研究集会「偏微分方程式と現象：
PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007(略称：PPM2007)」

（2007年11月16・17日：於宮崎大学工学部）

アブストラクト

11月宮崎に、日本代表野球チーム、トッププロゴルファー、そして、熱き数学・応用数学研究者が集っている．．．　。
（宮崎大学工学部A棟屋上からの遠景：サンマリンスタジアムと青島方面）

研究集会「偏微分方程式と現象：
PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007 (略称：PPM2007)」

日時：2007 年 11 月 16 日（金） ～ 11 月 17 日（土）

会場：宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内：http://www.miyazaki-u.ac.jp/~ohtsuka/research/ppm/ppm2007.html

プログラム

11 月 16 日 (金)

14:30-15:20 **渡辺 雅二** (岡山大学大学院環境学研究科)
河合 富佐子 (岡山大学資源生物科学研究所)
「ポリマー生分解に関するモデルと逆問題および数値シミュレーションについて」

15:40-16:30 **柴山 充瑠**（京都大学数理解析研究所）
「直線 3 体問題の記号化と Schubart 軌道について」

16:40-17:30 **柴田 徹太郎**（広島大学大学院工学研究科）
「非線形固有値問題の解の漸近挙動」

19:00～ 懇親会

「海鮮市場　木綿屋」(宮崎市橘通西 2 丁目 5 番 6 号 0985-29-1692）にて

11月17日(土)

9:40-10:30 **渡辺 道之**（東京理科大学理工学部）
「平面上の複素ポテンシャルの再構成について」

10:40-11:30 **滝本 和広**（広島大学大学院理学研究科）
「完全非線形偏微分方程式の解の等高面の除去可能性について」

11:40-12:30 **櫻井 建成**（千葉大学理学部）
「大腸菌のパターン形成」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、大塚）

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関わる漸近解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、北 直泰、矢崎成俊、大塚浩史、（宮崎大学）
連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科
E-mail：tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL：0985-58-7381 ／ 0985-58-7288（事務室）& FAX：0985-58-7289

ポリマー生分解に関するモデルと逆問題および数値シミュレーションについて

渡辺雅二[1)]・河合富佐子[2)]

[1)]岡山大学大学院環境学研究科，〒700-8530　岡山市津島中3-1-1
[2)]岡山大学資源生物科学研究所，〒710-0046　倉敷市中央2-20-1

化粧品や医薬部外品などの原料として用いられる水溶性ポリマーは，リサイクルや焼却処理には適さず，一部は使用後河川，湖沼，海域に排出される。いわゆる“プラスチック”と呼ばれる非水溶性ポリマーに関しても，すべてがリサイクルあるいは焼却処理されてはいない。そのため，これら高分子の環境中での不適切な蓄積を抑制する自然浄化作用の一要因として，微生物による分解，資化機能は不可欠であり，そのメカニズムを解明することは重要である。

微生物よるポリマー解重合プロセスは，一般にexogenousタイプとendogenousタイプに大きく分けられる。Exogenousタイプの解重合では，分解はポリマー分子末端に限られ，モノマーユニットの解離によりポリマー分子は低分子化する。したがってexogenousタイプ解重合プロセスでは，分子量分布域全体で徐々に低分子化が進む。また，酸化プロセスが分解の主な要因であることもexogenousタイプ解重合の特徴として挙げられる。Exogenousタイプの解重合の例としてポリエチレン（PE）のβ-酸化がある。炭化水素の代謝プロセスにより，末端にカルボキシル基が生成されたポリエチレン分子は，脂肪酸と類似の構造を持つようになり，その結果β-酸化が連続して作用する。Exogenousタイプ解重合プロセスのもう一つの例にポリエチレングリコール（PEG）の生分解がある。PEGは嫌気的あるいは好気的に，分子末端でモノマーユニットが切断される。PE生分解モデルとして提案された数学モデルであるexogenous解重合モデルは，ポリエチレングリコールの生分解性解析にも適用された［1,3-8,10］。

