tilde{T}$ を満たすように選ぶ。すると $TV(u_{\rho x}^0) \leq TV(u_x^0)$, $\|u_{\rho x}^0\|_\infty \leq \|u_x^0\|_\infty$ と (16) から次式が従う。

$$\int_{d_0}^{d_1} u_{\tilde{\rho}}(t, x) dx < 0 \quad \text{for } t \in (T(\tilde{\rho}), \tilde{T}]. \quad (20)$$

これは証明の仮定に矛盾する。すなわち $v_{\tilde{\rho}}(\tilde{t}, \hat{x}) = 0$ が成り立つような (T_0, \hat{x}) が \mathbf{S} が存在する。解の対称性から ii) が従う。証明終。

参考文献

- [1] X.-Y. Chen, H. Matano and M. Mimura, Finite-point extinction and continuity of interfaces in a nonlinear diffusion equation with strong absorption, *J. reine angew. Math.*, **459**(1995),1–36.
- [2] A.S. Kalashnikov, The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **14** (1974), 891–905.
- [3] A.S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations, *Russian Math. Surveys*, **42** (1987), 169–222.
- [4] K. Matsuoka and K. Tomoeda, Numerical computations to pulse splitting phenomena in the thermal waves through an absorbing medium, *J. Comput. Appl. Math.*, **152**(2003), 319–332.
- [5] T. Nakaki and K. Tomoeda, A finite difference approach to the interface equation for some nonlinear diffusion equations with absorption, *Proc. Japan Acad.*, **77**, Ser. A(2001), 32–37.
- [6] T.Nakaki and K.Tomoeda, A finite difference scheme for some nonlinear diffusion equations in absorbing medium: support splitting phenomena, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40**(2002),945-964.
- [7] O.A. Oleinik, A.S.Kalashnikov and Chzhou Yui-Lin, The Cauchy problem and boundary value problems for equations of the type of nonstationary filtration, *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22** (1958), 667–704.
- [8] K. Tomoeda, The behavior of impulsively initiated thermal waves in an absorbing medium, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B*, **10**(2003),151–164.

競争係数無限大の競争系の界面の形成とその挙動について

中島主恵

東京海洋大学 海洋科学部

1 Introduction

本研究は Georgia Karali 氏 (Univ. of Toronto), 飯田雅人氏 (岩手大), 三村昌泰氏 (明治大), 柳田英二氏 (東北大), 若狭徹氏 (早稲田大) ([5], [12]). との共同研究である.

本稿では次のような競争拡散系を考える.

$$\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + (a - eu - bv)u, & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = D_2 \Delta v + (e - fv - cu)v, & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

ここで $D_1, D_2, a, b, c, d, e, f$ は正の定数, Ω は \mathbb{R}^N 内の領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかなものとする. 互いに競合関係にある二種個体群において, 二種間の競争が激化した状況では, 両種は空間的にどのような配置をとりながら競争するのだろうか?

二種競争系 (1) の棲み分けを数学的に記述する試みに関しては, 既に多くの研究がある. これらの研究では, 拡散係数が小さくて Ω が適度にくびれていれば棲み分けが起こることが数学的に正当化されている ([8], [9], [6] など). この状況では, 拡散による移動がくびれた部分で停滞することが原因で個体群の分布の一樣化が妨げられるのである. では, (1) において拡散係数が小さくなくて Ω が凸な場合には棲み分け・縄張り争いは起きないのだろうか? このような状況では, 定常的な棲み分けは安定には存在しないことが知られている ([7]) ので, 時間が十分たつと個体群の分布は Ω 上で一樣になってしまう. したがって分布が一樣になってしまうまでの間に, 二種がいかに「棲み分け」ながら各々自種の縄張りを変動させていくかを調べるのが目的である.

本講演では 2 種間の競争が非常に激しい場合の解の挙動を考える. すなわち (1) において種間競争率を表す b, c を $b, c \rightarrow \infty$ とした特異極限を解析する. 特に興味深いのは, u と v の間に極端な優劣の差がない状況のもとで $b, c \rightarrow \infty$ となった場合である. すなわち b/c を一定に保ったまま $b, c \rightarrow \infty$ とする状況を考える. 微小パラメータ ϵ を導入して b を b/ϵ^3 , c を c/ϵ^3 とおきなおし, 適当な変数変換をほどこすと上記の方程式系は次のよ

うにかきかえることができる．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + (a - u)u - \frac{b}{\epsilon^3}uv, & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = D\Delta v + (d - v)v - \frac{c}{\epsilon^3}uv, & \text{in } \Omega \times (0, \infty). \end{cases} \quad (\text{P})$$

境界条件と初期条件は次のようにあたえる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) > 0, & \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

ここで n は $\partial\Omega$ への外向き法線， a, b, c, d, D は正定数， ϵ は微小係数である．

形式的計算や数値実験より，微小時間内に 2 種の棲息領域は完全に分離され，両種の縄張りの境目 $\Gamma(t)$ があらわれることが知られている．その後 $\Gamma(t)$ はある法則に従い運動をはじめますが，その運動は次の自由境界問題に支配される．

$$\begin{cases} u_t^* = \Delta u^* + (a - u^*)u^*, \quad v^* \equiv 0 & \text{in } D(t), \\ v_t^* = D\Delta v^* + (d - v^*)v^*, \quad u^* \equiv 0 & \text{in } \Omega \setminus D(t), \\ c \frac{\partial u^*}{\partial \nu} + bD \frac{\partial v^*}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Gamma(t), \end{cases} \quad (2)$$

ここで

$$\Gamma(t) = \partial D(t),$$

ν は $\Gamma(t)$ の内向き法線．

以下 2 章では主結果を紹介し，4 章では初期段階における界面の形成についてを形式的に議論する．5 章では次段階における界面の運動過程を形式的に説明する．さらに 6 章，7 章ではそれぞれ 4 章，5 章において行った議論を数学的に正当化する．

2 主結果

はじめに初期界面 Γ_0 を定義する．

$$R_1(0) = \{x \in \Omega \mid cu_0(x) > bv_0(x)\}, \quad R_2(0) = \{x \in \Omega \mid cu_0(x) < bv_0(x)\},$$

$$\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus (R_1(0) \cup R_2(0)),$$

とおき， $R_1(0)$ と $R_2(0)$ はともに内点をもつとする．

仮定 1 (初期値の非退化性) u_0, v_0 は次をみたす .

$$\inf_{\partial\Gamma_0} |c\nabla u_0 - b\nabla v_0| > 0.$$

注 1 仮定 1 により Γ_0 は $N - 1$ 次元の超曲面でその平均曲率は有界になる .

$(u^*(x, t), v^*(x, t), \Gamma(t))$ を自由境界問題 (2) と次の初期条件をみたす解とする .

$$u^*(x, 0) = \frac{cu_0(x) - bv_0(x)}{c}, \quad \text{in } R_1(0), \quad v^*(x, 0) = -\frac{cu_0(x) - bv_0(x)}{b} \quad \text{in } R_2(0). \quad (3)$$

仮定 2 $(u^*(x, t), v^*(x, t), \Gamma(t))$ は (2) と初期条件 (3) の $\Omega \times [0, T]$ における古典解である . すべての $t \in [0, T]$ にたいし $\Gamma(t)$ は Ω 内で閉であり C^2 の超曲面である . かつ t に関して C^1 である .

仮定 3 u^* と v^* は非負の連続関数で $|u^*|, |\nabla u^*|, |\Delta u^*|, |u_t^*|$ は t に関して $D^-(t)$ 内で一様有界 , $|v^*|, |\nabla v^*|, |\Delta v^*|, |v_t^*|$ は t に関して $\Omega \setminus D(t)$ 内で一様有界になる .

$$\text{仮定 4 } \inf_{y \in \Gamma(t)} \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in R(t)}} |\nabla u^*(x)| > 0, \quad \inf_{y \in \Gamma(t)} \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega \setminus R(t)}} |\nabla v^*(x)| > 0.$$

Theorem 1 正定数 C が存在して十分小さい $\epsilon > 0$ にたいし ,

$$|u_\epsilon(x, t) - u^*(t, x)| < C\epsilon,$$

$$|v_\epsilon(x, t) - v^*(t, x)| < C\epsilon \quad \text{for } (t, x) \in [\epsilon^2, T] \times \Omega,$$

が成立する . ただし $(u_\epsilon(x, t), v_\epsilon(x, t))$ は (P) の非負解.

自由境界問題 (2) については , [2] によって弱解の存在・一意性が知られている以外にはまだ何もわかっていない . 関連する問題として , (2) の最後の等式 (自由境界での flux の釣り合い条件) を

$$\mu \frac{d\Gamma(t)}{dt} = - \left(c \frac{\partial u^*}{\partial \nu} + bD \frac{\partial v^*}{\partial \nu} \right) \nu \quad (\mu > 0) \quad (4)$$

に置き換えた自由境界問題については , 古典解の存在・一意性・挙動が , $N = 1$ のときに限ってではあるが , [10], [11], で論じられている . 我々の自由境界条件は (4) で $\mu = 0$ となった場合に相当する ($d\Gamma(t)/dt = 0$ と考えてはいけなことが , 別の考察からわかる) . つまり , 自由境界条件の中に $d\Gamma(t)/dt$ が陽的に現れない . そのため , (2) は放物型方程式の自由境界問題としては「退化」している . (2) の解の挙動については今後の解析が待たれるところである .

我々は , とりあえず (2) の解の滑らかさを仮定した上で , 議論を進める .

3 既存の結果

一般の反応拡散系において, 界面と呼ばれる解のが急激にその値を変化させる部分に着目し解のダイナミクスを調べる研究は近年盛んに行われている. 多くの研究は, 拡散係数を 0 とした特異極限を扱ったものであり, 本研究のように相互作用の大きさをあらゆる係数を無限大にしたときの特異極限を扱ったものはまだそれほど多くない ([3], [1], [4] 参照).

問題 (P) における棲み分けの過程に関しては Dancer-Hilhorst-Mimura-Peletier[2] が $H^1(\Omega \times (0, T))$ の枠組みで同様の問題を扱い, (P) の解が自由境界問題 (2) の解に収束することを示している.

本研究では初期段階における界面が形成される過程, 次段階における界面が運動する過程をそれぞれ別々に解析し, 運動過程におけるすべての t にたいし, (P) の解が (2) の解に $C^0(\Omega)$ の意味で収束することを示す. また収束のオーダーも詳しく調べる.

4 界面の形成過程

まず (P) における解の挙動について形式的に考える. ϵ は非常に小さい正のパラメータであるので初期段階において (P) は以下の方程式で近似される.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{u}} = -\frac{b}{\epsilon^3} \tilde{u}\tilde{v}, & \tilde{u}(0) = \xi > 0, \\ \dot{\tilde{v}} = -\frac{c}{\epsilon^3} \tilde{u}\tilde{v}, & \tilde{v}(0) = \eta > 0. \end{cases} \quad (5)$$

2 つの関数 $(\phi, \psi) = (\phi(\tau; \xi, \eta), \psi(\tau; \xi, \eta))$ を次の常微分方程式系:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -b\phi\psi, & \phi(0) = \xi > 0, \\ \dot{\psi} = -c\phi\psi, & \psi(0) = \eta > 0. \end{cases} \quad (\text{ODEs.})$$

の解とすると,

$$\tilde{u}(x, t) = \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right), \quad \tilde{v}(x, t) = \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right)$$

ここで (ODEs.) は保存量として

$$A(\phi, \psi) := c\phi - b\psi (= A(\xi, \eta))$$

を持つことに注意したい. これより ϕ は次の 2-parameter ξ, η に関する常微分方程式

$$\dot{\phi} = (A(\xi, \eta) - c\phi)\phi, \quad \phi(0) = \xi, \quad (6)$$

を満たすため求積可能となり次で与えられる:

$$\phi(\tau; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{\xi A(\xi, \eta)}{c\xi - b\eta e^{-A\tau}} & (A \neq 0) \\ \frac{\xi}{1 + c\xi\tau} & (A = 0) \end{cases} \quad (7)$$

同様にして ψ も求積可能である. したがって次が成立する.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \phi(\tau; \xi, \eta) &= \max \left\{ \frac{A(\xi, \eta)}{c}, 0 \right\}, \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \psi(\tau; \xi, \eta) &= \max \left\{ 0, -\frac{A(\xi, \eta)}{b} \right\} \end{aligned}$$

これにより近似解 (\tilde{u}, \tilde{v}) は次をみたす.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{u}(x, \frac{t}{\epsilon^3}) &= \max \left\{ \frac{A(u_0(x), v_0(x))}{c}, 0 \right\}, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{v}(x, \frac{t}{\epsilon^3}) &= \max \left\{ 0, -\frac{A(u_0(x), v_0(x))}{b} \right\} \end{aligned}$$

以上の議論は形式的なものであるが, 次の定理により正当化される. 証明は以下 6 章に示す.

Theorem 2 $C_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$) が存在して十分小さい ϵ に対して次が成立する:

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x, t) - \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right)| &< C_1\epsilon, & \text{in } \Omega \times (0, \epsilon^2), \\ |v_\epsilon(x, t) - \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right)| &< C_1\epsilon, & \text{in } \Omega \times (0, \epsilon^2), \\ |u_\epsilon(x, \epsilon^2) - \max \left\{ \frac{A(u_0(x), v_0(x))}{c}, 0 \right\}| &< C_3\epsilon, & \text{in } \Omega, \\ |v_\epsilon(x, \epsilon^2) - \max \left\{ 0, -\frac{A(u_0(x), v_0(x))}{b} \right\}| &< C_4\epsilon. & \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

ただし $(u_\epsilon(x, t), v_\epsilon(x, t))$ は (P) の非負解.

5 界面の運動過程

前章において解は時間 ϵ^2 以内に界面を形成することを形式的な議論により示した (これは 6 章で正当化される). 形成された界面付近で解は corner layer (角に近い形状をした部分) をもつと考えられる. 界面付近で解の特異性を調べるため, 界面 $\partial D^\epsilon(t)$ の近傍付近で局所直交座標系 (ξ, σ) を導入し, corner layer の動きを解析することを試みる. ここで $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1})$ は $\partial D^\epsilon(t)$ に沿った座標, $\xi = \xi(x, \partial D^\epsilon(t))$ は x から $\partial D^\epsilon(t)$ への

符号付距離関数, ξ は Γ_ϵ の近くで定義され, $D^\epsilon(t)$ において $\xi > 0$ であるとする. さて corner layer の近傍で解を stretch して, すなわち動座標系 (t, ρ, σ) , $\rho = \xi/\epsilon$ を用いて解の挙動を調べる. まず (u, v) は漸近的に

$$(u, v) = \begin{cases} (u^*, v^*) + O(\epsilon) & \text{界面から離れた部分において (外部展開),} \\ \epsilon(U_1, V_1) + \epsilon^2(U_2, V_2) + O(\epsilon^3) & \text{界面の近傍において (内部展開),} \end{cases}$$

とかくことができると仮定する. ここで (u^*, v^*) は固定座標 (t, x) の有界連続関数, (U_1, V_1) と (U_2, V_2) は動座標 (t, ρ, σ) の関数で有界な微係数を持ち, これらの関数はすべて ϵ によらない. 接合漸近展開の方法により, (u^*, v^*) は (2) をみだし, (U_1, V_1) は以下をみだし,

$$\begin{cases} U_{1\rho\rho} = bU_1V_1, & -\infty < \rho < +\infty, \\ DV_{1\rho\rho} = cU_1V_1, & -\infty < \rho < +\infty, \\ (U_1(t, \rho, \sigma), V_1(t, \rho, \sigma)) = \left(0, -\rho \frac{\partial v^*}{\partial \nu^o}(t, y)\right) & \text{as } \rho \rightarrow -\infty, \\ (U_1(t, \rho, \sigma), V_1(t, \rho, \sigma)) = \left(\rho \frac{\partial u^*}{\partial \nu^i}(t, y), 0\right) & \text{as } \rho \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (8)$$

(U_2, V_2) は 7 章の (15) をみたすことがえられる. さらに $D^\epsilon(t)$ は $\epsilon \rightarrow +0$ とすると $D(t)$ に収束することがいえ, 解の動きを本質的に支配するのは自由境界問題 (2) であることがわかる.

6 Theorem 2 の証明

本章では 4 章で構成した近似解を用いて (P) の形成過程における比較関数を構成する. ここでは $\left(\phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right), \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x), v_0(x)\right)\right)$ を (u, v) の第 1 近似解とし, この第 1 近似解にさらに摂動を加えた次の形の関数

$$\begin{cases} \Phi(x, t) := \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t, \epsilon), v_0(x) - s_2(t, \epsilon)\right), \\ \Psi(x, t) := \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t, \epsilon), v_0(x) - s_2(t, \epsilon)\right) \end{cases} \quad (9)$$

に対し適当な $s_1(t, \epsilon)$ 及び $s_2(t, \epsilon)$ をみつけることで (P) の比較関数を構成した.

