



研究集会「偏微分方程式と現象:

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007(略称:PPM2007)」

(2007年11月16・17日:於宮崎大学工学部)

## 報告集



11月宮崎に、日本代表野球チーム、トッププロゴルファー、そして、熱き数学・応用数学研究者が集っている...

(宮崎大学工学部A棟屋上からの遠景:木の花ドームと青島方面)

はじめに

宮崎の地で研究集会「PPM」を始めて、今回5回目を開催することが出来ました。これも一重に講演者皆様のご協力と参加者の励ましによるものと感謝しています。最近では「今年も研究集会を開きますか」と関心を持って頂けるようになりました。世話人の興味ある話題を中心に講演依頼をしている関係上、内容の統一性には欠ける点もありますが、この研究集会が目指す異分野交流という本来の目的は達成されているのではないのでしょうか。この研究集会を始めた頃の世話人の半数が転出しましたが、新たなメンバーを加え今後とも継続して行くことにしています。皆様のご協力をよろしくお願い致します。

また、お蔭様で執筆者の方々からすばらしい原稿を頂き、報告書を作ることが出来ました。改めて感謝いたします。

尚、本報告集のPDF ファイルは、

<http://www.miyazaki-u.ac.jp/~ohtsuka/research/ppm/ppm2007.html>

より入手できます。カラー図版等の閲覧にご利用ください。また、過去の研究集会 PPM2003～PPM2006 の報告集も上記 WEB サイトから迎えることができますので、合わせてご参照いただけますと幸いです。

本研究集会は、いくつかの科学研究費補助金の援助を受けました。補助金番号の一覧は次々ページのプログラムの最後に掲載してあります。最後に、研究集会開催にあたり、ご協力くださった関係者の方々全てに感謝の意を表したいと思います。

2008年4月

世話人を代表して

辻川 亨

## 目次

1. 渡辺雅二（岡山大学）・河合富佐子（岡山大学）  
ポリマー生分解に関するモデルと逆問題  
および数値シミュレーションについて.....6-14
2. 柴山充瑠（京都大学）  
直線3体問題の記号化と Schubart 軌道について.....16-27
3. 柴田徹太郎（広島大学）  
非線形固有値問題の解の漸近挙動.....28-35
4. 渡辺道之（東京理科大学）  
平面上の複素ポテンシャルの再構成について.....36-58
5. 滝本和広（広島大学）  
完全非線形偏微分方程式の解の等高面の除去可能性について.....60-71
6. 櫻井建成（千葉大学）  
大腸菌のパターン形成.....72-80

研究集会「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007 (略称：PPM2007)」

日時：2007年11月16日(金)～11月17日(土)

会場：宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内：<http://www.miyazaki-u.ac.jp/~ohtsuka/research/ppm/ppm2007.html>

## プログラム

11月16日(金)

14:30-15:20 渡辺 雅二(岡山大学大学院環境学研究科)

河合 富佐子(岡山大学資源生物科学研究所)

「ポリマー生分解に関するモデルと逆問題および数値シミュレーションについて」

15:40-16:30 柴山 充瑠(京都大学数理解析研究所)

「直線3体問題の記号化とSchubart軌道について」

16:40-17:30 柴田 徹太郎(広島大学大学院工学研究科)

「非線形固有値問題の解の漸近挙動」

19:00～ 懇親会

「海鮮市場 木綿屋」(宮崎市橘通西2丁目5番6号 0985-29-1692)にて

11月17日(土)

9:40-10:30 渡辺 道之 (東京理科大学理工学部)

「平面上の複素ポテンシャルの再構成について」

10:40-11:30 滝本 和広 (広島大学大学院理学研究科)

「完全非線形偏微分方程式の解の等高面の除去可能性について」

11:40-12:30 櫻井 建成 (千葉大学理学部)

「大腸菌のパターン形成」

---

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C(2) : 辻川、大塚)

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関わる漸近解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究

の援助を受けています。

---

世話人：辻川 亨、北 直泰、矢崎成俊、大塚浩史、(宮崎大学)

連絡先：辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : [tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp](mailto:tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp)