Endogenousタイプの解重合では，分子が任意の位置で切断される。その結果分解初期に分子量が急激に減少し，低分子化が進行する。また，加水分解が主な要因であることも，その特徴である。ポリビニールアルコール(PVA)の分解は酸化と加水分解の組み合わせで進行する。即ち、酸化酵素で生じたモノケトン或はジケトン構造に加水分解酵素が作用し，その結果炭素鎖が切断される。このPVA分解プロセスのモデルとして提案されたendogenous解重合モデルは，ポリ乳酸の酵素分解プロセスにも適用され，解析が行なわれた［2,9,11］。

本講演では， exogenousタイプ解重合モデルおよびendogenousタイプの解重合モデルに関して，実験データから分解率を求めるための逆問題と初期値問題を解くことによって行うシミュレーションについて解説する。本研究は，平成１９年度科学研究費補助金交付研究（基盤研究（C)，課題番号 16540106，研究代表者 渡辺雅二，研究課題名 微分方程式によるモデリングおよび逆問題の解析と数値解法）の一環である。

参考文献

[1] Fusako Kawai, Masaji Watanabe, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, Experimental analysis and numerical simulation for biodegradability of polyethylene, Polymer Degradation and Stability 76 (2002) 129-135.

[2] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Numerical Simulation for Enzymatic Degradation of Poly(vinyl Alcohol), Polymer Degradation and Stability 81 (2003) 393-399.

[3] 渡辺雅二・河合富佐子，実験結果と数値シミュレーションによるポリマー生分解性解析(Masaji Watanabe and Fusako Kawai, Analysis of polymeric biodegradability based on experimental results and numerical simulation)，環境制御(Environmental Research and Control)，第25号，25-32，(2003).

[4] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, A computational method for analysis of polyethylene biodegradation, Journal of Computational and Applied Mathematics 161 (2003) 133-144.

[5] Fusako Kawai, Masaji Watanabe, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, Shizue Hayashi, Comparative Study on Biodegradability of Polyethylene Wax by Bacteria and Fungi, Polymer Degradation and Stability 86 (2004) 105-114.

[6] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, Shizue Hayashi, Analytical and computational techniques for exogenous depolymerization of xenobiotic polymers, Mathematical Biosciences 192 (2004) 19-37.

[7] 渡辺雅二・河合富佐子，数値シミュレーションによるポリエチレングリコール生分解性解析，環境制御 (Environmental Research and Control)，第26号，17-22，(2004).

[8] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Numerical simulation of microbial depolymerization process of exogenous type, ANZIAM J. (46) pp.C1188-C1204, 2005.

[9] M. Watanabe, F. Kawai, Mathematical modelling and computational analysis, for enzymatic degradation of xenobiotic polymers, Applied Mathematical Modelling 30 (2006) 1497-1514.

[10] M. Watanabe, F. Kawai, Mathematical study of the biodegradation of xenobiotic polymers with experimental data introduced into analysis, Proceedings of the 7th Biennial Engineering Mathematics and Applications Conference, EMAC-2005, Melbourne, Editors: Andrew Stacey and Bill Blyth and John Shepherd and A. J. Roberts, ANZIAM J. 47 pp.C665--C681, 2007.

[11] M. Watanabe, F. Kawai, S. Tsuboi, S. Nakatsu, H. Ohara, Study on enzymatic hydrolysis of polylactic acid by endogenous depolymerizaion model, Macromolecular Theory and Simulations, Accepted (Early view publication, DOI: 10.1002/mats.200700015).

直線 3 体問題の記号化と Schubart 軌道について

柴山允瑠
京都大学数理解析研究所
E-mail: sibayama@kurims.kyoto-u.ac.jp
URL: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~sibayama/

1　振動解

$\mathbb{R}^d(d=1,2,3)$ 上の 3 個の質点の Newton 的な引力の相互作用による運動を調べる 3 体問題

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\sum_{j\neq i} \frac{m_j(q_i-q_j)}{|q_i-q_j|^3} \qquad (q_i \in \mathbb{R}^d, i=1,2,3) \tag{1}$$

について考える．ここで, $m_i \geqq 0$ は質点の質量 (m_i は質点の質量を表すと同時に, 文章の中では質点自体を表す場合にも用いる) , $q_i \in \mathbb{R}^d$ は質点の位置である．