Proposition 6.1 $s_1(t, \epsilon) := C\epsilon \exp \frac{t}{\epsilon^2}$, $s_2(t, \epsilon) = 0$ とおくとき ($C > 0$), (3) は $t \in (0, \epsilon^2)$ において (P) の優解となる. $s_1(t, \epsilon) := 0$, $s_2(t, \epsilon) = C\epsilon \exp \frac{t}{\epsilon^2}$ とおくとき (3) は $t \in (0, \epsilon^2)$ において (P) の劣解となる.

Proposition 6.1 を証明するために次の2つの Lemma を証明する.

Lemma 6.1 $\tau > 0, \xi > 0, \eta > 0$ に対して次が成立する:

$$\begin{aligned} 0 < \phi_\xi(\tau; \xi, \eta) < 1, \quad -\frac{b}{c} < \phi_\eta(\tau; \xi, \eta) < 0, \\ -\frac{c}{b} < \psi_\xi(\tau; \xi, \eta) < 0, \quad 0 < \psi_\eta(\tau; \xi, \eta) < 1. \end{aligned}$$

Proof. 方程式 (6) より ϕ_ξ は次の方程式を満たす:

$$\dot{\phi}_\xi = (A - 2c\phi)\phi_\xi + c\phi, \quad \phi_\xi(0; \xi, \eta) = 1.$$

適当な $\tau > 0$ に対して $\phi_\xi(\tau) = 1$ となるとすると上の方程式から

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\xi(\tau) &= A(\xi, \eta) - c\phi(\tau) \\ &= A(\xi, \eta) - (A(\phi(\tau), \psi(\tau)) + b\psi(\tau)) \\ &= -b\psi(\tau) < 0 \end{aligned}$$

となるため矛盾が生じる. 従って $\phi_\xi(\tau) < 1$ である. 同様にして $\phi_\xi(\tau) > 0$ も言える. 残りの不等式に関しても同様に常微分方程式の簡単な議論によって示すことができる.

Lemma 6.2 i, j, k には ξ, η のいずれかが入るものとし, ϕ_k, ϕ_{ij} は ϕ の ξ, η に関する 1階微分, 及び 2階微分のいずれかを表し, ψ に関しても同様とする. このとき $\tau > 0, \xi > 0, \eta > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi}{\phi_k} \right| < M_i^k(1 + \tau), \quad \left| \frac{\phi_{ij}}{\phi_k} \right| < M_{ij}^k(1 + \tau), \\ \left| \frac{\psi}{\psi_k} \right| < L_i^k(1 + \tau), \quad \left| \frac{\psi_{ij}}{\psi_k} \right| < L_{ij}^k(1 + \tau) \end{aligned}$$

となる $M_i^k, M_{ij}^k = M(\xi) > 0, L_i^k, L_{ij}^k = L(\eta) > 0$ が存在する.

Proof. $\frac{\phi}{\phi_\xi}$ 及び $\frac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi}$ の評価のみについて証明の概略を述べる. ここでは便宜上 ϕ を変数 ξ 及び変数 A に関する関数として表すことにする. まず (7) より

$$\phi(\tau; \xi, \eta) = \frac{\xi A}{c\xi - b\eta e^{-A\tau}} = \frac{\xi A e^{A\tau}}{A + c\xi(e^{A\tau} - 1)}$$

となるため直接計算により次を得る.

$$\phi_\xi = \frac{A^2(1 + c\xi\tau) + c^2\xi^2(e^{A\tau} - 1 - A\tau)}{(A + c\xi(e^{A\tau} - 1))^2} \quad (10)$$

$$\frac{\phi}{\phi_\xi} = \frac{\xi A(A + c\xi(e^{A\tau} - 1))}{A^2(1 + c\xi\tau) + c^2\xi^2(e^{A\tau} - 1 - A\tau)} \quad (11)$$

ここで不等式 $e^{A\tau} - 1 - A\tau > 0$ ($A \in \mathbf{R}, \tau > 0$) が成立するので (11) より次の評価が従う:

$$0 < \frac{\phi}{\phi_\xi} \leq \xi + \max\left\{\frac{A(\xi, \eta)}{c}, 0\right\} + c\xi^2\tau$$

次に 2 階微分について (10) を直接計算 (対数微分) することで次を得る.

$$\frac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi} = \frac{cK_1(\xi, A) + cK_2(\xi, A) + cK_3(\xi, A)}{[A + c\xi(e^{A\tau} - 1)] \cdot [A^2(1 + c\xi\tau) + c^2\xi^2(e^{A\tau} - 1 - A\tau)]} \quad (12)$$

ただし, K_1, K_2, K_3 は

$$K_1(\xi, A) = 2c\xi\left(e^{A\tau} - 1 - A\tau - \frac{1}{2}A^2\tau^2\right) \cdot [A + c\xi(e^{A\tau} - 1)] \\ (= o(A^3))$$

$$K_2(\xi, A) = 2\tau A \left[A^2(1 + c\xi\tau) + c^2\xi^2(e^{A\tau} - 1 - A\tau) \right] \\ \left(= (2\tau + 2c\xi\tau^2 + c^2\xi^2\tau^3)A^3 + o(A^3) \right)$$

$$K_3(\xi, A) = -2A^2(e^{A\tau} - 1) + 2c\xi A \left[(e^{A\tau} - 1 - A\tau) - A\tau(e^{A\tau} - 1) \right] \\ - c^2\xi^2 \left[2e^{A\tau} \left(e^{A\tau} - 1 - A\tau - \frac{1}{2}A^2\tau^2 \right) - 2A\tau(e^{A\tau} - 1 - A\tau) + A^2\tau^2(e^{A\tau} - 1) \right] \\ - c^3\xi^3\tau \left[2 \left(e^{A\tau} - 1 - A\tau - \frac{1}{2}A^2\tau^2 \right) - A\tau(e^{A\tau} - 1 - A\tau) \right] \\ \left(= \left(\frac{1}{6}c^3\xi^3\tau^4 - \frac{1}{3}c^2\xi^2\tau^3 - c\xi\tau^2 - 2\tau \right) A^3 + o(A^3) \right)$$

により与えられる. これを評価する際には項の形状によりいくつか評価の仕方が異なるが, K_3 における $e^{A\tau} - 1 - A\tau - \frac{1}{2}A^2\tau^2$ を持つ項を除く項に関しては符号を考慮して指数関数の部分がキャンセルするように変形を行えばよく, $e^{A\tau} - 1 - A\tau - \frac{1}{2}A^2\tau^2$ を含むものについては関数 $\frac{e^s - 1 - s - \frac{1}{2}s^2}{s(e^s - 1 - s)}$ が \mathbf{R} 上有界となることを用いればよい. 以上の議論により

$$\left| \frac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi} \right| < M_{\xi\xi}^\xi(1 + \tau)$$

となることがわかる ($M_{\xi\xi}^\xi$ 等は ξ, ξ^{-1} に高々多項式のオーダーで依存することに注意).
 Proposition 6.1 の証明. 優解についてのみ証明する.

$$\begin{aligned} L_1(u, v) &:= u_t - \Delta u - u(a - u) - \frac{buv}{\epsilon^3}, \\ L_2(u, v) &:= v_t - D\Delta v - v(d - v) - \frac{cuv}{\epsilon^3} \end{aligned}$$

とおくとき

$$\begin{cases} \bar{\Phi}(x, t) = \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t, \epsilon), v_0(x)\right), \\ \bar{\Psi}(x, t) = \psi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0(x) + s_1(t, \epsilon), v_0(x)\right) \end{cases} \quad (13)$$

に対して

$$\begin{aligned} L_1(\bar{\Phi}, \bar{\Psi}) &= \phi_\xi \left(\dot{s}_1(t, \epsilon) - \frac{\phi}{\phi_\xi}(a - \phi) - \frac{\phi_{\xi\xi}}{\phi_\xi} |\nabla u_0|^2 - 2 \frac{\phi_{\xi\eta}}{\phi_\xi} \nabla u_0 \nabla v_0 - \frac{\phi_{\eta\eta}}{\phi_\xi} |\nabla v_0|^2 \right), \\ L_2(\bar{\Phi}, \bar{\Psi}) &= \psi_\xi \left(\dot{s}_1(t, \epsilon) - \frac{\psi}{\psi_\xi}(d - \phi) - D \frac{\psi_{\xi\xi}}{\psi_\xi} |\nabla u_0|^2 - 2D \frac{\psi_{\xi\eta}}{\psi_\xi} \nabla u_0 \nabla v_0 - D \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\xi} |\nabla v_0|^2 \right) \end{aligned}$$

となる. Lemma 6.1-6.2 により s_1 として

$$s_1(t, \epsilon) \geq M(\xi + s_1(t, \epsilon)) \cdot \left(1 + \frac{t}{\epsilon^3}\right)$$

を満たすものが取ればよい ($M(\xi)$ は ξ, ξ^{-1} に高々多項式のオーダーで依存する正の定数). ここで $s_1(t, \epsilon) = C\epsilon \exp \frac{t}{\epsilon^2}$ ととれば $t \in (0, \epsilon)$ で上の条件を満たす. 従って $L_1(\bar{\Phi}, \bar{\Psi}) \geq 0$, $L_2(\bar{\Phi}, \bar{\Psi}) \leq 0$ を得る.

Proposition 6.1 の成立から Theorem 2 を証明するには優解と第 1 近似解との差のオーダー及び $t = \epsilon^2$ における第 1 近似解の極限への収束のオーダーを調べればよい. 後者については (6) より容易に従い, また前者については Lemma 6.1 による ϕ_ξ 等の有界性から例えば

$$\begin{aligned} \left| \bar{\Phi}(x, t) - \phi\left(\frac{t}{\epsilon^3}; u_0, v_0\right) \right| &\leq s_1(t, \epsilon) \cdot \int_0^1 |\phi_\xi(s(u_0 + s_1) + (1-s)u_0)| ds \\ &\leq s_1(t, \epsilon) \quad (C > 0) \end{aligned}$$

が従う. 以上の議論により Theorem 2 の証明が完成する.

7 Theorem 3 の証明

本章では 5 章で形式的に論じた界面の形成を正当化する. 5 章では接合漸近展開の方法を用いて, 界面の近傍と界面から離れた場所において別々の近似解を構成した (内部展開

と外部展開) . 本章ではこれらの近似解に修正をほどこし数学的に厳密な優解と劣解を構成する .

界面近傍における優劣解

$d^* > 0$ を十分小さくとり , 符号付距離関数 $dist(x, \Gamma(t))$ が $\{x \in \Omega \mid dist(x, \Gamma(t)) \leq 3d^*\}$ の上でなめらかになるようにする . 次のような $dist(x, \Gamma(t))$ を Ω 上に拡張した関数 \tilde{d} を考える . \tilde{d} は $\tilde{d} \geq 0$ と

$$\tilde{d}(x, t) = \begin{cases} dist(x, \Gamma(t)) & \text{if } |dist(x, \Gamma(t))| \leq d^*, \\ d^* \leq |dist(x, \Gamma(t))| \leq 2d^* & \text{if } d^* \leq |dist(x, \Gamma(t))| \leq 2d^*, \\ |dist(x, \Gamma(t))| = 2d^* & \text{for } \Omega \setminus \{x \in \Omega \mid dist(x, \Gamma(t)) \leq 2d^*\} \end{cases} \quad (14)$$

をみたく . 界面近傍での優劣解を次のように定義する :

$$\begin{aligned} U_{in}^+(x, t) &= \epsilon U_1 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} - \eta(t), \sigma \right) + \epsilon^2 U_2 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} - \eta(t), \sigma, t \right) + \epsilon^3 q(t), \\ V_{in}^+(x, t) &= \epsilon V_1 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} - \eta(t), \sigma \right) + \epsilon^2 V_2 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} - \eta(t), \sigma, t \right) - \epsilon^3 \hat{q}(t), \\ U_{in}^-(x, t) &= \epsilon U_1 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} + \eta(t), \sigma \right) + \epsilon^2 U_2 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} + \eta(t), \sigma, t \right) - \epsilon^3 q(t), \\ V_{in}^-(x, t) &= \epsilon V_1 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} + \eta(t), \sigma \right) + \epsilon^2 V_2 \left(\frac{\tilde{d}(x, t)}{\epsilon} + \eta(t), \sigma, t \right) + \epsilon^3 \hat{q}(t). \end{aligned}$$

ここで

$$\eta(t) = \gamma \exp(Mt)$$

$$q(t) = \sigma \exp(Mt), \quad \hat{q}(t) = \hat{\sigma} \exp(Mt),$$

$\gamma, \sigma, \hat{\sigma}, M$ は適当な正の定数 . (U_1, V_1) は (8) をみたくし , (U_2, V_2) は

$$\begin{cases} -U_{2\xi\xi} + b(U_1 V_2 + U_2 V_1) = -U_{1\xi}(d_t - \Delta d) & -\infty < \rho < +\infty, \\ -DV_{2\xi\xi} + c(U_1 V_2 + U_2 V_1) = -V_{1\xi}(d_t - d\Delta d) & -\infty < \rho < +\infty, \\ (U_2(t, \rho, \sigma), V_2(t, \rho, \sigma)) = (0, 0) & \text{as } \rho \rightarrow -\infty, \\ (U_2(t, \rho, \sigma), V_2(t, \rho, \sigma)) = (0, 0) & \text{as } \rho \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (15)$$

は (15) をみたく . (8) と (15) は接合漸近展開からえられるものだが , これらの解の存在は証明することができ , また形状についての結果もえられている .

界面からはなれた場所での優劣解
 g を以下をみたすなめらかな関数とし

$$g(s) = 0 \text{ if } s < 0, \quad g(s) = 1 \text{ if } s > 1$$

$$g'(0) = g'(1) = 0, \quad g'(s) \geq 0 \text{ for } 0 \leq s \leq 1$$

λ_1, λ_2 を次のように定義する .

$$\lambda_1(s) = g\left(\frac{s}{\epsilon} + \tilde{R}|\log \epsilon|\right), \quad \lambda_2(s) = g\left(-\frac{s}{\epsilon} - \tilde{R}|\log \epsilon|\right).$$

さらに δ を $0 < \delta \ll d^*$ となるようにとり, θ を次のように定義する .

$$\theta(s) = \begin{cases} -\beta\epsilon|\log \epsilon|(s + \delta)^2 + \beta\delta\tilde{R}\epsilon^2|\log \epsilon|^2 + \frac{\beta\delta^2}{\tilde{R}}\epsilon|\log \epsilon|, & -\delta - \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon| \leq s \leq -\tilde{R}\epsilon|\log \epsilon|, \\ \beta\delta\tilde{R}\epsilon^2|\log \epsilon|^2 + \frac{\beta\delta^2}{\tilde{R}}\epsilon|\log \epsilon|, & s \leq -\delta - \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon|. \end{cases}$$

界面から離れた場所での優劣解を次のように定める .

$$U_{out}^+(x, t) = \begin{cases} u^*(x, t) + \epsilon|\log \epsilon|\alpha \exp(Lt) - \theta(\tilde{d}(x, t)), & d(x, t) \leq -\tilde{R}\epsilon|\log \epsilon| \\ (1 - \lambda_1(\tilde{d}(x, t)))U_\epsilon^+ + \lambda_1(\tilde{d}(x, t))\epsilon^4, & d(x, t) > \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon| \end{cases}$$

$$V_{out}^+(x, t) = \begin{cases} 0, & d(x, t) \leq -\tilde{R}\epsilon|\log \epsilon|, \\ v^*(x, t) - \epsilon|\log \epsilon|\alpha \exp(Lt) + \theta(-\tilde{d}(x, t)), & d(x, t) > \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon| \end{cases}$$

$$U_{out}^-(x, t) = \begin{cases} u^*(x, t) - \epsilon|\log \epsilon|\alpha \exp(Lt) + \theta(\tilde{d}(x, t)), & d(x, t) \leq -\tilde{R}\epsilon|\log \epsilon| \\ 0, & d(x, t) > \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon| \end{cases}$$

$$V_{out}^-(x, t) = \begin{cases} (1 - \lambda_2(\tilde{d}(x, t)))W_\epsilon^- + \lambda_2(\tilde{d}(x, t))\epsilon^4, & d(x, t) \leq -\tilde{R}\epsilon|\log \epsilon| \\ v^*(x, t) + \epsilon|\log \epsilon|\alpha \exp(Lt) - \theta(-\tilde{d}(x, t)), & d(x, t) > \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon|. \end{cases}$$

ここで α, β, \tilde{R} は適当な正の定数 .