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

# ポリマー生分解に関するモデルと逆問題および 数値シミュレーションについて

渡辺雅二\*      河合富佐子†

## 概要

Endogenous タイプ解重合のモデルについて、最近得られた結果を示す。Endogenous タイプ解重合プロセスの解析に従来適用されたモデルを一般化したモデルが導かれる過程を示し、その解析方法について言及する。

## 1 序論

化粧品や医薬部外品などの原料として用いられる水溶性ポリマーは、リサイクルや焼却処理には適さず、一部は使用後河川、湖沼、海域に排出される。いわゆる“プラスチック”と呼ばれる非水溶性ポリマーに関しても、すべてがリサイクルあるいは焼却処理されてはいない。そのため、これら高分子の環境中での不適切な蓄積を抑制する自然浄化作用の一要因として、微生物による分解、資化機能は不可欠であり、そのメカニズムを解明することは重要である。微生物によるポリマー解重合プロセスは、一般に exogenous タイプと endogenous タイプに大きく分けられる。Exogenous タイプの解重合では、分解はポリマー分子末端に限られ、モノマーユニットの解離によりポリマー分子は低分子化する。したがって exogenous タイプ解重合プロセスでは、分子量分布域全体で徐々に低分子化が進む。また、酸化プロセスが分解の主な要因であることも exogenous タイプ解重合の特徴として挙げられる。Exogenous タイプの解重合の例としてポリエチレン (PE) の  $\beta$ -酸化がある。炭化水素の代謝プロセスにより、末端にカルボキシル基が生成されたポリエチレン分子は、脂肪酸と類似の構造を持つようになり、その結果  $\beta$ -酸化が連続して作用する。Exogenous タイプ解重合プロセスのもう一つの例にポリエチ

---

\*岡山大学大学院環境学研究科

†岡山大学資源生物科学研究所

本研究は、平成19年度科学研究費補助金交付研究(基盤研究(C)、課題番号16540106、研究代表者 渡辺雅二、研究課題名 微分方程式によるモデリングおよび逆問題の解析と数値解法)の一環として遂行された。

レングリコール (PEG) の生分解がある。PEG は嫌氣的あるいは好氣的に、分子末端でモノマーユニットが切断される。PE 生分解モデルとして提案された数学モデルである exogenous 解重合モデルは、PEG の生分解性解析にも適用された [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10]。

Endogenous タイプの解重合では、分子が任意の位置で切断される。その結果分解初期に分子量が急激に減少し、低分子化が進行する。また、加水分解が主な要因であることも、その特徴である。ポリビニールアルコール (PVA) の分解は酸化と加水分解の組み合わせで進行する。即ち、酸化酵素で生じたモノケトン或はジケトン構造に加水分解酵素が作用し、その結果炭素鎖が切断される。この PVA 分解プロセスのモデルとして提案された endogenous 解重合モデルは、ポリ乳酸 (PLA) の酵素分解プロセスにも適用され、解析が行なわれた [2, 3, 9, 11]。

本報告では、exogenous タイプ解重合および endogenous タイプの解重合に関して、実験データから分解率を求めるための逆問題と初期値問題を解くことにより行うシミュレーションについて解説する。

## 2 Exogenous 解重合モデルとその適用について

PE を炭素源とした微生物の培養実験の結果より、低分子が高分子よりも速く分解され、培養後は培養前に比較して PE の重量分布全体が高分子側にシフトしたことが示された。また PE は化学構造的には炭化水素であり、末端からの分解代謝経路である Terminal oxidation, Diterminal oxidation, Subterminal oxidation が作用すると考えられる。これら炭化水素の代謝経路で代謝された PE 分子には、末端の酸化によりカルボン酸が生成される。その結果 PE 分子は脂肪酸と類似の構造を持つようになり、 $\beta$ -酸化が作用すると考えられる。このとき 1 サイクルの  $\beta$ -酸化で炭素原子 2 つ分のユニットが PE 分子から解離する。

前述の実験結果と理論的観点より次のシナリオが想定された：「十分に小さい PE 分子は微生物によって直接吸収され、それ以上のものは直接吸収消化されるようになるまで  $\beta$ -酸化によって少しずつ小さくなっていく。」このシナリオに基づき次の PE 生分解モデルが提案された。