3 体問題の軌道の $t\to\infty$ のときの漸近的な振る舞いによる分類が Chazy によってなされた．その分類項目の中で振動解とは次のように定義される解であり, 非有界な解の中では最も複雑な解である．

定義 1． 3 体問題 (1) の解 q は

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{i<j} \|q_i-q_j\| = \infty$$
$$\liminf_{t\to\infty} \max_{i<j} \|q_i-q_j\| < \infty$$

を満たすとき, 振動解という．

Chazy は振動解を可能性として考え, 当時その存在は分からなかったが, その後少しずつ振動解の存在証明がなされてきた．しかし, それらは振動解のほんの一部であろうと思われる．

2　直線 3 体問題の記号化

直線 3 体問題 ($d=1$) について考える．2 体衝突した場合は同じエネルギーを持ってはね返り, 解はその後も接続されるものとみなす．

質点は常に x 軸の負の方から m_1, m_2, m_3 の順で並んでいるとする (2 体衝突しても順は保たれる)．m_1 と m_2 が衝突したとき 1, m_2 と m_3 が衝突したとき 3, 3 体衝突したとき 2 と記号を付ける．記号列 $\underbrace{11\ldots1}_{l}$ などは 1^l と書く．質量のなす空間の中で allowable という性質を満たす質量全体を $\mathcal{M} \subset (\mathbb{R}_{>0})^3$ とおく．$\mathcal{M}$ は空ではない．各 $\mathbf{m}=(m_1,m_2,m_3) \in \mathcal{M}$ に対し, 3 体近衝突する軌道の振る舞いを特徴づける自然数 $l_{\mathbf{m}} \geqq 3$ が存在する．この $l_{\mathbf{m}}$ に対して長さ $l_{\mathbf{m}}$ または $l_{\mathbf{m}}-1$ の 1 と 3 の交互列が 4 通りとれるが, その集合を $\mathrm{Alt}_{l_{\mathbf{m}}}$ と

おく:

$$\mathrm{Alt}_{l_{\mathbf{m}}} = \{\underbrace{1313\ldots13}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}}, \underbrace{1313\ldots31}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}}, \underbrace{3131\ldots13}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}}, \underbrace{3131\ldots31}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}}\}$$

数列 $2 \leqq a_n \leqq \infty, b_n = 1, 2, 3 (n \in \mathbb{Z})$ に対して次のような記号列を考える:

$$\ldots c_{k-1}(b_k)^{a_k} c_k (b_{k+1})^{a_{k+1}} c_{k+1} \ldots \tag{2}$$

ここで, $c_k \in \mathrm{Alt}_{l_{\mathbf{m}}}$ で c_k の最初の記号が b_k でなく最後の記号が b_{k+1} でないものとして定める. $a_n = \infty$ や $b_n = 2$ とした場合はその後 (またはその前) の記号列はないとする.

定理 1. 上記のようにして生成した任意の記号列 (2) に対応する直線 3 体問題の軌道が存在する.

すなわち, m_2 は m_{b_k} と連続してちょうど a_k 回の衝突をする. その後 m_2 は m_1, m_3 と交互に $l_{\mathbf{m}}$ または $l_{\mathbf{m}} - 1$ 回衝突した後 $m_{b_{k+1}}$ と a_{k+1} 回の衝突をする. この同様の振る舞いを過去にも未来にもおいて繰り返す.

系 1. 定理 1 において特に $a_n \neq \infty (\forall n \in \mathbb{N})$ で $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が非有界となるようにとると, 対応する解は未来において振動的な解となる. 同様に過去において振動的な解や, 未来にも過去にも振動的な解が得られる.

定理 2. *定理 1 において, ある $L \geqq 1$ に対して $a_k = a_{k+L} = a_{-k}, b_k = b_{k+L} = b_{-k} (\forall k \in \mathbb{Z})$ が成り立つようにとると, その記号列を実現する周期解が存在する.*

定理 3. *allowable な質量に対する直線 3 体問題は非可積分である. すなわち, エネルギーと運動量に独立な解析的第一積分は存在しない.*

証明に関しては preprint(http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~sibayama/collinear.pdf) を参照されたい.