Ω 全域での優劣解

優劣解を次のように定義する .

$$(u^\pm, v^\pm) = \begin{cases} (U_{in}^\pm, V_{in}^\pm) & |d(x, t)| \leq \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon|, \\ (U_{out}^\pm, V_{out}^\pm) & |d(x, t)| > \tilde{R}\epsilon|\log \epsilon|. \end{cases} \quad (16)$$

全域での優劣解 (u^\pm, v^\pm) は接続点 $|d(x, t)| = \tilde{R}\epsilon |\log \epsilon|$ において一般になめらかにならない． (U_{in}^\pm, V_{in}^\pm) と $(U_{out}^\pm, V_{out}^\pm)$ の接続点 $|d(x, t)| = \tilde{R}\epsilon |\log \epsilon|$ における傾きを詳しく調べて，これらが優劣解になるように $\sigma, \hat{\sigma}, M, \gamma, \beta, \delta, L\tilde{R}$ などの係数を選ぶ必要がある． (u_m^*, v_m^*, D_m) を任意の初期値 $(u_m^*(x, 0), v_m^*(x, 0))$ にたいする自由境界問題 (2) の解とする．

仮定 5 仮定 2 と仮定 3 が， (u^*, v^*, D) を (u_m^*, v_m^*, D_m) にかえても成立する．

$\Gamma_m = \partial D_m$, \tilde{d}_m は (14) において Γ を Γ_m におきかえて定義される．

Theorem 3 (*Iida-Karali-Mimura-Nakashima-Yanagida* [5]) 十分大きな $\gamma > 0$ と十分小さな $\sigma > 0$ にたいし， $C_5, C_6, C_7 > 0$ が存在して，十分小さい $\epsilon > 0$ と以下

$$|u_\epsilon(x, 0) - u_m^*(x, 0)| < C_5\epsilon, \quad |v_\epsilon(x, 0) - v_m^*(x, 0)| < C_5\epsilon \quad x \in \Omega. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x, 0)| &< C_5 \exp\left(-\frac{\sigma|\tilde{d}_m(x, 0)|}{\epsilon}\right), \quad \text{for } \{x \in \Omega \setminus D_m(0); |\tilde{d}_m(x, 0)| > \gamma\epsilon\}, \\ |v_\epsilon(x, 0)| &< C_5 \exp\left(-\frac{\sigma|\tilde{d}_m(x, 0)|}{\epsilon}\right), \quad \text{for } \{x \in D_m(0); |\tilde{d}_m(x, 0)| > \gamma\epsilon\}, \end{aligned} \quad (18)$$

をみたます初期値にたいし次が成立する．

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x, t) - u_m^*(x, t)| &< C_6\epsilon, \quad |v_\epsilon(x, t) - v_m^*(x, t)| < C_6\epsilon, \quad x \in \Omega \times [0, T]. \\ |u_\epsilon(x, t)| &< C_6 \exp\left(-\frac{\sigma|\tilde{d}_m(x, t)|}{\epsilon}\right), \quad \text{for } \{x \in \Omega \setminus D_m(t); |\tilde{d}_m(x, t)| > C_7\epsilon\}, \\ |v_\epsilon(x, t)| &< C_6 \exp\left(-\frac{\sigma|\tilde{d}_m(x, t)|}{\epsilon}\right), \quad \text{for } \{x \in \Omega_m(t); |\tilde{d}_m(x, t)| > C_7\epsilon\}, \end{aligned}$$

ただし $(u_\epsilon(x, t), v_\epsilon(x, t))$ は (P) の非負解．

8 Theorem 1 の証明

Theorem 2, Theorem 3 より次が成立する．

$$\begin{aligned} u^-(x, \epsilon^2) &\leq U^-(x, \epsilon^2) \leq U^+(x, \epsilon^2) \leq u^+(x, \epsilon^2), \\ v^-(x, \epsilon^2) &\geq V^-(x, \epsilon^2) \geq V^+(x, \epsilon^2) \geq v^+(x, \epsilon^2). \end{aligned}$$

したがって仮定 1 をみたます初期値にたいし，解は時間 $t \in (0, \epsilon^2)$ にたいして (U^-, V^-) と (U^+, V^+) の間にあり，時間 $t \in [\epsilon^2, T]$ にたいしては (u^-, v^-) と (u^+, v^+) の間にあることがわかる．Theorem 1 の証明がえられた．

参考文献

- [1] E.N. DANCER AND Y. DU, *Competing species equations with diffusion, large interactions, and jumping nonlinearities*, J. Differential Equations, 114 (1994), pp.434–475.
- [2] E. N. DANCER, D. HILHORST, M. MIMURA AND L.A. PELETIER, *Spatial segregation limit of a competition-diffusion system*, European J. Appl. Math. **10** (1999), no. 2, 97–115.
- [3] L.C. EVANS, *A convergence theorem for a chemical diffusion-reaction system*, Houston J. Math., 6 (1980), pp.259–267.
- [4] D. HILHORST, R. VAN DER HOUT AND L.A. PELETIER, *The fast reaction limit for a reaction-diffusion system*, J. Math. Anal. Appl., 199 (1996), pp.349–373.
- [5] M. IIDA, G. KARALI, M. MIMURA, K. NAKASHIMA AND E. YANAGIDA, *A free boundary problem as a singular limit of a competition-diffusion system*, in preparation.
- [6] Y. KAN-ON AND E. YANAGIDA, *Existence of non-constant stable equilibria in competition-diffusion equations*, Hiroshima Math. J., 23 (1993), pp. 193–221.
- [7] K. KISHIMOTO AND H. F. WEINBERGER, *The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains*, J. Differential Equations, 58 (1985), pp. 15–21.
- [8] H. MATANO AND M. MIMURA, *Pattern formation in competition-diffusion systems in nonconvex domains*, Publ. RIMS Kyoto Univ., 19 (1983), pp. 1049–1079.
- [9] M. MIMURA, S.I. EI AND Q. FANG, *Effect of domain-shape on coexistence problems in a competition-diffusion system*, J. Math. Biol., 29 (1991), pp. 219–237.
- [10] M. MIMURA, Y. YAMADA AND S. YOTSUTANI, *A free boundary problem in ecology*, JJAM, 2 (1985), pp. 151–186.
- [11] M. MIMURA, Y. YAMADA AND S. YOTSUTANI, *Stability analysis for free boundary problems in ecology*, Hiroshima Math. J., 16 (1986), pp. 477–498.
- [12] K. NAKASHIMA AND T. WAKASA, *Generation of interface to a Lotka-Volterra competition diffusion system with large interaction rate*, in preparation.

2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が不安定になるための一般的な判定法について

宮本 安人[†]

北海道大学大学院工学研究科知識メディアラボラトリー

中核的研究機関研究員

1 序論

非線形解析において，安定定常解，すなわち物理的に実現可能である安定なパターンを探すことは，多くの研究者の興味を引き付けてきた．数学的な視点からは，1. 定常解の形状，2. その定常解の安定性，3. 領域の形状，の三つの関係が主な興味の対象であった．以下，自然現象や社会現象のモデル方程式（未知関数が複数の場合はモデル方程式系）に多く現れる Neumann 境界条件下における反応拡散方程式（系）の定常解の安定性について考える．

Casten-Holland[CH78] は 1978 年に，俣野 [M79] は 1979 年に，独立に一般次元の有界凸領域上の単独反応拡散方程式の非定数定常解は不安定となることを示した．これによって，単独反応拡散方程式で記述されるモデル方程式は，有界凸領域上では安定な非自明なパターンを持たないことが明らかになった．一方，領域が凸ではない場合は，安定な非定数定常解を持つ単独反応拡散方程式の例が知られている [M79] ．

次の結果を紹介する前に，shadow system について説明する（詳しくは [N82] を参照せよ）．二つの未知関数 $u(x, t), v(x, t)$ からなる次の反応拡散系を考える．

$$u_t = D_u \Delta u + f(u, v) \quad \text{in } \Omega, \quad \tau v_t = D_v \Delta v + g(u, v) \quad \text{in } \Omega, \quad (\text{FS})$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \partial_\nu v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

第 2 式の拡散係数を無限大，すなわち $D_v \rightarrow +\infty$ とすると， $v(x, t)$ は空間的に一様になると予想される．つまり，空間変数に依存せずに時間変数にのみ依存する関数 $\xi(t)$ を用いると， $v(x, t) \rightarrow \xi(t)$ ($D_v \rightarrow +\infty$) ．そこで，形式的に $v(x, t) = \xi(t)$ とし，第 2 式と定数関数 1 との L^2 内積をとることによって，すなわち Neumann 境界条件の下で両辺を積分することによって，(SS) を得る．この操作は，定数関数 1

[†] 〒 060-0812 北海道札幌市北区北 12 条西 6 丁目北海道大学電子科学研究所，情報数理分野（西浦教授室）

e-mail: miyamoto@nsc.es.hokudai.ac.jp

	単独方程式	連立方程式
空間 1 次元	定数解のみ	定数解と単調関数のみ
空間 N 次元 ($N \geq 2$)	定数解のみ	?

表 1: 有界凸領域上, 定常解が安定となるための定常解の形状に関する条件

と直交する方向, すなわち 2 番目以降の高いモードの成分を全て消去することに対応する.

$$u_t = D_u \Delta u + f(u, \xi) \quad \text{in } \Omega, \quad \tau \xi_t = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(u, \xi) dx, \quad (\text{SS})$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

(SS) は shadow system と呼ばれる. (FS) の数学的な解析は一般的に非常に困難であるが, この shadow system は, 元の連立方程式 (FS) の性質を受け継ぎつつも $v(x, t)$ が空間的に一様な関数 $\xi(t)$ に置き換えられているので, 数学的な解析が比較的容易となる. (FS) と (SS) はダイナミクスについても密接な関係がある [M05b].

本題に戻り, 定常解の形状と安定性に関する次の結果を紹介する. 西浦 [N94] は 1994 年に, 1 次元有界区間上の活性因子・抑制因子系と呼ばれる反応拡散系の shadow system において, (SS) における u が定数関数と単調関数以外ならば, その定常解は不安定であることを示した. この結果は, 後に Ni-Poláčik-柳田 [NPY01] によって, より広いクラスの反応拡散系の shadow system に対して成立することが示された. 表 1 は, これらの結果をまとめたものである.

表 1 の右下の場合, すなわち多次元領域上の (単独ではない) 反応拡散系における定常解の形状と安定性の関係が興味の対象となる. まず, この問題に関連する結果を紹介する. 広いクラスではないが, よく知られているいくつかの具体的な反応拡散系については, 球などの有界凸領域の場合においても, 安定な非定数定常解の存在が知られている. 例えばヒドラと呼ばれる体長 5mm ほどの小さな生物の「頭」の形成に関するモデル方程式系である Gierer-Meinhardt 系の shadow system (例 2.1 内の (GM)) は, 2 次元円盤領域では (中立) 安定な境界スパイク解と呼ばれる非定数定常解を持つことが知られている [NTY01]. この境界スパイク解とは, 境界上 (または境界の近傍上) のある 1 点で最大値をとり, その点以外では, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると 0 に収束するようなスパイクの形状をした定常解のことである. 2 次元円盤領域以外の領域においても境界スパイク解の存在は 90 年代から知られていたが, その安定性は知られていなかった. しかし, 最近, スパイクの位置する領域の境界に関する適当な条件の下で境界スパイク解の安定性が示された [M05a].

一方, 反応拡散系が勾配系 [JM94] や歪勾配系 [Y02] などの特殊な構造を持つ場合は, 空間多次元においても領域が凸ならば, 「抑制方程式の時定数と呼ばれる変数 (SS) や (FS) における τ に相当) がある程度大きい」といった条件の下で, 全ての非定数定常解が, 不安定となることが知られている. 特に Gierer-Meinhardt 系は指数 (p, q, r, s) に関する適当な条件を満たすときに歪勾配系となり, 上記の結果は, 安定な境界スパイク解の存在に一見すると矛盾した結果に思われる. しかし, 上記の条件は, 時定数 τ が小さい場合を含まず, その場合において, 安定な非定数定常解が存在することが予想される. また, このことは, 非定数定常解が不安定で

あっても、時定数 τ を小さくすることによって、安定化する可能性があることを示唆している。時定数 τ により定常解の安定性が変化するこのような現象は、単独方程式では現れず、連立方程式特有の現象である。時定数 τ を変化させることによって安定定常解が不安定化する場合は、通常は Hopf 分岐を起こして不安定化するので、時間周期的な解が現れることが予想される。そのような視点からの研究は比較的多くなされているが、定常解が不安定となるための十分条件を求める（対偶をとると、定常解が安定になるための必要条件を求める）といった視点からは、このことは今まであまり明確に意識されていなかったように思われる。反応拡散系の定常解の安定性を考える場合は、時定数 τ が小さな範囲を含むかどうかを常に注意する必要があると思われる。よって（単独ではない）反応拡散系においては非定数定常解が安定になりやすいと思われる時定数 τ が小さな場合を含む結果が重要となる。なぜなら、 τ が小さくないときには定数定常解しか安定にならないと思われるからである。時定数 τ が小さいときに安定になりやすいことの直感的な説明は 2.3 節で行う。

そこで、1. 時定数 τ が小さい場合を含み、2. 多次元領域上の、3. 特定の系ではなく広いクラスの（単独ではない）反応拡散系に対し、「安定ならば、どのような形か？」、すなわち定常解の形状とその安定性の関係が問題となる。しかし、この問題に関する結果は、これまで知られていないように思われる。それは、「多次元領域上で定義された関数の形状を、どのように数学的に表現するか？」といった問題が潜在的であり、あまり意識されないことが、証明における技術的困難さと共に原因であるように思われる。

2 主結果

2.1 活性因子・抑制因子系

主結果を述べる前に、活性因子・抑制因子系について説明する。活性因子・抑制因子系 (Activator-Inhibitor system) とは、活性因子 (Activator) と抑制因子 (Inhibitor) と呼ばれる 2 種の生化学物質が相互作用する現象のモデル方程式系である。(SS) に対しては、空間座標 x 時刻 t における活性因子の濃度を $u(x, t)$ とし抑制因子の濃度を $\xi(t)$ とする (FS) に対しては、抑制因子を $v(x, t)$ とする)。活性因子は抑制因子を活性化させ、抑制因子は活性因子を抑制する。さらに抑制因子は自然に減衰するといった性質を持つ。これを数学的に表現すると、次の条件 (N2) となる。

$$f_{\xi} < 0, \quad g_u > 0, \quad g_{\xi} < 0. \quad (\text{N2})$$

また、(SS) は抑制因子の拡散の強さが無限大であり、抑制因子が常に空間的に一様となる状況に相当する。

以下、下記の例で述べる Gierer-Meinhardt 系や FitzHugh-Nagumo 系と呼ばれる代表的な反応拡散系を含む、2 次元円盤領域 $B_R(O)$ 上の活性因子・抑制因子系の shadow system (SS) (f, g は C^2 級で、非線形項は (N1) か (N2) のどちらかを満たすとする) を考える。ここで、条件 (N1) は次である。

$$f_{\xi} < 0, \quad g_{\xi} < 0, \quad \text{関数 } k(\xi) \text{ が存在し } ,g_u(u, \xi) = k(\xi)f_{\xi}(u, \xi) \text{ を満たす.} \quad (\text{N1})$$

条件 (N2) は, 上記の活性因子・抑制因子系の説明から自然な条件と思われるが, (N1) は, 少々技術的に見える. しかし, 下記のとおり Gierer-Meinhardt 系や FitzHugh-Nagumo 系を含む.

例 2.1 Gierer-Meinhardt 系の shadow system

$$u_t = \varepsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^p}{\xi^q} \text{ in } \Omega, \quad \tau \xi_t = -\xi + \frac{1}{|\Omega| \xi^s} \int_{\Omega} u^r dx, \quad (\text{GM})$$

$$\partial_{\nu} u = 0 \text{ on } \partial \Omega,$$

$$p > 1, q > 0, r > 0, s \geq 0, 0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}, p < \begin{cases} \infty & \text{if } N = 1, 2; \\ \frac{N+2}{N-2} & \text{if } N \geq 3, \end{cases}$$

は, 常に (N2) を満たす. また, $p = r - 1$ ならば, (N1) を満たす.

例 2.2 FitzHugh-Nagumo 系の shadow system

$$u_t = D_u \Delta u + u(u - a)(1 - u) - \gamma \xi \text{ in } \Omega, \quad \tau \xi_t = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx - \kappa \xi,$$

$$\partial_{\nu} u = 0 \text{ on } \partial \Omega,$$

$$0 < a < 1, \gamma > 0, \kappa > 0,$$

は, 常に (N1) と (N2) を満たす.

2.2 主結果

$(u(x, y), \xi) \in (C^2(B_R(O)) \cap C^0(\overline{B_R(O)})) \times \mathbb{R}$ を (SS) の定常解とする. ここで, 主定理の仮定, すなわちこの定常解が不安定となるための次の十分条件 (A) を提示する.

$\mathcal{Z}[U_{\theta}(\cdot)] \geq 3$, かつ u は (円盤領域 $B_R(O)$ 上で) 定数定常解ではない. (A)

ここで, $U(\theta) := u(R \cos \theta, R \sin \theta)$, $\mathcal{Z}[\cdot]$ は, 次で定義する任意の 2π 周期連続関数の零等高面の濃度とする. すなわち任意の $w(\theta) \in C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ に対して,

$$\mathcal{Z}[w(\cdot)] := \#\{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; w(\theta) = 0\}.$$

条件 (A) において, 2次元円盤領域上定義された関数の形状が, 領域の境界に制限した関数 $U(\theta)$ の臨界点の数 $\mathcal{Z}[U_{\theta}(\cdot)]$ を用いて表現されていることに注意せよ. ところで, 条件 (A) において (円盤領域上で) 定数定常解ではないという条件も, 境界における定常解 u の形状と ξ の値を用いて, 特徴づけることができるが, 割愛する.