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha(M)x + \beta(M)\frac{M}{M+L}y \quad (1)$$

ただし、 $t$  は時間、 $M$  は分子量、 $L$  は PE 分子が 1 回の  $\beta$ -酸化で失う分子量を表す。1 回の  $\beta$ -酸化で炭素原子 2 つ分のユニット ( $CH_2CH_2$ ) が PE 分子から解離するので、 $L = 28$  となる。また  $x = w(t, M)$ ,  $y = w(t, M + L)$  とする。ただし、 $w(t, M)$  は、時刻  $t$  で分子量  $M$  を持つ分子の総重量を表す。したがって  $y = w(t, M + L)$  は時刻  $t$  で分子量  $M + L$  を持つ分子の総重量である。

式 (1) は PEG の生分解にも適用され得る。PE の場合同様、時刻  $t$  で分子量  $M$  を持つ PEG 分子の総重量を  $w(t, M)$  で表す。PEG 分子の分子量は十分に大きく、

直接の消化吸収が作用しないとすると,  $x = w(t, M)$ ,  $y = w(t, M + L)$  は式

$$\frac{dx}{dt} = -\beta(M)x + \beta(M)\frac{M}{M+L}y \quad (2)$$

の解となる。PEG の場合, まず分子末端が酸化され, 次にエーテル結合が切断される。PE 分子の  $\beta$ -酸化に相当するこのプロセスには酸化が終始関わっていることから, これを酸化と呼び, また  $\beta(M)$  を酸化率と呼ぶ。PEG の場合 1 回の酸化で炭素原子 2 つ分のユニット ( $CH_2CH_2O$ ) が PEG 分子から解離するので,  $L = 44$  となる。

初期の重量分布が与えられ, 関数  $f(M)$  で表されるとき, 方程式 (1) あるいは方程式 (2) と初期条件

$$w(0, M) = f(M) \quad (3)$$

からなる初期値問題が構成される。初期条件 (3) の他に, 分解後のある時刻  $T$  の重量分布が与えられ, 関数  $g(M)$  で表されるとき, 方程式 (1) と初期条件 (3) あるいは方程式 (2) と初期条件 (3) からなる初期値問題の解が, 条件

$$w(T, M) = g(M) \quad (4)$$

も満たすような分解率  $\alpha(M)$  あるいは  $\beta(M)$  を求めるための逆問題が提起される。

前述の初期値問題と逆問題が PE 生分解に適用され, 実験データを導入した解析およびシミュレーションが行われた [1, 3, 4, 5, 6]。PEG 生分解にも同様に, これら初期値問題と逆問題が適用され, 実験データを導入した解析およびシミュレーションが行われた [7, 8, 10]。また PEG 生分解の解析では分解率の時間依存性も考慮された [10]。

### 3 Endogenous 解重合モデルとその適用について

Endogenous 解重合モデルを導くため,  $t$  を時間,  $M$  を分子量,  $w(t, M)$  を時刻  $t$  での分子量  $M$  をもつ分子の総重量とする。  $C(a, b)$  を分子量  $A$  以上  $B$  以下の分子の集合とする。また  $p(t, K, M)$  を  $w(t, M)$  から  $w(t, K)$  への単位時間あたりの移動量とする。このとき時刻  $t$  で  $C(A, B)$  に属する分子の総重量は

$$\int_A^B w(t, M) dM$$

また  $C(A, B)$  から  $C(D, E)$  への単位時間あたりの移動量は

$$\int \int_R p(t, K, M) dM dK$$

で表される。ただし

$$R = \{(K, M) \mid K \leq M, D \leq K \leq E, A \leq M \leq B\}$$

とする。このとき時刻  $t$  で  $C(A, B)$  における単位時間当たりの減少量は

$$-\int_A^B \int_0^M p(t, K, M) dK dM \quad (5)$$

であり, また単位時間当たりの増加量は

$$\int_A^B \int_M^\infty p(t, M, K) dK dM \quad (6)$$

である。一方  $C(A, B)$  における総重量変化率は

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A^B w(t, M) dM = \int_A^B \frac{\partial w}{\partial t}(t, M) dM$$