3 Schubart 軌道

前節の結果により直線 3 体問題の記号化が実現できたが, 定理 1, 2 に含まれない軌道は存在する. 例えば Schubart 軌道というものある. Schubart 軌道とは 2 種類の 2 体衝突を交互に繰り返す周期軌道である. すなわち、記号列 $\ldots 131313 \ldots$ を実現する周期軌道である.

Schubart は 1950 年代にこの軌道を数値的に見つけ, 近年 Moeckel が $m_1 = m_3$ の場合にその存在を数学的に示した. 変分法を用いることにより, その結果を任意の質量にまで拡張できた:

定理 4. *任意の質量に対して, Schubart 軌道が存在する.*

証明に関しては preprint(http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~sibayama/varmet.pdf) を参照されたい.

非線形固有値問題の解の漸近挙動

柴田　徹太郎
広島大学・大学院工学研究科

1　Introduction

次の非線形固有値問題を考える：

$$
\begin{aligned}
-u''(t) + u(t)^p &= \lambda u(t) \quad t \in I = (0,1), && (1.1)\\
u(t) &> 0, \quad t \in I, && (1.2)\\
u(0) &= u(1) = 0. && (1.3)
\end{aligned}
$$

ここで $p > 1$ は定数、$\lambda > 0$ は正のパラメータとする. [1] により、任意に与えられた $\alpha > 0$ に対し、(1.1)–(1.3) の解 $(\lambda, u) = (\lambda_q(\alpha), u_\alpha) \in \mathbf{R}_+ \times C^2(\bar{I})$ で $\|u_\alpha\|_q = \alpha$ を満たすものがただひとつ存在する。ここで $\|\cdot\|_q$ は L^q-norm である. さらに、集合 $\{(\lambda_q(\alpha), u_\alpha); \alpha > 0\}$ は (1.1)–(1.3) のすべての解を与え、$(\pi^2, 0)$ から出発する $\mathbf{R}_+ \times C^2(\bar{I})$ における C^1 級の曲線を与える。ここで、曲線 $\lambda_q(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ は、(1.1)–(1.3) の L^q の枠組みでの正値解の分岐曲線と呼ばれる.

本講演では (1.1)–(1.3) の解の構造をよりよく理解するために、$\alpha \to \infty$ のときの $\lambda_q(\alpha)$ の漸近展開公式をあたえることを目標とする。その結果、解の L^q ノルムの漸近挙動や境界層の傾きなど、解の漸近的性質を詳しく知ることができる。

方程式 (1.1)–(1.3) は分岐問題や非線形固有値問題の観点から、L^∞ や L^2 の枠組みで多くの研究がなされてきた。（文献 [1–8] 参照） もうひとつの重要な観点は、$p = 2$ のときは生物の個体分布のロジスティック方程式に由来することである。したがって、解の L^1 ノルムを調べることは非常に重要である。

$t \in I$ に対し, $\alpha \to \infty$ のとき, 次の性質はよく知られている：

$$\frac{u_\alpha(t)}{\lambda_q(\alpha)^{1/(p-1)}} \to 1. \tag{1.4}$$

このことから、$\alpha \to \infty$ のとき, 次のことがわかる。

$$\lambda_q(\alpha) = \alpha^{p-1}(1 + o(1)). \tag{1.5}$$

最近 [9] において、非線形項が、一般の $f(u)$ のかたちのとき、(1.1)–(1.3) の L^q-分岐曲線が考察された。その系として次の公式が得られた。

定理 1.1 [9]. *(1.1)–(1.3)* を考える．$1 \le q < \infty$ を固定する．すると $\alpha \to \infty$ のとき次の公式が成り立つ：

$$\lambda_q(\alpha) = \alpha^{p-1} + C_1 \alpha^{(p-1)/2} + o(\alpha^{(p-1)/2}). \tag{1.6}$$

ここで

$$C_1 = \frac{p-1}{q} C(q),$$
$$C(q) := 2\int_0^1 \frac{1-s^q}{\sqrt{1-s^2-2(1-s^{p+1})/(p+1)}} ds.$$