下記の定理 A と系 B が主結果である.

定理 A

$(u(x, y), \xi)$ は (SS) の定常解とする.

(i) $(u(x, y), \xi)$ は (A) を満たすとする. 非線形項が (N1) を満たすとき, 任意の $\tau > 0$ について, (u, ξ) は不安定.

(ii) $(u(x, y), \xi)$ は非定数定常解とする. 非線形項が (N2) を満たすとき, ある $\tau_0 > 0$ が存在し, $\tau > \tau_0$ ならば, (u, ξ) は不安定.

条件 (A) の否定命題は，必ずしも自明ではないが，上記の定理 A (i) の対偶命題が下記の系 B である．

系 B

(u, ξ) を (SS) の定常解とする．非線形項が (N1) を満たすとき，ある $\tau > 0$ について (u, ξ) が安定ならば， $\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] = 2$ または， u は (円盤領域 $B_R(O)$ 上の) 定数定常解．

2.3 主結果の直感的解釈

主結果のうち，特に定理 A (i) と系 B は，時定数 τ が小さい場合も含み，この場合が重要である．

時定数 τ の役割について直感的に説明する． τ は活性因子と抑制因子の反応速度の比を表し， τ が小さいことは抑制因子の反応速度が速いことを意味する．従って， τ が小さいときは，系全体を安定化させる作用があり，非定数定常状態でも安定になりやすいと解釈できる．定理 A (ii) は，抑制因子の反応速度が遅い場合，定数定常解以外の定常解は安定化することができないことを意味し，定理 A (i) は，抑制因子の反応速度にかかわらず不安定であるので，条件 (A) は安定化できないほど定常解の形状が複雑であることを意味する，と解釈できる．さらに系 B は，適当な τ で定常解が安定化できるためには，定常解の形状があまり複雑ではない，すなわち $\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] = 2$ または定数定常解であることを意味すると解釈できる．

3 証明の概略

この節では，証明の概略を述べる．

(SS) の定常解 (u, ξ) における下記の (SS) の線形化固有値問題を考える．

$$Lv + f_\xi(u, \xi)\eta = \lambda v \quad \text{in } \Omega, \quad \langle v, g_u(u, \xi) \rangle + \langle 1, g_\xi(u, \xi) \rangle \eta = \lambda \tau \eta, \quad (\text{EP})$$

$$\partial_\nu v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

ここで， $L := D_u \Delta + f_u(u, \xi)$ ， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^2(\Omega)$ 内積，この節では v は (FS) 中の v とは異なる未知関数とする．第 2 式を η について解き，第 1 式に代入し次の固有値問題を導く．

$$(L + A_{\lambda, \tau})v = \lambda v. \quad (\text{EP1})$$

ここで， $A_{\lambda, \tau}$ はランク 1 の次の作用素とする．

$$A_{\lambda, \tau} v := \frac{\langle v, g_u(u, \xi) \rangle}{\lambda \tau - \langle 1, g_\xi(u, \xi) \rangle} f_\xi(u, \xi).$$

固有値問題 (EP1) は， $A_{\lambda, \tau}$ 内に λ があるので通常の固有値問題とは異なることに注意せよ．(EP1) の固有値は Sherman-Morrison の公式と呼ばれる下記の式を使ってある程度詳しく解析することができる．

$$(L + A_{\lambda,\tau} - \lambda)^{-1} = \left(1 - \frac{(L - \lambda)^{-1}A_{\lambda,\tau}}{h(\lambda)}\right) (L - \lambda)^{-1}.$$

ここで

$$h(\lambda) := 1 + \frac{\langle (L - \lambda)^{-1}[f_\xi(u, \xi)], g_u(u, \xi) \rangle}{\lambda\tau - \langle 1, g_\xi(u, \xi) \rangle}.$$

結論だけ述べると, $\lambda \notin \text{Spec}(L)$ の条件の下, $(L + A_{\lambda,\tau} - \lambda)$ が可逆であることと, $h(\lambda) = 0$ であることは同値となる. また, $h(\lambda) = 0$ は下記と同値である.

$$\lambda\tau - \langle 1, g_\xi(u, \xi) \rangle = h_0(\lambda), \quad (1)$$

$$h_0(\lambda) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\lambda - \mu_n}, \quad a_n = \langle f_\xi(u, \xi), \phi_n \rangle \langle \phi_n, g_u(u, \xi) \rangle.$$

ここで, $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ と $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ は Neumann 境界条件下における作用素 L のそれぞれ固有値と固有関数である. (N1) と (N2) の条件を考慮し, (1) の両辺の λ に関するグラフを考える. ここで少々天下りの的ではあるが $\mu_2 > 0$ を仮定する. すると定理 A (i)(ii) のそれぞれの仮定の下で, 両グラフの交点が $\lambda > 0$ の領域で存在するので, 定理 A が示される (その交点は (EP) の固有値である). 従って, 条件 (A) ならば $\mu_2 > 0$, すなわち Neumann 境界条件下における作用素 L の第 2 固有値が正となることを示せばよい.

$\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] \in \mathbb{N}$ かつ $\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] \geq 3$ ならば, 定常解 u の回転方向微分 $u_\theta (:= -yu_x + xu_y)$ は, 領域の境界に 3 つ以上の零点を持つ (このことは必ずしも自明ではないが) u_θ は 3 つ以上の節領域 (nodal domain), すなわち $\{(x, y) \in B_R(O); u_\theta(x, y) \neq 0\}$ の連結成分を持つ. よって Courant の節定理から, $\mu_2 > 0$ が結論される.

次に, $\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] \notin \mathbb{N}$ ならば, $\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] = \aleph_1$ でなければならない. ここで \aleph_1 は連続濃度を表すとする. u_θ は $Lu_\theta = 0$ を満たすので, $\Delta + V(x)$ といった形の作用素の境界に関する一意接続性定理から, この場合は $u_\theta = 0$ でなければならない. 従って, u は球対称となり, L の第 1 固有関数も球対称となる. 第 2 固有値の変分的特徴づけから,

$$\mu_2 = \sup_{z \in (\text{span}(\phi_1)^\perp \cap H^1) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{H}(z)}{\|z\|_{L^2}}.$$

ここで,

$$\mathcal{H}(\psi) := \int_{B_R(O)} (-|\nabla\psi|^2 + f_u(u, \xi)\psi^2) dx.$$

μ_2 の特徴づけの式において, z として u_x を考えることにより, 右辺は 0 以上となることが分かる. 一方 u_x は u が定数定常解でなければ Neumann 境界条件を満たさないので, $\mu_2 > 0$ が結論される. ゆえに定理 A は証明された.

注意 3.1 上記の証明の中心部分は, $\Delta u + f_0(u) = 0$ の線形化固有値問題の第 2 固有値が正となることの証明である. この問題はモデル方程式とは少し離れ, 以下のような数学的な興味に基づく新たな問題を提起している. [CH78, M79] から, 有界凸領域上の単独反応拡散方程式の非定数定常解は不安定であることがわかるが, 非定数定常解ならば第 1 固有値が正となる, と, この問題を捉えなおすことができる. ここでは 定常解がどのような形状ならば, 第 2 固有値が正となるか? が問題となる.

2次元円盤領域の場合は条件 (A) が一つの十分条件であるが、一般的な領域の場合は、この問題の解答は知られていないと思われる。直感的に述べれば、2つ以上の「山」を持つ形状ならば、第2固有値が正となることが予想される。対偶をとれば、「安定ならば定常解の形状は一つの「山」しか持たない」となる。山の裾野の高さを考えることによって、系 B と矛盾しないことが直感的に理解できる。

4 他の知られている事実との関連

最近、Lin-高木 [LT01] によって、序論で紹介した 2次元円盤領域上の Gierer-Meinhardt 系の shadow system の (中立) 安定な境界スパイク解は、 $\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] = 2$ であることが示されており、この結果は系 B と符合する。また、系 B によって、2次元円盤領域上の活性因子・抑制因子系の安定定常解は、Gierer-Meinhardt 系における境界スパイク解に似た形状の定常解のみであることが示唆される。

5 まとめと今後の展開

本報告では、2次元円盤領域上の活性因子・抑制因子系の定常解が不安定となるための定常解の形状から判定できる条件 (A) を提示した。具体的には、円盤の境界に制限した定常解の臨界点の数によって安定定常解の必要条件を求めた。

この定理の不満な点は、領域が円盤領域に限られる点であろう。2次元有界凸領域への拡張を試みているが、技術的な問題からか、もしくは凸領域においても反例がある可能性も排除できていないのでそれが原因からか、現在のところ成功には至っていない。3次元以上への拡張を考える場合は、本稿と同じ戦略をとる場合は、そもそも関数を領域の境界に制限したとき、その制限した関数をどのように数学的に記述するか、といった根本的なところから問題となるように思われる。

次に不満な点は、この定理は安定定常解の境界の形状の情報しか得られないことである。当然のことながら、安定定常解の領域の内部における形状を得ることが目標であるが、境界における定常解の形状の情報のみから、内部における定常解の形状の情報が得られないか、検討している。

現在考えている詳しい数学的解析が行える可能性が高いと思われる設定は、(SS) において、 D_u が小さい場合の定常解の形状と安定性の関係である。 $D_u \rightarrow 0$ としたとき、定常解を $x \mapsto \sqrt{D_u}x$ によるスケーリングを行った関数を考えることによって、局所的には \mathbb{R}^2 全領域における単独楕円型方程式の有界な解と考えることができ、さらに定常解の形状と線形化固有値問題の正の固有値の数 (この数は Morse 指数と呼ばれる) の対応関係がある程度詳しく分かるからである。

一般的に、定理の仮定の範囲の広さとその定理から得られる情報量はトレードオフの関係にある。従って、反応拡散系の研究の方向性に関しては、広いクラスの非線形項について成り立つ普遍的ではあるが情報量としては少ないと思われる一般論的な方向と、ある程度非線形項のクラスを制限してもより深い情報を得られる問題個別的な方向の2つがあると思われる。本研究は、領域は円盤領域に限られるが、非線形項に関しては広いクラスと思われるので、主結果以上の情報を得るためには非線形項のクラスを制限する必要がある可能性がある。

謝辞

偏微分方程式と現象 (PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005) において講演を行う機会を与えて下さった宮崎大学矢崎成俊助教授に厚く御礼を申し上げます。また、辻川亨教授をはじめとする研究集会を主催された宮崎大学工学部の皆様に感謝いたします。予稿と本報告を書くことによって、問題意識と問題設定をより明確に認識し、本研究の位置づけを再確認することができました。さらに本研究を深化させる方向を考える上で良い機会を得ることができました。

参考文献

- [CH78] R. CASTEN and R. HOLLAND, *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eq., **27**(1978), 266–273.
- [JM94] S. JIMBO and Y. MORITA, *Stability of nonconstant steady-state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions*, Nonlinear Anal., **22**(1994), 753–770.
- [LT01] C. S. LIN and I. TAKAGI, *Method of rotating planes applied to a singularly perturbed Neumann problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **13**(2001), 519–536.
- [M79] H. MATANO, *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **15**(1979), 401–454.
- [M05a] Y. MIYAMOTO, *Stability of a boundary spike layer for the Gierer-Meinhardt system*, European J. Appl. Math., **16**(2005), 467–491.
- [M05b] Y. MIYAMOTO, *Upper semicontinuity of the global attractor for the Gierer-Meinhardt model*, to appear in J. Diff. Eq.
- [M05c] Y. MIYAMOTO, *An instability criterion for activator-inhibitor systems in a two-dimensional ball*, preprint.
- [N82] Y. NISHIURA, *Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., **13**(1982), 555–593.
- [N94] Y. NISHIURA, *Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit*, Dynamics Reported, **3**(1994), 25–103.
- [NPY01] W. M. NI, P. POLÁČIK and E. YANAGIDA, *Monotonicity of stable solutions in shadow systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **353**(2001), 5057–5069.
- [NTY01] W. M. NI, I. TAKAGI and E. YANAGIDA, *Stability of least energy patterns of the shadow system for an activator-inhibitor model*, Japan J. Indust. Appl. Math., **18**(2001), 259–272.
- [Y02] E. YANAGIDA, *Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure*, J. Diff. Eq., **179**(2002), 311–335.

Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について

佐賀大・理工 小林 孝行
Takayuki KOBAYASHI
Department of Mathematics
Faculty of Science and Engineering, Saga University

1 Introduction

本講演は、鈴木貴氏(大阪大学基礎工学部)との共同研究の内容を中心に報告する。

自己重力場における圧縮性粘性気体の運動を記述した Navier-Stokes-Poisson 方程式:

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, \\ (\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \rho \nabla \Phi + a \nabla \rho^\gamma &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u), \\ (1) \quad \Delta \Phi &= 4\pi g \left(\rho - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho dx \right) \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \times (0, T), \\ \rho|_{t=0} &= \rho_0, \quad (\rho u)|_{t=0} = q_0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

を考える。ここで、 Ω は $C^{2,\theta}$ の境界 $\partial \Omega$ をもつ \mathbf{R}^3 の有界領域、 ν は単位外法線ベクトル、 $\rho = \rho(x, t)$ は流体の密度、 $u = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t))$ は流速、 $\Phi = \Phi(x, t)$ は Newtonian gravitational potential、 $\gamma > 1$ は adiabatic constant、 $\mu > 0$ と λ は $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0$ をみたす粘性係数、 $a = e^S$ はエントロピー S によって決まる定数、 $g > 0$ は万有引力定数である。

気体星の方程式は、粘性を考慮せず、空間を $\Omega = \mathbf{R}^3$ 全体で考えた Euler-Poisson 方程式

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, \\ (2) \quad (\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \rho \nabla \Phi + a \nabla \rho^\gamma &= 0, \\ \Delta \Phi &= 4\pi g \rho \quad \text{in } \mathbf{R}^3 \times (0, T), \end{aligned}$$

として記述される。この Euler-Poisson 方程式では、解が滑らかなとき、Euler 方程式より質量保存則

$$M = \int_{\Omega} \rho dx$$

が得られ，またエネルギー

$$(3) \quad \begin{aligned} E &= \int_{\Omega} \left(\frac{\rho}{2} |u|^2 + \frac{P}{\gamma-1} \right) dx + \frac{g}{2} \int \int_{\Omega \times \Omega} G(x, y) \rho(x) \rho(y) dx dy \\ &= \frac{a}{\gamma-1} \|\rho\|_{\gamma}^{\gamma} + \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} u\|_2^2 - \frac{1}{8\pi g} \|\nabla \Phi\|_2^2 \end{aligned}$$

は減衰することがわかる．ここで， $P = a\rho^{\gamma}$ は圧力であり， $G = G(x, y)$ は Poisson 方程式

$$\Delta \Phi = 4\pi g \rho$$

の Green 関数，即ち

$$\Phi(x) = g \int_{\Omega} G(x, y) \rho(y) dy$$

である．Poisson 方程式において， $\rho \in L^{\gamma}$ は， $\gamma \geq \frac{6}{5}$ のとき $\Phi_{x_i} \in L^2$ であることがわかる．実際，楕円型評価と Sobolev の不等式により

$$\|\nabla \phi\|_2 \leq gK \|\rho\|_{\frac{6}{5}}$$

が成り立つからである．従って，このエネルギー E から， $\gamma > \frac{6}{5}$ と $\gamma = \frac{6}{5}$ は，それぞれ，平衡解の subcritical および critical 指数となる．実際，Euler-Poisson 方程式 (2) の $u = 0$ の場合に得られる平衡解は，(2)₃ と

$$\Phi + \frac{a\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = const$$

によって決まり，その変分構造から $\gamma > \frac{6}{5}$ のとき解が存在し， $1 < \gamma < \frac{6}{5}$ のとき非存在であることが知られている．

Euler-Poisson 方程式 (2) では，T. Makino [4] は，初期密度 $\rho_0(x)$ がコンパクト台をもち，非負，即ち真空を含むとき，初期値が適切な関数空間に属せば，Euler-Poisson 方程式 (2) は時間局所的に古典解を持つことを示した．T. Makino, S. Ukai, and S. Kawashima [5] は，この存在定理は平衡解をとらえていないこと，さらにこの古典解の存在時間は有限であることを示している．従って，平衡解を含む関数空間の中で存在定理を確立することが大きな目標の一つである．この問題の難しさは Euler 方程式の解が真空と接するときの解の正則性にあり，不連続も許すため，3次元 Euler 方程式の場合はその弱解の存在も知られていないのが現状である．

一方，粘性を考慮し，Poisson 項を落とした圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned}\rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, \\ (\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + a \nabla \rho^\gamma &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u),\end{aligned}$$