であり, これが減少量 (5) と増加量 (6) の和に等しいことから

$$\int_A^B \frac{\partial w}{\partial t}(t, M) dM = -\int_A^B \int_0^M p(t, K, M) dK dM + \int_A^B \int_M^\infty p(t, M, K) dK dM$$

となる。この式より

$$\int_A^B \left\{ \frac{\partial w}{\partial t}(t, M) + \int_0^M p(t, K, M) dK - \int_M^\infty p(t, M, K) dK \right\} dM = 0$$

となる。この式が任意の区間  $[a, b]$  に対して成り立つので,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, M) + \int_0^M p(t, K, M) dK - \int_M^\infty p(t, M, K) dK = 0$$

となり, 更に

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, M) = -\int_0^M p(t, K, M) dK + \int_M^\infty p(t, M, K) dK = 0 \quad (7)$$

となる [2, 3, 9, 11, 12, 13]。

ここで  $\gamma(t, M)$  を分解率,  $q(K, M)$  を  $w(t, M)$  から  $w(t, K)$  への移動率とする。このとき  $q(K, M)$  は, 分子量  $M$  を持つ分子からなる単位重量の集合が分解されたとき生じる分子量  $K$  分子の総重量を表す。また  $\gamma(t, M) w(t, M)$  は単位時間当たりに  $w(t, M)$  が失う量なので

$$p(t, K, M) = \gamma(t, M) q(K, M) w(t, M) \quad (8)$$

となる。一方  $C(A, B)$  における単位時間当たりの減少量に対しては

$$\begin{aligned} \int_A^B \gamma(t, M) w(t, M) dM &= \int_A^B \int_0^M p(t, K, M) dK dM \\ &= \int_A^B \int_0^M \gamma(t, M) q(K, M) w(t, M) dK dM \\ &= \int_A^B \left( \int_0^M q(K, M) dK \right) \gamma(t, M) w(t, M) dM \end{aligned}$$

より,

$$\int_A^B \left( 1 - \int_0^M q(K, M) dK \right) \gamma(t, M) w(t, M) dM = 0$$

となる。この式が任意の区間  $[A, B]$  に対して成り立つので

$$\int_0^M q(K, M) dK = 1 \quad (9)$$

となる。式 (8) を式 (7) に代入することによって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, M) &= - \int_0^M \gamma(t, M) q(K, M) w(t, M) dK \\ &\quad + \int_M^\infty \gamma(t, K) q(M, K) w(t, K) dK \\ &= - \left( \int_0^M q(K, M) dK \right) \gamma(t, M) w(t, M) \\ &\quad + \int_M^\infty \gamma(t, K) q(M, K) w(t, K) dK \end{aligned}$$

となり, 式 (9) により次の式が導かれる [13]。

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\gamma(t, M) w + \int_M^\infty \gamma(t, K) q(M, K) w(t, K) dK \quad (10)$$

PVA 酵素分解に対して提案されたモデル [2, 3, 9, 11] は, Endogenous 解重合モデル (10) の特別なケースである。

初期の重量分布が関数  $f(M)$  で与えられている場合, 式 (10) は初期条件

$$w(0, M) = f(M) \quad (11)$$

とともに初期値問題を構成する。一方, 初期条件に加え, ある一定時間  $T$  経過後の重量分布が関数  $g(M)$  で与えられている場合, 初期値問題 (10), (11) の解が条件

$$w(T, M) = g(M) \quad (12)$$

も満たすための分解率  $\gamma(t, M)$  を解とする逆問題が提起される。

温度や酵素量あるいは微生物の個体数のようなポリマー解重合に関与する要因は, 分子の大きさには依存せず, ポリマー分布域全体に一様に作用すると考えられる。その場合, 分解率  $\gamma(t, M)$  は時間の関数  $\sigma(t)$  と分子量の関数  $\lambda(M)$  の積として,

$$\gamma(t, M) = \sigma(t) \lambda(M) \quad (13)$$

で表される。このとき

$$\tau = \int_0^t \sigma(s) ds, \quad W(\tau, M) = w(t, M)$$

とおくと，式 (10) は

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\lambda(M) W + \int_M^\infty \lambda(K) q(M, K) W(\tau, K) dK \quad (14)$$