[9] では一般の非線形項 $f(u)$ を扱っているので, (1.6) において第 3 項を求めるのは困難である。

本講演では $f(u) = u^p$ の場合に焦点を絞り、$\alpha \to \infty$ のときの $\lambda_q(\alpha)$ の精密な漸近公式を与える。特に $p = q+1$ のときは optimal な剰余項評価まで導くことができる。

$q = 2$ のときは我々の結果はすでに [8] で得られている．しかしながら [8] で用いられた手法は、$q = 2$ のときにのみ成り立つ解の臨界値と固有値の関係を利用しており、ここでその方法を応用することはできない。そこで、ここでは [8] の方法とは別の、単純で直接的なアプローチで公式を証明する。具体的には $\|u_\lambda\|_q$ と $\|u_\lambda\|_\infty$ を直接比較する方法を採用する.

参考文献

[1] H. Berestycki, Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques, *J. Funct. Anal.* **40** (1981) 1–29.

[2] R. Chiappinelli, Remarks on bifurcation for elliptic operators with odd nonlinearity, *Israel J. Math.* **65** (1989) 285–292.

[3] R. Chiappinelli, On spectral asymptotics and bifurcation for elliptic operators with odd superlinear term, *Nonlinear Anal. TMA* **13** (1989) 871–878.

[4] J. M. Fraile, J. López-Gómez and J. C. Sabina de Lis, On the global structure of the set of positive solutions of some semilinear elliptic boundary value problems, *J. Differential Equations* **123** (1995) 180–212.

[5] M. Holzmann and H. Kielhöfer, Uniqueness of global positive solution branches of nonlinear elliptic problems, *Math. Ann.* **300** (1994) 221–241.

[6] P. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **8** (1971) 321–340.

[7] P. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.* **7** (1971) 487–513.

[8] T. Shibata, Precise spectral asymptotics for nonlinear Sturm-Liouville problems, *J. Differential Equations 180* (2002) 374–394.

[9] T. Shibata, L^q spectral asymptotics for nonlinear Sturm-Liouville problems, *Differential and Integral Equations 19* (2006) 773–783.

平面上の複素ポテンシャルの再構成について

渡辺道之　（東京理科大学・理工学部）

物理的現象を特徴づける物理係数は，しばしば偏微分作用素の係数に現れる．様々な計測ではこれらの物理係数を求める問題，すなわち偏微分方程式の係数同定逆問題が重要となる．例えば，標的に粒子をぶつけ散乱された粒子を観測し，そのデータから標的の物理的性質を決定する問題はシュレーディンガー方程式の散乱の逆問題と呼ばれている．また，物体の表面に電流を流し一定時間経過した後，その物体の表面での電圧を計測し，これらのデータから物体の伝導率を決定しようという問題は境界値逆問題（inverse conductivity problem）と呼ばれている．これらの問題で決定しようとしている未知の物は偏微分方程式の係数として記述される．未知係数を計測データから具体的に構成する手続き（**再構成手続き**）を与えることが応用上あるいは実用上重要である．

境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = f, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで，$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ は滑らかな境界を持つ有界領域とし，$V \in L^p(\Omega)$ $(p > 2)$ とする．もし 0 が $-\Delta + V$ in Ω の Dirichlet 固有値でないならば，境界値問題(1) は $f \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ に対し唯一つの解 $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ を持つ（ただし，$\alpha = 1 - 2/p$ とおいた）．そこで，Dirichlet-Neumann 写像（DN map）を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \Lambda_V : C^{1,\alpha}(\partial\Omega) &\to C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \\ f &\mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

ここで，ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．ここでは，DN map Λ_V からポテンシャル $V(x)$ を求める境界値逆問題について考える．実は，シュレーディンガー方程式に対する散乱の逆問題も inverse conductivity problem も（V に制限はつくが）(1) の境界値逆問題に帰着できることが知られている．