では，P. L. Lions [9] が Cauchy 問題の場合， $\gamma > \frac{9}{5}$ のときエネルギー有限な弱解の存在を示している．また，E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltová [2] は有界領域の場合，気体が単一原子である $\gamma = \frac{5}{3}$ を含む $\gamma > \frac{3}{2}$ の場合にエネルギー有限な弱解の存在を示している．

粘性を考慮した Navier-Stokes-Poisson 方程式では，M. Okada, and T. Makino [8], S. Matsusu-Necasova, M. Okada, and T. Makino [6, 7] が，中心に固体核を想定し，真空と接する球対称解の存在，一意性，漸近挙動の研究を行っている，また，B. Ducomen, E. Feireisl, H. Petzeltová, and I. Straskrabá [1] は，ゼロ拡張した密度に対して Poisson 方程式を考え，一般の有界領域の場合にエネルギー有限な弱解の存在を示している．本稿では，球対称を仮定せず，一般の有界領域の場合に Navier-Stokes-Poisson 方程式 (1)，特に，Neumann 境界条件下で Poisson 方程式を考え，E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltová [2] の方法に従ってエネルギー有限な弱解の存在定理が得られたことを報告する．

2 主結果

我々は次の結果を得た．

定理 1 $T > 0$ とし $\gamma > \frac{3}{2}$ とする．初期値 (ρ_0, q_0) は $\rho_0 = \rho_0(x) \geq 0$, $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega)$, $|q_0^i|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$, さらに， $\rho_0(x) = 0$ のとき $q_0^i(x) = 0$ を満たすとする．このとき，次をみたすエネルギー有限な (1) の弱解 (ρ, u, Φ) が存在する：

1. $\rho = \rho(x, t) \geq 0$, $\rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega))$, $u^i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.
2. E を (3) のエネルギーとするととき， $E = E(t) \in L^1_{loc}(0, T)$.
3. $\frac{d}{dt} E(t) + \mu \|\nabla u\|_2^2 + (\lambda + \mu) \|\nabla \cdot u\|_2^2 \leq 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$.
4. 方程式 (1)₁, (1)₂ は $\mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ の意味で成り立つ．

5. $\Phi(\cdot, t) = g \int_{\Omega} G(\cdot, y) \rho(y, t) dy$ for a.e. $t \in (0, T)$.
6. ρ, u の Ω の外への零拡張は, 方程式 (1)₁ を $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3 \times (0, T))$ の意味でみたす.
7. 方程式 (1)₁ は *renormalized solution* の意味で成り立つ. すなわち任意の $b \in C^1(\mathbf{R})$, $b'(z) = 0$ ($|z|$: 十分大) に対して, $\mathcal{D}'(\Omega \times (0, T))$ の意味で

$$\frac{d}{dt} b(\rho) + \nabla \cdot (b(\rho)u) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\nabla \cdot u = 0$$

が成り立つ.

定理 1 と方程式 (1)_{1,2} により

$$\rho \in C([0, T]; L_{weak}^{\gamma}(\Omega)),$$

$$\rho u^i \in C([0, T]; L_{weak}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega))$$

が得られ, 従ってこの弱解において初期条件は意味を持つことがわかる. 証明は E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltová [2] の方法, つまり β を十分大に取り, 方程式

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= \varepsilon \Delta \rho, \\ (\rho u)_t + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \rho \nabla \Phi + a \nabla \rho^{\gamma} + \delta \nabla \rho^{\beta} + \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \rho \\ (2) \quad &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u), \\ \Delta \Phi &= 4\pi g \left(\rho - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho dx \right) \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

から Faedo-Galerkin 法を用いて近似解 $u_{\delta, \varepsilon}(x, t)$ を構成し, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限操作のあと $\delta \rightarrow 0$ の極限操作を行い (1) の解を構成する. このとき, 条件 $\gamma > \frac{3}{2}$ は Faedo-Galerkin 近似における極限操作と, div-curl Lemma を用いた解の構成において必要になる.

参考文献

- [1] B. Ducomet, E. Feireisl, H. Petzeltová, and I. Straskrabá, *Global in time weak solutions for compressible barotropic self-gravitating fluids*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Vol **174** No. 1(2004) 113-130.
- [2] E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltová, On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids, J. math. fluid mech. 3 (2001) 358–392
- [3] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Science Publ., Oxford, 2004
- [4] T. Makino, On a local existence theorem for the evolution equation of gaseous stars, in; Patterns and Waves-Qualitative Analysis of Non-linear Differential Equations (edited by T. Nishida, M. Mimura, and H. Fujii), North-Holland/Kinokuniya, pp. 459-479,1986
- [5] T. Makino, S. Ukai, and S. Kawashima, Sur la solution á support compact de l'Equation d'Euler compressible, J.Appl. Math. 3 (1986) 249-257
- [6] S. Matsusu-Necasova, M. Okada, and T. Makino, Free boundary problem for the equation of spherically symmetric motion of viscous gas (II), Japan J. Indust. Appl. Math. 12 (1995) 195-203.
- [7] S. Matsusu-Necasova, M. Okada, and T. Makino, Free boundary problem for the equation of spherically symmetric motion of viscous gas (III), Japan J. Indust. Appl. Math. 14 (1997) 199-213.
- [8] M. Okada, and T. Makino, Free boundary problem for the equation of spherically symmetric motion of viscous gas, Japan J. Indust. Appl. Math. 10 (1993) 219-235.
- [9] P. L. Lions *Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 2, Compressible Models*, Oxford Science Publ., Oxford, 1998.

Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について

宮崎倫子 (静岡大学・工学部)

1 序文

次の n 次元の微分方程式

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x)$$

を考える. ここで, Ω を n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 内のある領域とし, f は領域 Ω から \mathbb{R}^n への C^1 級関数であると仮定する. また, (1.1) は周期が $\omega > 0$ の不安定な周期解 $x^*(t)$ を持つとする. この不安定な周期解 $x^*(t)$ を安定化する方法のひとつとして, 1992 年に Pyragas [9] によって提案された Delayed Feedback 制御 (以下, DF 制御) というものが知られている. それは, (1.1) に状態フィードバックを施した次の時間遅れを持つ n 次元の微分方程式

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) + u(t) \\ u(t) = K(x(t - \omega) - x(t)) \end{cases}$$

で与えられる. ここで, K は $n \times n$ 定数行列でフィードバックゲインと呼ばれている. 制御入力 $u(t)$ は, 時刻 t での状態と, 安定化したい周期解の周期分だけさかのぼった時刻 $t - \omega$ での状態の差で与えられるというのがこの方法の特長である.

$x^*(t)$ は (1.2) の周期解にもなっていることに注意しよう. そして, フィードバックゲイン K を適当に与えることにより, $x^*(t)$ が (1.2) の解として漸近安定となるときに (1.1) の不安定周期解 $x^*(t)$ が安定化できた, すなわち, DF 制御が成功したと解釈する.

Pyragas はこの方法をレスラー方程式に適用した数値シミュレーション結果を提示することによって提案した. 我々は, Pyragas が用いたパラメータ値を用いて独自に数値計算を行ってみた. その結果を紹介しよう. 方程式は, 次式で与えられる.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -y(t) - z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + 0.2y(t) + u(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = 0.2 + z(t)(x(t) - 5.7) \\ u(t) = k(y(t - \omega) - y(t)) \end{cases}$$

初期条件の与え方については、特に記述がなかったので、 $x(t) = y(t) = 0, z(t) = 4$ ($-\omega \leq t \leq 0$) と与えることとした。まず、制御項を加える前、すなわち、 $k = 0$ のときには、図1のようにシステムはカオス的な振る舞いを呈することに注意しよう。 $k = 0.2, \omega = 5.9$ としたDF制御を加えたときには、図2のように、周期的なアトラクタが得られる。また、この周期アトラクタの周期を数値的に求めると5.88867...である。 $k = 0.2, \omega = 11.75$ としたDF制御を加えたときには、図3のように、周期的なアトラクタが得られ、このときの周期アトラクタの周期を数値的に求めると11.7537...である。これは2倍周期解が安定化されたと考えられる。 $k = 0.2, \omega = 17.5$ としたDF制御を加えたときには、Pyragasの論文によると、3倍周期解が安定化されるはずであるが、残念ながらそれを再現することはできなかった(図4参照)。

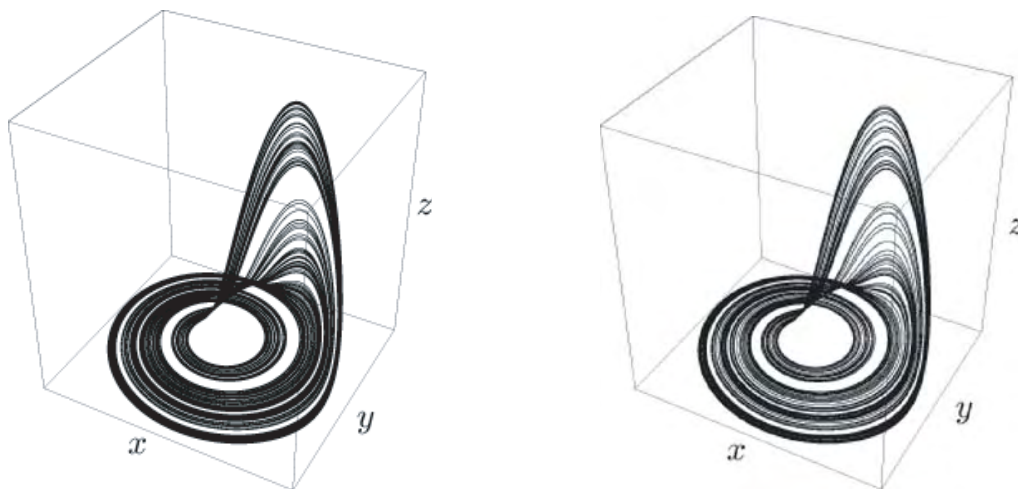


図 1: $k = 0$ のとき (制御前) . $0 \leq t \leq 1000$ (左) . $500 \leq t \leq 1000$ (右) .

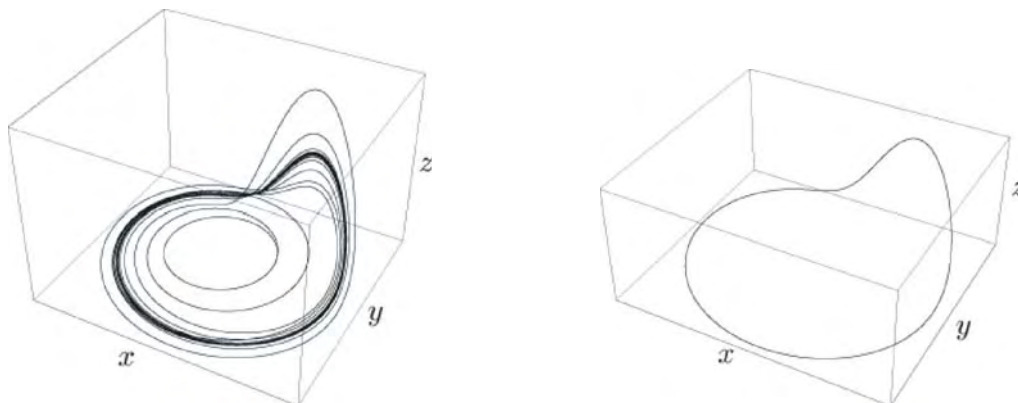


図 2: $k = 0, \omega = 5.9$ のとき . $0 \leq t \leq 1000$ (左) . $500 \leq t \leq 1000$ (右) .

DF 制御は、手法としては非常に単純であるため、応用分野においては数値シミュレーションにより適用されてきているが、解析的な研究はまだ追いついていないのが実状である (例えば、[10] の本文の第 1 段落から第 3 段落参照)。

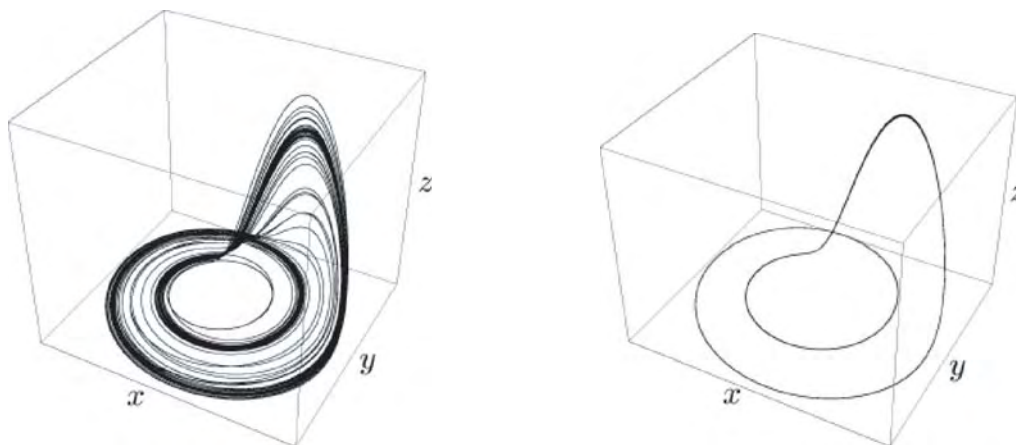


図 3: $k = 0$, $\omega = 11.75$ のとき . $0 \leq t \leq 1000$ (左) . $500 \leq t \leq 1000$ (右) .

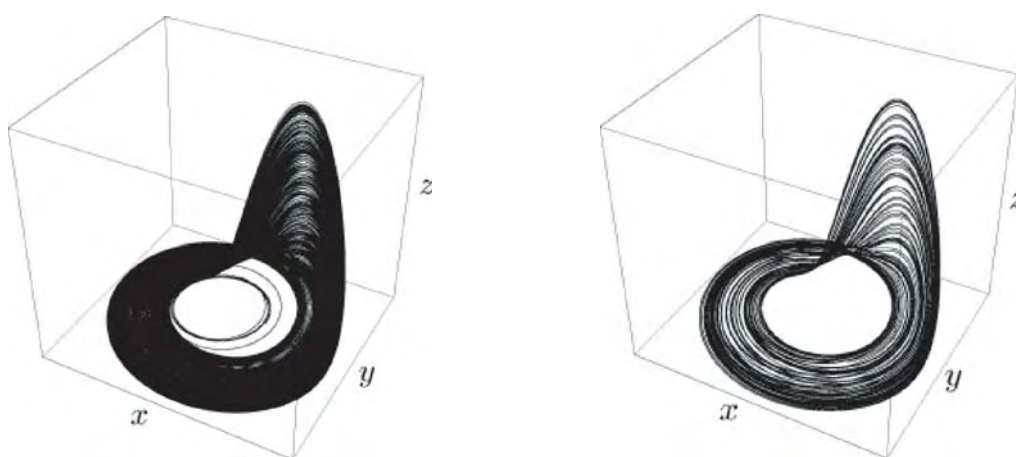


図 4: $k = 0$, $\omega = 17.5$ のとき . $0 \leq t \leq 2000$ (左) . $1500 \leq t \leq 2000$ (右) .

DF 制御の安定化問題を解析的に扱う観点として, 以下の事柄が考えられる .

- (i) DF 制御が成功するようなシステムの条件を求める .
- (ii) DF 制御によって得られた周期解の安定性のロバスト性の保証 .

(i) の解析については, 周期解のまわりでの線形変分方程式にフロッケの理論を適用し, 特性指数 (乗数) を解析することが主流となっている. 特に, 不安定周期解が正の特性指数を奇数個持つ場合には, DF 制御によって周期解を安定化することはできないということが知られている [5,6]. Nakajima はそのことを次の定理の形で与えている .

定理 A (Nakajima [6]). (1.1) の双曲型周期解 $x^*(t)$ について, (1.1) の線形変分方程式

$$(1.3) \quad \frac{dy}{dt} = Df(x^*(t))y$$

が 1 より大きな実数の特性乗数を奇数個持つ場合, 不安定な周期解は任意のフィードバックゲイン K に対して DF 制御 (1.2) によって安定化することができない. ここで, $Df(x)$ は $f(x)$ の x におけるヤコビアン行列を表すものとする.

この定理 A における「1 より大きな実数の特性乗数を奇数個持つ」という条件は *odd number condition* あるいはと呼ばれ, 多くの文献において引用されている. しかし, 我々は定理 A の主張は正しいが, 証明は完結していないのではないかと考えている. さらに, Nakajima は, この *odd number condition* を排除した場合に, DF 制御によって安定化可能となるための十分条件を与えている [7].

(ii) に関しても, 解析手法としては (i) と同様フロッケの理論を適用することが考えられる. ただし, 時間遅れが周期と一致しない場合には, その取り扱いが格段に難しくなる. 実際そのような場合を取り扱った論文は現時点ではほとんど存在しない. しかし, 先に示した Pyragas の数値シミュレーション結果の再現する際にも, $\omega = 5.9$ とした場合に得られた周期アトラクタの周期は $5.88867\dots$ であり, $\omega = 11.75$ とした場合には $11.7537\dots$ といったように, 実際の数値計算過程において, DF 制御項の時間遅れを安定化させたい周期解の周期にぴったりと一致させることは困難である. このことからわかるように, 特に ω の値のずれに対するロバスト性を保証することが重要な課題のひとつである.