(1) の多次元逆問題に関しては多くの結果があり，DN map から $V(x)$ を求める再構成手続きが与えられている（例えば，[1]，[2] 及びそれらの参考文献を参照してほしい）．V が複素数値関数の場合も，実数値関数の場合とほぼ同様の結果が得られることもわかる．一方，2 次元の場合は conductivity problem から導かれる特殊な形のポテンシャルについては再構成手続きが与えられている（例えば，[4]）．しかし，一般のポテンシャルに関しては未解決である．V に適当な意味で小ささを仮定すれば，Nachman [4] の方法に従って再構成手続きを与えられることが期待できるが，V が複素数値関数になると，Nachman の手法は直接適用できないように思える．なお，複素数値関数 $V \in L^p(\Omega)$ の一意性（$\Lambda_{V_1} = \Lambda_{V_2}$ ならば $V_1 = V_2$）については Kang [3] によって得られているが，この論文では再構成手続きは含まれていない．

本講演では，適当な意味での小ささの仮定の下で，複素数値関数 V を DN map から求める再構成手続きについて紹介する．

References

[1] 池畠優，中村玄，境界値逆問題 ⋯ Calderon からの 15 年，数学 48 巻 3 号，岩波書店，1996.

[2] 磯崎洋，散乱理論と逆問題，数学 59 巻 2 号，岩波書店，2007.

[3] H. Kang, A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in two dimensions, *J. Math. Anal. Appl.,* **270** (2002), 291–302.

[4] A. Nachman, Global uniqueness for a two dimensional inverse boundary value problem, *Ann. Math.,* **143** (1996), 71–96.

完全非線形偏微分方程式の解の等高面の除去可能性について[1]

広島大学・大学院理学研究科　　　滝本　和広[2]

自然現象や社会現象の数学的モデルとして偏微分方程式が登場するが，例えば極小曲面を考えると古典解ばかりではなく特異性を持った解も出現しうる．そして特異集合やその周りにおける解の挙動を解析することは重要な研究課題であり，多くの結果が知られている．

さて，ここでは「一風変わった」結果を紹介する．20 世紀の初頭に Radó は次の定理を証明した．

Theorem 1. [7]　領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上で連続な複素数値関数 f が $\Omega \setminus f^{-1}(0)$ で正則ならば，f は Ω 全体で正則である．

即ち「正則関数のクラスにおいて，(関数が連続ならば) <u>**等高面は除去可能である**</u>」ことを意味する．本講演では，**完全非線形楕円型偏微分方程式**

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

および**完全非線形放物型偏微分方程式**

$$u_t + F(t, x, u, Du, D^2u) = 0 \qquad \text{in } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \tag{2}$$

に対して次の**問題**を考察する．

<u>**問題.**</u>　関数 u が，領域全体から u の 0-等高面 $u^{-1}(0) = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}$ or $\{(t, x) \in \mathcal{O} \mid u(t, x) = 0\}$ を除いた集合上で (1) または (2) の解であるならば，実は u は領域全体で (1) または (2) の解となっているか？

この種の「等高面の除去可能性」に関する問題については，Laplace 方程式に対しては古くより研究がなされた ([1, 2, 4])．一般の線形楕円型偏微分方程式に対しては Šabat [8]，p-Laplace 方程式や一般の準線形方程式に対しては Kilpeläinen, Juutinen-Lindqvist [3, 5, 6] による結果がある．しかしながら，完全非線形方程式に対してはこれまで研究はなされていなかった．

ここでは，楕円型方程式 (1) に対する結果について述べる．$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とし，F に次の仮定を課す．以下，$\mathbb{S}^{n\times n}$ で n 次実対称行列全体を表す．

[1] 研究集会「偏微分方程式と現象 : PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007」，2007 年 11 月 17 日
[2] E-mail : takimoto@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

(A1) $F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ は連続関数.

(A2) F は退化楕円型，即ち任意の $x\in\Omega$, $r\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$, $X,Y\in\mathbb{S}^{n\times n}$ に対し，$X\geq Y$ ならば $F(x,r,q,X)\leq F(x,r,q,Y)$.

(A3) 任意の $x\in\Omega$ に対して $F(x,0,0,O)=0$.

(A4) $\alpha>2$ が存在し，任意のコンパクト集合 $K\Subset\Omega$ に対して，ある $\varepsilon>0$, $C>0$, $\omega_K(0)=0$ かつ非減少な関数 $\omega_K\in C([0,\infty))$ があって次を満たす：

$x,y\in K$, $r,s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, $j\geq C$, $X,Y\in\mathbb{S}^{n\times n}$ が

$$-3j(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}I_{2n}\leq\begin{pmatrix}X & O\\ O & -Y\end{pmatrix}\leq 3j(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2}\begin{pmatrix}I_n & -I_n\\ -I_n & I_n\end{pmatrix}\tag{3}$$

を満たすならば

$$\begin{aligned}F\left(y,s,j|x-y|^{\alpha-2}(x-y),Y\right)-F\left(x,r,j|x-y|^{\alpha-2}(x-y),X\right)\\ \leq\omega_K\left(|r-s|+j|x-y|^{\alpha-1}+|x-y|\right).\end{aligned}\tag{4}$$

このとき，次が成立する．

Theorem 2. [9] **(A1)**, **(A2)**, **(A3)**, **(A4)** を仮定する．このとき，$u\in C^1(\Omega)$ が $\Omega\setminus u^{-1}(0)$ で (1) の粘性解ならば，u は Ω 全体で (1) の粘性解である．

Remark. (i) 条件 $u\in C^1(\Omega)$ は optimal なものであり，$u\in C^{0,1}(\Omega)$ に弱めると定理が成立しないような反例が存在する．例えば

$$u(x)=|x_1|,\qquad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega=B_1=\{|x|<1\}\tag{5}$$

は $\Omega\setminus u^{-1}(0)=B_1\setminus\{x_1=0\}$ において $-\Delta u=0$ の古典解であるが（従って粘性解でもある），$\Omega=B_1$ 全体では $-\Delta u=0$ の粘性解とはなっていない．

(ii) $F(x,r,q,X)=\tilde{F}(q,X)$ または $F(x,r,q,X)=\tilde{F}(q,X)+f(r)$ の場合は，**(A1)**, **(A2)** の下で **(A4)** は自動的に成立する．即ち次の結果を得る．

Corollary 3. [9] $F(x,r,q,X)=\tilde{F}(q,X)+f(r)$ と書けたとする．いま，

(B1) $\tilde{F}$ は連続かつ退化楕円型　　**(B2)** f は連続

(B3) $\tilde{F}(0,O)+f(0)=0$

を仮定する．このとき，$u\in C^1(\Omega)$ が $\Omega\setminus u^{-1}(0)$ で (1) の粘性解ならば，u は Ω 全体で (1) の粘性解である．

この結果により初めて完全非線形方程式に対しても等高面の除去可能性定理が得られただけでなく，これまでの研究結果の多くを包括するものとなっている．証明および放物型方程式 (2) に対する結果・その他の拡張については講演中に述べる．

References

[1] E.F. Beckenbach, *On characteristic properties of harmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 765–769.

[2] J.W. Green, *Functions that are harmonic or zero*, Amer. J. Math. **82** (1960), 867–872.

[3] T. Kilpeläinen, *A Radó type theorem for p-harmonic functions in the plane*, Electoric J. Differential Equations **9** (1994), 1–4.

[4] J. Král, *Some extension results concerning harmonic functions*, J. London Math. Soc. **28** (1983), 62–70.

[5] P. Juutinen and P. Lindqvist, *A theorem of Radó's type for the solutions of a quasi-linear equation*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 31–34.

[6] P. Juutinen and P. Lindqvist, *Removability of a level set for solutions of quasilinear equations*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), 305–321.

[7] T. Radó, *Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit*, Math. Z. **20** (1924), 1–6.

[8] A.B. Šabat, *On a property of solutions of elliptic equations of second order*, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 926–928.

[9] K. Takimoto, *Radó type removability result for fully nonlinear equations*, Differential Integral Equations **20** (2007), 939–960.