本稿では, DF 制御による周期解の安定化問題を解析する際に必要となる, 時間遅れを持つ微分方程式の定性論, 特にフロッケの理論について既存の結果を中心として紹介する. そして, その際に浮き彫りとなる定性論が整備すべき未解決課題を提起したい.

2 基礎理論

2.1 時間遅れを持つ微分方程式

まず, 時間遅れを持つ微分方程式の定性論を扱うための基本的な事項について述べよう. 正の数 r に対して, 区間 $[-r, 0]$ から \mathbb{R}^n への連続関数からなる集合を C で表し, C におけるノルムを $\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -\omega \leq \theta \leq 0\}$ ($\phi \in C$) で与える. このとき, C はバナッハ空間になっている. $\sigma \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in C$, $t \in [\sigma, \sigma + a]$ に対して $x_t \in C$ を

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0$$

で与え、これを関数 x の t -切片という。 $D \subset \mathbf{R} \times C$ を定義域とする $F(t, \phi): D \rightarrow \mathbf{R}^n$ を与えられた関数、 $x'(t)$ を $x(t)$ の右側微分としたとき、関係式

$$(2.1) \quad x'(t) = F(t, x_t)$$

を D で定義された関数微分方程式という。これが、時間遅れを持つ微分方程式の一般的な表記である。

関数 $x(t)$ が $[\sigma - r, \sigma + a]$ 上で定義された (2.1) の解であるとは、 $x \in C([\sigma - r, \sigma + a], \mathbf{R}^n)$ であり、任意の $t \in [\sigma, \sigma + a]$ に対して $(t, x_t) \in D$ でしかも (2.1) が成り立つときにいう。与えられた $(\sigma, \phi) \in D$ に対して、この解 $x(t)$ が $x_\sigma = \phi$ を満たすとき、 $x(t)$ は (σ, ϕ) を通る (2.1) の解であるという。このような解を求めることを、初期条件 (σ, ϕ) に関する (2.1) の初期値問題という。常微分方程式と同様に、解の存在や一意性、初期値に関する連続性といった基礎定理はすでに確立されている ([3, Chapter 2] あるいは [11, 第4章] 参照)。また、

$$x'(t) = Ax(t - r), \quad A \text{ は } n \times n \text{ 定数行列}$$

といったような自励系線形関数微分方程式についても、解空間は無次元となるものの、常微分方程式と同様、特性方程式が与えられ、基本解が特性方程式の解を用いた指数関数と多項式の積で与えられることも知られている ([3, Chapter 7] あるいは [11, 第5章] 参照)。

2.2 周期系線形微分方程式とフロッケの理論

時間遅れを持つ場合のフロッケの理論について述べる前に、時間遅れがない場合について簡単に復習をしておこう。周期係数を持つ n 次元線形微分方程式

$$(2.2) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x$$

を考えよう。ここで、 $A(t)$ は $n \times n$ の連続な行列値関数で、ある正の数 ω が存在し全ての t に対して $A(t + \omega) = A(t)$ が成り立つものとする。

(2.2) の基本解行列のひとつを $\Phi(t)$ とするとき、 $\Phi(t + \omega)$ も (2.2) の基本解行列となるので、正則な $n \times n$ 定数行列 M が存在し、

$$(2.3) \quad \Phi(t + \omega) = \Phi(t)M$$

が成り立つ。行列 M は $M = \Phi(\omega)$ で与えられモノドロミー作用素となっている。 M の固有値 λ を (2.2) の特性乗数、 $\lambda = e^{\mu\omega}$ を満たす μ を特性指数という。このとき、フロッケの理論として次のような定理にまとめることができる。

定理 B (フロッケの理論). $M = e^{B\omega}$ を満たす正則な $n \times n$ 定数行列 B と, $P(t + \omega) = P(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) を満たす $n \times n$ 行列値関数 $P(t)$ が存在し,

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

で与えられる. したがって, 特に, $\lambda = e^{\mu\omega}$ が特性乗数となるための必要十分条件は, 次の形で与えられる (2.2) の非自明解が存在することである.

$$(2.4) \quad x(t) = e^{\mu t} p(t), \quad p(t + \omega) = p(t).$$

本稿では, 特性乗数 $\lambda = e^{\mu\omega}$ に対して (2.4) の形の解のことをフロッケタイプの解と呼ぶことにする.

2.3 時間遅れを持つ周期系線形関数微分方程式

次に, 時間遅れを持つ周期系線形微分方程式に対するフロッケの理論を紹介しよう. なお, ここで紹介する理論は Hale & Lunel [3] の Chapter 8 からの抜粋である. 周期系線形関数微分方程式

$$(2.5) \quad x'(t) = L(t)x_t.$$

を考えよう. ここで, $t \in \mathbb{R}$ であり $L(t)$ は C から \mathbb{R}^n への有界線形作用素で, t について連続で, ある正の数 ω が存在し全ての t に対して $L(t + \omega) = L(t)$ が成り立つ.

任意の初期条件 $s \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ に対して, (2.5) の $[s, \infty)$ で定義された解 $x = x(s, \phi)$ が存在し, この t -切片 $x_t(s, \phi) \in C$ は t, s および ϕ について連続である. 任意の $t \geq s$ および $\phi \in C$ に対して, C 上の解作用素 $T(t, s)$ を $T(t, s)\phi = x_t(s, \phi)$ で定義する. これは線形作用素で, 全ての $t \geq s \geq \tau$ に対して $T(t, s)T(s, \tau) = T(t, \tau)$ を満たす. また, $L(t)$ の周期性より全ての $t \geq s$ に対して $T(t + \omega, s) = T(t, s)T(s + \omega, s)$ が成り立つ. モノドロミー作用素 $U: C \rightarrow C$ は次式で定義される.

$$U\phi = T(\omega, 0)\phi.$$

U は完全連続作用素となるので, U のスペクトル $\sigma(U)$ は高々可算個で, 複素平面内において零のみを集積点に持つコンパクトな集合である. また, $\sigma(U) \setminus \{0\}$ は U の点スペクトル $P\sigma(U)$ になっている. すなわち, $\lambda \in P\sigma(U)$ に対して $\phi \neq 0$ なる C の要素が存在して $U\phi = \lambda\phi$ が成り立つ. 任意の $\lambda \in P\sigma(U)$ のことを (2.5) の特性乗数, $\lambda = e^{\mu\omega}$ を満たす μ のことを (2.5) の特性指数という. 完全連続作用素の性質から, (2.5) の任意の特性乗数 λ に対して, C の 2 つの閉部分空間 E_λ と Q_λ が存在して次の性質を満たす:

- (i) E_λ は有限次元;

- (ii) $E_\lambda \oplus Q_\lambda = C$;
- (iii) $UE_\lambda \subseteq E_\lambda, UQ_\lambda \subseteq Q_\lambda$;
- (iv) $\sigma(U|E_\lambda) = \{\lambda\}, \sigma(U|Q_\lambda) = \sigma(U) \setminus \{\lambda\}$.

これらの性質は，時間遅れがない場合について言い換えると，行列 M の固有値としての特性乗数 λ の一般化固有空間を E_λ ，その補空間を Q_λ とおき，これらを用いて \mathbf{R}^n を直和分解したことに他ならない．時間遅れがない場合には， E_λ の次元は λ の M の固有値としての代数的重複度に一致することはよく知られている．これに対応させて，時間遅れがある場合にも， E_λ の次元を特性乗数 λ の重複度と定義する．なお，時間遅れがある場合には， Q_λ は無限次元であることに注意しよう．

この有限次元空間 E_λ に制限すれば，時間遅れがない場合のフロッケの理論がそのまま成り立つことが知られている．

定理 C ([3, Lemma 8.1.2]). λ が (2.5) の特性乗数で， E_λ の d_λ 次元の基底を列として並べた $n \times d_\lambda$ 行列値関数を Ψ とする．このとき， $\sigma(e^{B\omega}) = \{\lambda\}$ となるような $d_\lambda \times d_\lambda$ 行列 B と，各列が C の要素からなるような $P(t+\omega) = P(t), t \in (-\infty, \infty)$ を満たす $n \times d_\lambda$ 行列値関数 $P(t)$ が存在し， $\phi = \Psi b$ ($b \in \mathbf{R}^{d_\lambda}$) のとき， $x_t(0, \phi)$ は $t \in (-\infty, \infty)$ で定義され，

$$x_t(0, \phi) = P(t)e^{Bt}b, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

したがって，特に， $\lambda = e^{\mu\omega}$ が (2.5) の特性乗数となるための必要十分条件は，次の形で与えられる (2.5) の非自明解が存在することである．

$$(2.6) \quad x(t) = e^{\mu t}p(t), \quad p(t+\omega) = p(t).$$

時間遅れがある場合においても，特性乗数 $\lambda = e^{\mu\omega}$ に対して，(2.6) の形の解のことを本稿ではフロッケタイプの解と呼ぶことにする．

時間遅れがある場合の特性乗数の求め方については，その一般的な方法は現段階では示されていない．次のような，時間遅れが $L(t)$ の周期 ω の整数倍となるような方程式については，Hale & Lunel の結果が知られているので紹介しておこう．

$$(2.7) \quad x'(t) = \sum_{j=0}^m B_j(t)x(t-j\omega).$$

ここで， B_j は連続な関数値行列であり $B_j(t+\omega) = B_j(t)$ を満たすものとする． $\Omega_s^t(z)$ を複素パラメータ z を持つ周期係数の常微分方程式

$$(2.8) \quad y'(t) = \sum_{j=0}^m z^j B_j(t)y(t)$$

の $\Omega_s^t(z) = I$ を満たす基本解行列とする． $U: C([-m\omega, 0], \mathbf{R}^n) \rightarrow C([-m\omega, 0], \mathbf{R}^n)$ を (2.7) のモノドロミー作用素とすると， U は次式で与えられる． $-\omega \leq \theta \leq 0$ に対

しては

$$(U\phi)(\theta) = \Omega_{-\omega}^{\theta}(0)\phi(0) + \sum_{j=1}^m \int_{-\omega}^{\theta} \Omega_{\tau}^{\theta}(0)B_j(\tau)\phi(\tau - (j-1)\omega)d\tau,$$

であり, $-m\omega \leq \theta \leq -\omega$ に対しては $(U\phi)(\theta) = \phi(\theta + \omega)$. そして, U のスペクトル, すなわち, 特性乗数は次の定理によって与えられる.

定理 D ([3, Theorem 8.3.1]). B_m のゼロ点が全て孤立しているとき, (??) で与えられた作用素 $U: C([-m\omega, 0], \mathbf{R}^n) \rightarrow C([-m\omega, 0], \mathbf{R}^n)$ のスペクトルは

$$(2.9) \quad \sigma(U) = \{\lambda: \det \Delta(\lambda) = 0\}$$

によって与えられる. ここで, $\Delta(z) = zI - \Omega_0^{\omega}(z^{-1})$ とする. また, $\lambda \in \sigma(U)$ に対して, λ の重複度は $\det \Delta$ の零点としての λ の位数に等しい.

例 1. スカラー方程式

$$(2.10) \quad x'(t) = a(t)x(t - \omega)$$

を考えよう. ここで, $a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は連続で $a(t+\omega) = a(t)$ を満たすものとする. (2.10) に対して, (2.8) に対応する方程式は

$$y'(t) = za(t)y$$

となり, これを解くことにより,

$$\Omega_s^t(z) = \exp\left(z \int_s^t a(\xi)d\xi\right)$$

で与えられる. したがって, 特性乗数 λ は

$$\lambda - \exp\left(\lambda^{-1} \int_0^{\omega} a(\xi)d\xi\right) = 0$$

の解として与えられる. 特性指数 μ については, $\lambda = e^{\mu\omega}$ を代入し対数の主値のみをとると,

$$\mu\omega - e^{-\mu\omega} \int_0^{\omega} a(\xi)d\xi = 0$$

となる. この方程式は, 定数係数のスカラー線形差分微分方程式の特性方程式

$$x'(t) = \left(\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} a(\xi)d\xi\right)x(t - \omega)$$

と一致していて, 全ての根の実部が負となるための必要十分条件は, すでによく知られている (例えば, [11, 定理 2.1] を参照せよ). その結果を適用すると, (2.10) の特性指数の実部が全て負となるための必要十分条件は,

$$-\frac{\pi}{2} < \int_0^{\omega} a(\xi)d\xi < 0$$

であることがわかる. そして, このとき, (2.10) の解は $t \rightarrow \infty$ で指数的に零へと収束する.

例 2. 連立の微分方程式を考えよう.

$$(2.11) \quad \begin{cases} x'(t) = -kx(t) + a(t)y(t - m\omega) \\ y'(t) = -ky(t) + a(t)y(t - m\omega). \end{cases}$$

ここで, $a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は連続で $a(t + \omega) = a(t)$ を満たすものとし, k は正の定数, m は正の整数とする. (2.11) に対して, (2.8) に対応する方程式は

$$\begin{cases} x'(t) = -kx(t) + z^m a(t)y(t) \\ y'(t) = -ky(t) + z^m a(t)y(t). \end{cases}$$

となり, 一般解を求めると c_1, c_2 を任意定数として,

$$x(t) = c_1 \exp\left(-kt + z^m \int_0^t a(\xi) d\xi\right) + c_2 e^{-kt}, \quad y(t) = c_1 \exp\left(-kt + z^m \int_0^t a(\xi) d\xi\right)$$

で与えられる. ゆえに, 基本解行列 $\Omega_s^t(z)$ は

$$\Omega_s^t(z) = \begin{pmatrix} e^{-k(t-s)} \exp\left(-k(t-s) + z^m \int_s^t a(\xi) d\xi\right) - e^{-k(t-s)} & \\ 0 & \exp\left(-k(t-s) + z^m \int_s^t a(\xi) d\xi\right) \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\Delta(z) = zI - \begin{pmatrix} e^{-k\omega} \exp\left(-k\omega + z^{-m} \int_0^\omega a(\xi) d\xi\right) - e^{-k(t-s)} & \\ 0 & \exp\left(-k\omega + z^{-m} \int_0^\omega a(\xi) d\xi\right) \end{pmatrix}$$

となり, 特性乗数は

$$(\lambda - e^{-k\omega}) \left\{ \lambda - \exp\left(-k\omega + \lambda^{-m} \int_0^\omega a(\xi) d\xi\right) \right\} = 0$$

の解として与えられる. 特性指数 μ については, $\lambda = e^{\mu\omega}$ を代入し対数の主値のみをとると,

$$\mu = -k, \quad \text{または} \quad \mu\omega + k\omega - e^{-m\mu\omega} \int_0^\omega a(\xi) d\xi = 0$$

となる. 後者の方程式は, 定数係数のスカラー線形差分微分方程式の特性方程式

$$x'(t) = -kx(t) + \left(\frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(\xi) d\xi\right) x(t - m\omega)$$

と一致していて, 全ての根の実部が負となるための必要十分条件は, すでによく知られている (例えば, [11, 付録 A] を参照せよ). これを適用すると, $r = m\omega$, $b = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(\xi) d\xi$ として, 図 5 のグレーに塗りつぶした領域の内部に (k, b) が存在するときに, (2.11) の特性指数の実部は全て負となり, したがって $t \rightarrow \infty$ のとき解は指数的に $(0, 0)$ へと収束する.

注意 1. スカラー方程式であれば, (2.8) の基本解を容易に求めることができるが, 2次元以上であれば例 2 のようにうまく求めることができる場合は非常に稀である.

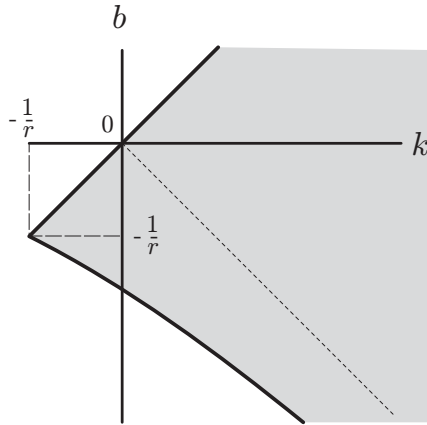


図 5: (2.11) の特性指数が全て負の実部を持つための必要十分条件 . ただし , $r = m\omega$, $b = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega a(\xi) d\xi$ とおいている .