大腸菌のパターン形成

櫻井　建成（千葉大学理学部）

非平衡開放条件下におかれた、非線形システムにおけるパターン形成・自己組織化の問題は、生命現象の物理・化学的理解の観点から広く注目されており、BZ反応などで観測されるパターンダイナミクスの研究が広く行われてきた。我々は、増殖モデル（反応拡散モデル）に化学物質の濃度勾配に依存して大腸菌が移動する移流項を付加したモデル（三村・辻川モデル）を用いた数値計算において、ストライプ状パターンや蜂の巣状パターンの出現を示してきた。そこでは、秩序（パターン）の出現は、移流の強さや細胞増殖の速さに依存していることがわかった（図１）。しかしながら、生物を実験対象にした研究は理論研究に比べ遅れている。本研究会では、ある特定の遺伝子をノックアウトした大腸菌を用いたパターン形成の実験結果（図２－４）を報告するとともに、実際の大腸菌パターン形成と反応・拡散・移流モデルとの比較検討を行いたい。

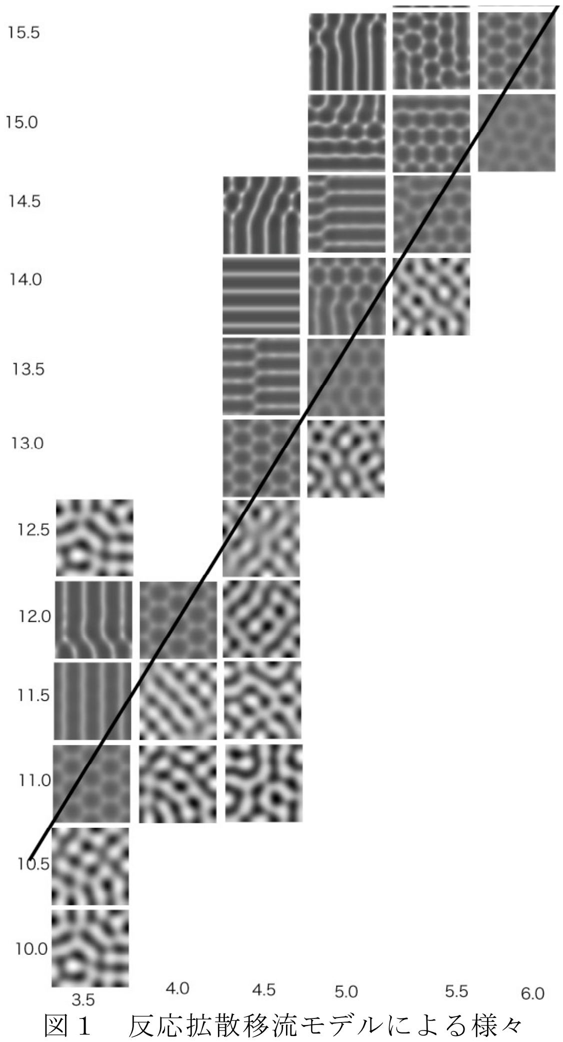

図１　反応拡散移流モデルによる様々なパターンの出現。横軸は増殖率の強さで、縦軸は移流の強さを表す。

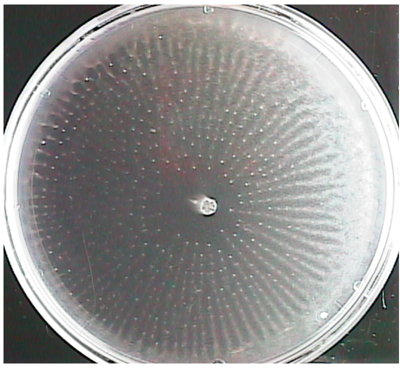

図２　大腸菌のドットパターン

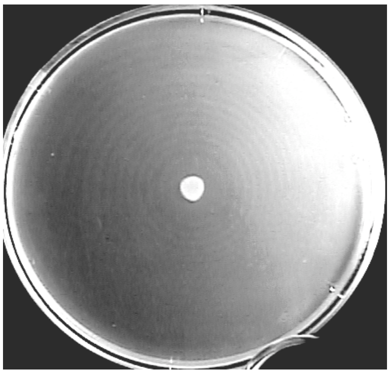

図３　ターゲット状パターン

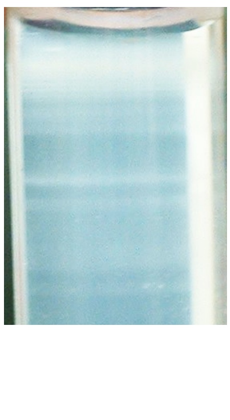

図４
縞状パターン