2.4 周期解の軌道安定性

次に自励系関数微分方程式

$$(2.12) \quad x'(t) = F(x_t)$$

を考えよう . ここで , D を C 内のある領域とし , $F: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ は連続な 1 階および 2 階のフレッシュ微分を持つものとする . (2.12) が周期 ω の非自明な周期解を持つと仮定する . ここでは , (2.12) の周期解 $x^*(t)$ の軌道漸近安定性の定義を与え , 特性乗数を用いた安定性の判別指標を Stokes [8] の結果などを引用しながら説明する . なお , (2.12) は自励系なので , 以下では , 初期時刻を 0 に設定する . また , 初期関数 $\phi \in C$ を持つ (2.12) の解を単に (初期時刻 0 は省略して) $x(\phi)$ と表記する .

定義 1. x^* が軌道安定であるとは , 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し , $\text{dist}(\phi, x_0^*) < \delta(\varepsilon)$ のとき全ての $t \geq 0$ に対して $\text{dist}(x_t(\phi), x_0^*) < \varepsilon$ が成り立つときにいう . x^* が軌道漸近安定であるとは , 軌道安定であり , かつ , ある $\delta > 0$ が存在し , $\text{dist}(\phi, x_0^*) < \delta$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x_t(\phi), x_0^*) = 0$ が成り立つときにいう . ここで , $\phi, \psi \in C$ に対して $\text{dist}(\phi, \psi) = \min\{\|\phi - \psi\|\}$ とする .

軌道漸近安定に対する付加的な概念も与えよう .

定義 2 ([1,8] 参照). x^* が漸近的位相特性を持つとは , ある $\delta > 0$ が存在し $\text{dist}(\phi, x_0^*) < \delta$ を満たす ϕ に対して $c = c(\phi) \in \mathbf{R}$ が存在し , $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t(\phi) - x_{t+c}^*\| = 0$ となるときにいう .

方程式 (2.12) の周期解 $x^*(t)$ の軌道漸近安定性を調べるために , $x^*(t)$ まわりでの線形変分方程式

$$(2.13) \quad \frac{dy(t)}{dt} = L(t)y_t$$

を考える. ここで, $L(t) := DF(x_t^*)$ は F の $x_t^* \in C$ におけるフレッシュェ微分であり, これは C から \mathbb{R}^n への線形作用素となる. F の条件と $x^*(t)$ が連続な周期関数であることより, $L(t)$ は任意の t に対して有界作用素であり, また, t について連続でもある. さらに, $L(t + \omega) = L(t)$ も成り立っていて, (2.13) は周期系線形関数微分方程式である.

明らかに (2.13) は $y^*(t) = F(x_t^*)$ なる周期解を持っている. したがって, 定理 C より特性乗数に $\lambda^* = 1$ を持つ. 1 が重複度 1 の特性乗数のとき, $x^*(t)$ は (2.12) の非退化周期解という. さらに, 1 (重複度は 1) 以外の特性乗数の大きさが 1 に等しくないとき, $x^*(t)$ は双曲型周期解という.

時間遅れがない場合と同様に $x^*(t)$ の安定性は特性乗数の大きさによって判定可能であることが知られている. まず, 参考のため時間遅れがない微分方程式 (1.1) の周期解 $x^*(t)$ の安定性を判別する定理のうち代表的なものを紹介しよう.

定理 E (Andronov-Witt の定理. [1, Th. 5.1.2] あるいは [12, 定理 25] 参照). $x^*(t)$ が (1.1) の非退化周期解とする. このとき, (1.3) の 1 を除く全ての特性乗数の絶対値が 1 より小さいならば, $x^*(t)$ は軌道漸近安定でしかも漸近的位相特性を持つ.

定理 F ([4, Theorem 11.2] 参照). (1.3) の特性乗数のうち絶対値が 1 より大きなものが少なくともひとつ存在すれば, $x^*(t)$ は軌道不安定である.

時間遅れを含む場合については, 定理 E と同様の定理が Stokes によって示されている.

定理 G (Stokes [8]). $x^*(t)$ が (2.12) の非退化周期解とする. このとき, (2.13) の 1 を除く全ての特性乗数の絶対値が 1 より小さいならば, $x^*(t)$ は軌道漸近安定でしかも漸近的位相特性を持つ.

しかし, 定理 F と同様の定理は我々の知る限り存在しないようである. 周期解が双曲型であることを仮定すれば Hale & Lunel による安定集合及び不安定集合の存在とその次元に言及した結果 [3] の Theorem 10.3.2 が有効である. 双曲性や非退化性の仮定は, 非線形問題を取り扱う際には通常よく仮定されるが, しかし, これらの仮定が満たされるかどうかを実際の問題において調べることは意外に困難である. なぜなら, 時間遅れを持つ微分方程式の特性乗数を計算するための一般的な方法は得られないからである. したがって, 少なくとも不安定性定理については, これらの仮定を課さない定理 F と同様のものがあると非常に便利である.

3 DF 制御による安定化問題の解析と課題

DF 制御を施した (1.2) の周期解 $x^*(t)$ の周りでの線形変分方程式は,

$$(3.1) \quad y'(t) = A(t)y(t) + K(y(t - \omega) - y(t))$$

となる. ここで, $A(t) = Df(x^*(t))$ とおいた. この方程式は先にも述べたように, $y^*(t) = f(x^*(t))$ なる周期解を持っている. したがって, 特性乗数に 1 を持つことがわかる. 残りの特性乗数の大きさを調べる必要があるが, まずは, 定理 D を適用することを考えてみよう. (2.8) に対応する方程式は

$$y'(t) = (A(t) - K)y(t) + zKy(t)$$

であるが, $A(t)$ や K が具体的に与えられたとしても, 基本解行列を求めることは不可能な場合がほとんどである. 複素パラメータ z を固定してやれば, モノドロミー行列 Ω_0^ω を数値的に計算することは可能であるが, ある限られた z について求めたところで, 使い物にならない. ただし, 2 次元であれば, ひとつの解 $y^*(t)$ が既知なので場合によったらこれと一時独立な解を初等的な手法で求めることができるかもしれない. いずれにせよ, かなり特殊な状況下でなければ, 定理 D は使い物にならないようである.

そこで, 我々は定理 D に頼らずに特性乗数 (指数) を求めることを試みた. 実際, フィードバックゲインが $K = kI$ の非常に限定された場合ではあるが, 特性乗数を求める計算式を導くことができた.

命題 1. $K = kI (k \in \mathbf{R})$ を仮定する. (1.3) の特性指数 μ_j に対して,

$$(3.2) \quad \mu + k - ke^{-\mu\omega} = \mu_j$$

を満たす μ は (3.1) の特性指数である. 逆に, (3.1) の特性指数 μ に対して, (1.3) の特性指数 μ_j が存在して, (3.2) を満たす.

証明. $\Phi(t)$ を (1.3) の基本解行列とする. このとき, モノドロミー作用素を M とおくと, (2.3) が成り立っている. (3.1) の解 $y(t)$ を

$$y(t) = \Phi(t)z(t)$$

と $z(t)$ へと変換すると,

$$z'(t) = \Phi^{-1}(t)K\Phi(t) (M^{-1}z(t - \omega) - z(t))$$

を得る. $K = kI$ を仮定しているので,

$$(3.3) \quad z'(t) = k (M^{-1}z(t - \omega) - z(t))$$

となる. ここで, M の相異なる固有値, すなわち, (1.3) の特性乗数を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ とし, λ_j に対応する特性指数を μ_j とおく. すなわち, $\lambda_j = e^{\mu_j\omega}$ を満たす. また, λ_j に属する M の固有ベクトルを v_j とおくことにする. このとき,

$$\xi + k = ke^{-(\xi + \mu_j)\omega}$$

を満たすの任意 ξ に対して, $z(t) = e^{t\xi}v_j$ とおくと,

$$\begin{aligned} k(M^{-1}z(t-\omega) - z(t)) &= k(e^{(t-\omega)\xi}M^{-1}v_j - e^{t\xi}v_j) = ke^{t\xi}(e^{-\omega\xi}\lambda_j^{-1}v_j - v_j) \\ &= ke^{t\xi}(e^{-\omega(\xi+\mu_j)} - 1)v_j = e^{t\xi}\xi v_j = z'(t) \end{aligned}$$

となり, $z(t)$ が (3.3) の解であることがわかる. したがって, $y(t) = e^{t\xi}\Phi(t)v_j$ は (3.1) の解である. 一方, $p(t) = e^{-\mu_j t}\Phi(t)v_j$ とおくと, (2.3) より

$$\begin{aligned} p(t+\omega) &= e^{-\mu_j(t+\omega)}\Phi(t+\omega)v_j = e^{-\mu_j t}e^{-\mu_j\omega}\Phi(t)Mv_j \\ &= e^{-\mu_j t}\lambda_j^{-1}\Phi(t)\lambda_j v_j = p(t) \end{aligned}$$

となることに注意すると, $y(t) = e^{t(\xi+\mu_j)}p(t)$ は (3.1) のフロクケタイプの解である. したがって, 定理 C より $\xi + \mu_j$ は (3.1) のフロクケ指数である. すなわち, (3.2) を満たす μ は (3.1) のフロクケ指数である.

逆に, μ が (3.1) のフロクケ指数であると仮定しよう. 定理 C より, (3.1) は $y(t) = e^{\mu t}p(t)$ なるフロクケタイプの解を持つ. ただし, $p(t)$ は $p(t+\omega) = p(t)$ を満たす周期関数である. $y(t)$ は (3.1) を満たすことより,

$$\mu e^{\mu t}p(t) + e^{\mu t}p'(t) = A(t)e^{\mu t}p(t) + k(e^{\mu(t-\omega)}p(t-\omega) - e^{\mu t}p(t))$$

が成り立ち, $p(t-\omega) = p(t)$ であることに注意すると,

$$\frac{d}{dt} [\exp\{(\mu + k - ke^{-\mu\omega})t\}p(t)] = A(t) [\exp\{(\mu + k - ke^{-\mu\omega})t\}p(t)]$$

が得られる. すなわち, $\exp\{(\mu + k - ke^{-\mu\omega})t\}p(t)$ は (1.3) のフロクケタイプの解である. したがって, 定理 B より, $\mu + k - ke^{-\mu\omega}$ は (1.3) の特性指数になっている. \square

$\mu_j > 0$ のときには, (3.2) の解で実部が正となるものが存在する. 時間遅れを持つ微分方程式に対しても定理 F と同様の定理が成り立てば, $K = kI$ なるフィードバックゲインでは DF 制御が成功しないことがわかる. しかし, 2.4 節で述べたとおり, 現時点ではそのような定理は証明されていないようである.

$x^*(t)$ が (1.2) の双曲型周期解であることが示されれば, Hale & Lunel [3] の定理 10.3.2 が適用できる. しかし, 双曲性を証明するためには (1.3) の特性指数 μ_j が必要となるが, これを求めること自体不可能である.

非退化性については, ある程度可能である. 命題 1 と同じ設定, つまり, $K = kI$ を仮定した場合には, (1.2) の周期解 $x^*(t)$ が非退化となるための条件が証明できる. その証明には, 特性乗数の重複度が μ についての方程式 (3.2) の根の重複度に等しいことが証明されていればそれを調べれば良いが, それは現時点では示されていない. したがって, ここでは, 特性乗数の重複度の定義に立ち返った証明を紹介しよう.

命題 2. $K = kI (k \in \mathbf{R})$ で $k \neq -\frac{1}{\omega}$ を仮定する. このとき, (1.1) の周期解 $x^*(t)$ が非退化であれば, (1.2) の周期解 $x^*(t)$ も非退化となる.

証明. 重複度 d が $d \geq 2$ であると仮定する. 定理 C における行列 B は $d \times d$ 行列であり, $\sigma(e^{\omega B}) = \{1\}$ に注意すると, 行列 $B^{t\omega}$ は

$$(3.4) \quad e^{tB} = I + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + \cdots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}B^{d-1}$$

とかける. また, $\mathcal{N}(B^j) = \{b \in \mathbf{R}^d : B^j b = 0\}$ とすると,

$$\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(B^2) \subset \cdots \subset \mathcal{N}(B^d), \quad \mathcal{N}(B^{j+1}) \setminus \mathcal{N}(B^j) \neq \emptyset, \quad \mathcal{N}(B^d) = \mathbf{R}^d$$

であることに注意しよう. 定理 C より, $b \in \mathbf{R}^d$ に対して $x(t) = P(t)e^{Bt}b$ は (3.1) の解である ($P(t)$ の各列は C の要素で与えられているので, 正確には $x_t = P(t)e^{Bt}b$ であり, $x(t) = P(t)(0)e^{Bt}b$ と書くべきであるが, 記述が煩雑となることを避けるため (0) を省略している). (3.1) の解作用素 $T(t, s)$ に対して, $x_t = T(t, 0)\phi = T(t, 0)\Psi b$ が成り立つので, $P(t) = T(t, 0)\Psi e^{-Bt}$ であることが分る. したがって, $D(f(x^*(t))) = A(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} P'(t) &= \left\{ \frac{d}{dt} T(t, 0)\Psi \right\} \Psi e^{-Bt} - T(t, 0)\Psi e^{-Bt} B \\ &= [A(t)T(t, 0) + K \{T(t - \omega, 0) - T(t, 0)\}] \Psi e^{-Bt} - P(t)B \\ &= A(t)P(t) + K \{P(t - \omega)e^{-\omega B} - P(t)\} - P(t)B \end{aligned}$$

(3.5)

(3.4) および $P(t - \omega) = P(t)$ より,

$$(3.6) \quad \begin{aligned} P'(t) &= A(t)P(t) - P(t)B \\ &+ KP(t) \left\{ \frac{-\omega}{1!}B + \frac{(-\omega)^2}{2!}B^2 + \cdots + \frac{(-\omega)^{d-1}}{(d-1)!}B^{d-1} \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ. $b \in \mathcal{N}(B)$ ($b \neq 0$) とすると, $B^j b = 0$ ($j = 1, \dots, d$) であるから, (3.4) および (3.6) より,

$$x(t) = P(t)e^{Bt}b = P(t)b, \quad x'(t) = P'(t)b = A(t)P(t)b = A(t)x(t)$$

となる. これは, $P(t)b$ が (3.1) の解であると同時に (1.3) の解であることを示している. (1.1) の周期解 $x^*(t)$ の非退化性より, (1.3) の周期 ω の非自明な周期解は $y^*(t)$ のスカラー倍のみである. したがって, ある適当なスカラー $\alpha \neq 0$ に対して, $P(t)b = \alpha y^*(t)$ とおける.

$b \in \mathcal{N}(B^2) \setminus \mathcal{N}(B)$ とする. まず, $Bb \in \mathcal{N}(B)$ かつ $Bb \neq 0$ であるから, ある適当なスカラー $\alpha \neq 0$ に対して, $P(t)Bb = \alpha y^*(t)$ とおけるので, $B^j b = 0$ ($j = 2, \dots, d$) に注意すると (3.6) より,

$$(3.7) \quad P'(t)b = A(t)P(t)b - \alpha(\omega K + I)y^*(t)$$

が成り立つ. ここで, (1.3) の基本解行列 $\Phi(t)$ として, 第 1 列が $y^*(t) = f(x^*(t))$ となるように選んでくる. このとき,

$$(3.8) \quad I = \Phi(s)^{-1}\Phi(s) = (\Phi(s)^{-1}y^*(s) \quad * \quad)$$

が成り立つことに注意しよう．さらに，(2.3) より

$$(y^*(t) \quad *) = (y^*(t) \quad *) M$$

がであることから，行列 M については，

$$(3.9) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

という形になっていることに注意しよう．(3.7) に定数変化法の公式を適用すると，

$$P(t)b = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1}(\omega K + I)y^*(s)ds.$$

$K = kI$ と (3.8) より，

$$\begin{aligned} P(t)b &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1}y^*(s)ds \\ &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)ty^*(t) \end{aligned}$$

を得る．この式と (2.3) より，

$$\begin{aligned} P(t + \omega) &= \Phi(t + \omega)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)(t + \omega)y^*(t + \omega) \\ &= \Phi(t)M\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)(t + \omega)y^*(t) \end{aligned}$$

となる． $P(t + \omega)b = P(t)b$ であることより，

$$\Phi(t)M\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)(t + \omega)y^*(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}P(0)b - \alpha(1 + \omega k)ty^*(t)$$

が成り立ち，この式を整理すると

$$(3.10) \quad \Phi(t)(M - I)\Phi(0)^{-1}P(0)b = \alpha\omega(1 + \omega k)y^*(t)$$

を得る．一方， $x^*(t)$ が (1.3) の非退化周期解であることから， $\Phi(t)$ の第 2 列以降の列に並べられた基本解は周期 ω の周期関数となっていない．さらに，(3.9) より， $M - I$ の第 1 列目の成分は全て零であることに着目すると，(3.10) の左辺が周期 ω の周期関数となるはずはない．つまり，(3.10) は矛盾した式になっている．ゆえに $d = 1$ ，すなわち， $x^*(t)$ は (1.2) の非退化周期解である． \square

以上の二つの命題から，フィードバックゲインを $K = kI$ とした場合の DF 制御の適用可能性については，時間遅れを持つ微分方程式に対する定理 F の証明が完了すれば，あとは (3.2) の根の解析をするだけである．

一般のフィードバックゲインに対しては，ふたつの命題と同様の計算はもはや不可能となり，特性乗数 (指数) の計算のために，全く違った手法を考えなければならない．それは，具体例に対して計算が実行できるような定理 D に変わるものを導く必要がある．

また， DF 制御の時間遅れが周期解の周期と一致しない場合にも，特性乗数 (指数) を計算あるいは評価するための何らかの手法の開発が必要である．

参考文献

- [1] Farkas, M., *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] Hale, J. K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [3] Hale, J. K. and Verduyn Lunel, S. V., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [4] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [5] Just, W. *et. al.*, Mechanism of time-delayed feedback control, *Phys. Rev. Lett.*, (1997), **78**, 203–206.
- [6] Nakajima, H., On analytical properties of delayed feedback control of chaos, *Phys. Lett. A*, (1997), 232, 207–210.
- [7] Nakajima, H., Some sufficient conditions for stabilizing periodic orbits without the odd-number property by delayed feedback control in continuous-time systems, *Phys. Lett. A*, (2004), **327**, 44–54.
- [8] Stokes, A. P., On the stability of a limit cycle of an autonomous functional differential equation, *Cont. Diff. Eq.*, (1964), 3, 121–139.
- [9] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*, (1992), 170, 421–428.
- [10] Pyragas, K. *et. al.*, Delayed feedback control of dynamical systems at a subcritical Hopf bifurcation, *Phys. Rev. E*, (2004), **70**, 056222.
- [11] 内藤敏機ほか, 『タイムラグを持つ微分方程式』, 牧野書店, 2002.
- [12] Л. С. Понтрягин著, 千葉克裕訳, 『常微分方程式 新版』, 共立出版, 1968.

バネの方程式と自由境界問題

岐阜大学教育学部 愛木豊彦 (aiki@cc.gifu-u.ac.jp)

1 バネの運動方程式

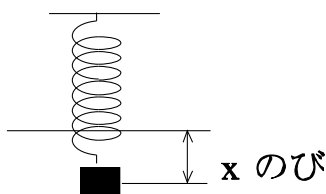


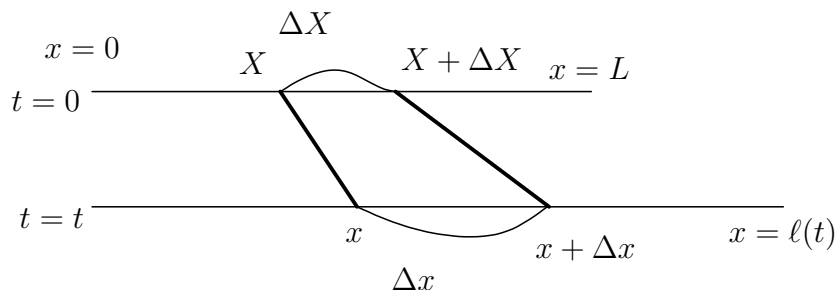
図 1

物理学や微分方程式の教科書には，図 1 のようなバネの運動が次の方程式で記述されている。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa x.$$

ここで， $x = x(t)$ は時刻 t でのバネののび， m はおもりの質量， κ はフックの法則の定数である。ここでは，バネの変位が空間的に一様であることを前提としている。あるいは，内部での局所的な空間変化を考慮に入れていない。

本稿の目的は，バネが伸びる，つまりバネの形状の変化を考慮した場合の，運動方程式の導出，および，それに関連する問題の可解性を議論することである。



まず，歪み ε を定義する。時刻 $t = 0$ で長さ L で区間 $(0, L)$ に位置するバネを考える。 $t = 0$ で X にあった点の時刻 t での位置を x で表す。つまり， $x = x(t, X)$ ， $X = X(t, x)$ とすると， $x(t, X') = X^{-1}(t, X')$ ， $X(t, x') = x^{-1}(t, x')$ である。ここで，時刻 t ，位置 x における変位を $u(t, x) = x - X(t, x)$ と定義する。このとき，歪み ε は次のように定義される。自然長 ℓ_0 であったものが長さ ℓ になったとき， $\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$ の $\ell_0 \downarrow 0$ としたときの極限值 ε を歪みと呼ぶ。従って， (t, x) における歪みは次のように計算できる。 $\ell_0 = \Delta x$ とおくと， $\ell = x(t, X + \Delta X) - x(t, X) =: \Delta x$ なので，

$$\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{x(t, X + \Delta X) - x(t, X) - \Delta X}{\Delta X} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta X}.$$

ここで， $\Delta X \downarrow 0$ とすると， $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X}$ 。一方， $u = x - X$ より， $\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X} - 1$ な

ので, $\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{1 - u_x}$. ゆえに,

$$\varepsilon = \frac{u_x}{1 - u_x}.$$

ここで, $u_x = 1$ ならば, $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$ となり, 異なる点が同じ点に移ることを意味しており, 物理的にはおこりえない. 通常は, ここで変位が微小であることを仮定し, Taylor 展開し, 高次の項を無視して $\varepsilon = u_x$ として議論を進める. しかし, バネなどの場合, 変位は十分に小さいとはいえない. そこで, 本稿では, 歪みと変位の関係を近似せずそのままの形で扱う.

次に, 方程式を導出する. まず, その点の速さ $v = v(t, x)$ を求める.

$$v = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{u(t + \Delta t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta t}$$

より, $v = u_t + v u_x$ なので, $v = \frac{u_t}{1 - u_x}$. さらに, 密度 $\rho = \rho(t, x)$ については, 質量保存の法則 $\Delta X \rho(0, x) = \Delta x \rho(t, x)$ より, 次を得る.

$$\rho(t, x) = \frac{\partial X}{\partial x} \rho(0, x) = (1 - u_x) \rho(0, x).$$

ここで, ニュートンの運動方程式 $(\rho v)_t = f + \rho_x$ を採用すると (ただし, f は外力, ρ_x は応力), $\rho v = \rho(0, x) u_t$ より,

$$\rho_0(x) u_{tt} = f + \rho_x,$$

ここで, $\rho_0(x) = \rho(0, x)$. さらに, フックの法則 $\rho_x = \kappa \varepsilon$ を仮定し (κ は正定数), 以下の内部の運動方程式を得た.

$$\rho_0 u_{tt} = f + \kappa \left(\frac{u_x}{1 - u_x} \right)_x.$$

バネの初期位置を区間 $(0, L)$ とし, $x = 0$ でバネは固定する. 従って, $u(t, 0) = -X(t, 0) = 0$. また, 時刻 t でのバネの端の位置を $\ell(t)$ と表す. $\ell(0) = L$. 同様に, $u(t, \ell(t)) = \ell(t) - X(t, \ell(t)) = \ell(t) - L$. 質量 m のおもりがバネの端についているとすると, その運動方程式は,

$$m \ell''(t) = mg - \rho_0(\ell(t))$$

となる. ただし, g は重力加速度である.

以上より, 次の自由境界問題が得られる.

問題 1. 以下 (1) ~ (4) を満たす区間 $[0, T]$ 上の関数 $\ell = \ell(t)$ 及び $Q_\ell(T)$ 上の関数 $u = u(t, x)$ を求めよ, ただし,

$$Q_\ell(T) = \{(t, x) | 0 < x < \ell(t) \text{ for } 0 < t < T\}.$$

$$\rho_0 u_{tt} = f + \kappa \left(\frac{u_x}{1 - u_x} \right)_x \quad \text{in } Q_\ell(T), \quad (1)$$

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{for } 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(t, \ell(t)) = \ell(t) - L, m \ell''(t) = mg - \kappa \left(\frac{u_x}{1 - u_x} \right)_x \quad \text{for } 0 < t < T, \quad (3)$$

$$\ell(0) = L, u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = v_0(x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq L. \quad (4)$$

ここで, u_0 と v_0 は初期関数である。しかし, この問題 1 は の非線形性及び自由境界問題から生じる困難さのために, 容易に解くことはできない。従って, この問題を解く前に, 方程式 (1) に対する初期値境界値問題の可解性を調べる必要がある。第 2 節では, このことを取り上げる。そして, 第 3 節において, 今後の展望を述べる。

2 非線形歪みに対する固定境界問題

固定境界の場合であっても, 方程式 (1) の強い非線形性のため, 解くことは容易ではない。筆者のねらいは, バネの運動に関する自由境界問題を考察した後, 形状記憶合金に対する自由境界問題を解くことである。従って, 形状記憶合金の数理モデルに現れる次の方程式 (1) に対する近似方程式を取り上げることにする。

$$\rho_0 u_{tt} + \gamma u_{xxxx} - \mu u_{txx} = f + \quad x,$$

ここで, $\gamma > 0$, $\mu > 0$ は正定数である。この近似は, 形状記憶合金の力学的変化を記述する際によく使われる (cf. Brokate-Sprekels [2])。

問題 2. 以下 (5)~(7) を満たす $Q(T)$ 上の関数 $u = u(t, x)$ を求めよ, ただし,

$$Q_\ell(T) = (0, T) \times (0, 1), 0 < T < \infty.$$

$$\rho_0 u_{tt} + \gamma u_{xxxx} - \mu u_{txx} = \kappa \left(\frac{u_x}{1 - u_x} \right)_x \quad \text{in } Q(T), \quad (5)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0 \quad \text{for } 0 < t < T, \quad (6)$$

$$u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = v_0(x) \quad \text{for } 0 < x < 1. \quad (7)$$

問題 2 の解を定義する。

定義 1. u が 次の i)~iii) を満たすとき, 問題 2 の $[0, T]$ 上の弱解とよぶ。

i) $u \in W^{2,2}(0, T; (H_0^1(0, 1))) \cap W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; H^3(0, 1)) \cap W^{1,2}(0, T; H^2(0, 1))$.

ii) $\langle u_{tt}(t), \eta \rangle - \gamma \langle u_{xxx}(t), \eta_x \rangle - \mu \langle u_{txx}(t), \eta \rangle - \left(\frac{u_x(t)}{1 - u_x(t)}, \eta \right) = 0$ for $\eta \in H_0^1(0, 1)$,
ここで, $H_0^1(0, 1)$ は $H_0^1(0, 1)$ の共役空間, (\cdot, \cdot) は $L^2(0, 1)$ の内積, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $(H_0^1(0, 1)) \times H_0^1(0, 1)$ の duality pair を表す。

iii) ある $\delta > 0$ に対し, $u_x \leq 1 - \delta$ on $Q(T)$.

さらに, u が iii) と次の i)' と ii)'' を満たすとき, 問題 2 の $[0, T]$ 上の強解であるという。

i)' $u \in W^{2,2}(0, T; L^2(0, 1)) \cap W^{1,\infty}(0, T; H^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; H^4(0, 1)) \cap W^{1,2}(0, T; H^3(0, 1))$.

ii)'' (5) が $Q(T)$ 上成り立ち, (6), (7) も通常の意味で成り立つ。

本稿の主定理を与える。

定理 ρ_0 は定数, $u_0 \in H^3(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$, $v_0 \in H_0^1(0, 1)$ とする。このとき, ある $\delta_0 > 0$ が存在し,

$$|v_0|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\gamma}{2} |u_{0xx}|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \left(\frac{u_{0x}}{1 - u_{0x}} \right) dx < \delta_0$$

ならば，問題 2 は任意の $T > 0$ に対し， $[0, T]$ 上，一意的な弱解をもつ。

さらに， $u_0 \in H^4(0, 1)$ かつ $v_0 \in H^2(0, 1)$ ならば，問題 2 は強解をもつ。

定理における一意性は，定義 1iii) より，解の差を方程式の差にかけて，積分することによって容易に証明できる。

存在の証明を以下の手順で行う。

(1st Step) $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ に対し，

$$u_{tt} + \gamma u_{xxxx} - \mu u_{txx} = f \quad (8)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0 \quad (9)$$

$$u(0) = u_0, u_t(0) = v_0 \quad (10)$$

の弱解の存在を示す。この方程式が強解を持つためには， $f \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$ が必要である。

(2nd step) $\beta : R \text{ to } R$ を $\beta(r) = \kappa \frac{r}{1-r}$ for $r \in R$ とおき，その吉田近似を β_λ とする。 $\lambda \in (0, 1]$ に対し，

$$u_{\lambda tt} + \gamma u_{\lambda xxxx} - \mu u_{\lambda txx} = \beta_\lambda(u_{\lambda x})_x \quad (*)$$

初期値境界値問題 (8) ~ (10) の (8) を (*) に代えた問題の解の存在及び一意性を，Banach の不動点定理で示す。

(3rd Step) (*) $\times u_{\lambda t}$ より，

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |u_{\lambda t}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\gamma}{2} |u_{\lambda xxx}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \hat{\beta}_\lambda(u_{\lambda x}(t)) dx \right) + \mu |u_{\lambda txx}(t)|_{L^2(0,1)}^2 \leq 0.$$

ここで， $\hat{\beta}_\lambda$ は β_λ の原始関数である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_{\lambda t}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\gamma}{2} |u_{\lambda xxx}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \hat{\beta}_\lambda(u_{\lambda x}(t)) dx + \mu \int_0^t |u_{\lambda txx}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} |v_0|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\gamma}{2} |u_{0xxx}|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \left(\frac{u_{0xx}}{1-u_{0x}} \right) dx \leq \delta_0. \end{aligned}$$

よって， $|u_{\lambda x}(t)|_{L^\infty(0,1)} \leq 1 - \delta$ for $0 < t < T$ となる $\delta > 0$ がとれる。

(4th Step) $|\beta_\lambda(u_{\lambda x})| \leq C$, $\beta'(r) = \frac{\kappa}{(1-r)^2}$ より， $\beta_\lambda(u_{\lambda x})_x = \beta'_\lambda(u_{\lambda x}) u_{\lambda xxx}$ は $L^\infty(0, T; H)$ で有界である。

(5th Step) (*) の右辺が $L^2(Q(T))$ で有界なので，(*) $\times u_{\lambda txx}$ より，

$$\frac{1}{2} |u_{\lambda txx}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\gamma}{2} |u_{\lambda xxx}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \mu \int_0^t |u_{\lambda txx}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \leq C$$

(final Step) 以上の評価から，収束部分列をとって，解の存在を示すことができる。

3 今後の展望

前節で述べたように，本稿の結果はすべて，バネの部分形状記憶合金に変えた問題の研の前段階である。まず，1次元形状記憶合金問題に対する研究の状況を説明

する。バネの問題との違いは、フックの法則である。バネに対しては、歪みと応力の関係は比例しているとみなしているが、形状記憶合金の場合、この関係が非線形であり、なおかつ温度変化に依存することを仮定しなければならない。従って、必然的に温度変化を記述するエネルギー保存則から導かれる方程式と、運動方程式とを連立させて考えなければならない。このような1次元形状記憶合金に対する最も代表的な数理モデルは、Falk モデルである。Falk モデルの詳細については Brokate-Sprekels [2] を参照されたい。ここでは、弱解の存在に関する結果だけを簡単に述べる。従来、1次元形状記憶合金に対する Falk モデルの弱解については、いくつか結果があったが、近年、Yoshikawa [3] によってかなり広い空間で初期値を与えることができるようになった。また、形状記憶合金の場合、歪みと応力の関係が通常の間数ではなく、ヒステリシスとなる。このことを考慮に入れたモデルに対する数学的結果として、Aiki-Kadoya-Yoshikawa [1] がある。

上で述べた1次元形状記憶合金問題は全て固定領域で考えられている。そもそも、形状記憶合金は、温度変化によって、目に見えるレベルで形状が変化する。つまり、領域が変化する。ところが、現時点までにおいて、形状の変化までを数学的に捉えようとした結果はまだない。形状記憶合金の形状変化が立体的である場合もあるが、まず、1次元的に変化する場合を考える。炊飯器に設置されている温度センサーがその具体例を与える。形状記憶合金と普通のバネを組み合わせるとこの温度センサーが作られている(古川テクノマテリアルのホームページを参照)。この場合、自由境界は、普通のバネと形状記憶合金で作ったバネとのつなぎ目である。このセンサーに対する数理モデルを導出し、その適切性を示し、数値計算によってその動きを再現するのが、本研究の目的である。それへ、向けて以下の問題を考えていきたい。

- 問題 2 において、方程式を (5) に f を加え、境界条件を non-homogeneous にする。
- $u_x \leq 1 - \delta$ のように完全に $1 - u_x$ が浮いている場合ではなく、解の空間を $\frac{1}{1-u_x} \in L^2$ とする。
- 問題 1 の方程式 (1) を $\rho_0 u_{tt} + \gamma u_{xxxx} - \mu u_{txx} = f + \kappa u_x$ にする。

参考文献

- [1] T. Aiki, A. Kadoya and S. Yoshikawa, One-dimensional shape memory alloy problem with small viscosity, to appear in *Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena; Modelling, Analysis and Simulations*.
- [2] M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Appl. Math. Sci., 121, 1996.
- [3] S. Yoshikawa, Weak solutions for the Falk model System of shape memory alloys in energy class, *Math. Meth. Appl. Math.* 28(2005). 1423-1433.