となる [12, 13]。

初期値問題 (10), (11) に対し，式 (14) も初期条件

$$W(0, M) = f(M) \quad (15)$$

とともに初期値問題を構成する。一方初期条件 (11) に加え，条件 (12) も与えられたとき，初期値問題 (14), (15) の解が条件

$$W(\mathcal{T}, M) = g(M) \quad (16)$$

も満たすための分解率  $\lambda(M)$  を解とする逆問題が提起される。ただし

$$\mathcal{T} = \int_0^T \sigma(s) ds$$

とする。

移動率  $q(K, M)$  は関数  $c(K)$  と  $d(M)$  の積として

$$q(K, M) = c(K) d(M)$$

で表されるとすると，式 (14) は

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\lambda(M) W + c(M) \int_M^\infty \lambda(K) d(K) W(\tau, K) dK \quad (17)$$

となる。また，式 (9) は

$$d(M) \int_0^M c(K) dK = 1$$

となる。特に

$$c(K) = 2K, \quad d(M) = \frac{1}{M^2}$$

とすると，式 (17) は分子量位  $M$  を持つ分子が分解されたとき生じる分子の数が区間  $[0, M]$  に一様に分布するとの仮定のもとで導かれた式

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\lambda(M) W + \int_M^\infty \frac{2M}{K^2} \lambda(K) W(\tau, K) dK \quad (18)$$

に帰着する [2, 3, 9, 11]。また，

$$c(K) = 1, \quad d(M) = \frac{1}{M} \quad (19)$$

とすると，式 (17) は分子量位  $M$  を持つ分子が分解されたとき生じる分子の重量が区間  $[0, M]$  に一様に分布するとの仮定のもとで導かれたものに帰着する [12, 13]。更に，

$$c(K) = \frac{3}{2}K^{1/2}, \quad d(M) = \frac{1}{M^{3/2}} \quad (20)$$

とした解析も行われた [13]。

式 (17) の両辺を  $M$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau \partial M} &= -\frac{\partial}{\partial M} [\lambda(M) W] + c'(M) \int_M^\infty \lambda(K) d(K) W(\tau, K) dK \\ &\quad - c(M) \lambda(M) d(M) W \\ &= -\frac{\partial}{\partial M} [\lambda(M) W] + \frac{c'(M)}{c(M)} \left[ \frac{\partial W}{\partial \tau} + \lambda(M) W \right] \\ &\quad - c(M) \lambda(M) d(M) W \end{aligned}$$

となり，偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial M} \left[ \frac{\partial W}{\partial \tau} + \lambda(M) W \right] = \frac{c'(M)}{c(M)} \left[ \frac{\partial W}{\partial \tau} + \lambda(M) W \right] - c(M) \lambda(M) d(M) W \quad (21)$$

が導かれる。

式 (17) が偏微分方程式 (21) に変換されることにより，初期値問題 (18)，(15) の解が条件 (16) を満たすような分解率  $\lambda(M)$  を解とする逆問題を数値的に解く方法 [9] が，初期値問題 (17)，(15) の解が条件 (16) を満たすような分解率  $\lambda(M)$  を解とする逆問題にも適用可能となった。その結果  $c(K)$  と  $d(M)$  が式 (19) で与えられた場合 [12] と式 (20) で与えられた場合 [13] の分解率  $\lambda(M)$  が求められた。また  $\sigma(t)$  は指数関数であるとの仮定のもと，実験結果からパラメータが求められ， $\gamma(t, M)$  が式 (13) で与えられる場合，初期値問題 (10)，(11) を数値的に解くことによるシミュレーションの結果も示された [12, 13]。シミュレーションの結果と実験結果の比較から，endogenous 解重合モデルは分解率が時間に依存するプロセスにも適用が可能であることが示された [14]。

## 参考文献

- [1] Fusako Kawai, Masaji Watanabe, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, Experimental analysis and numerical simulation for biodegradability of polyethylene, *Polymer Degradation and Stability* **76** (2002) 129-135.
- [2] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Numerical Simulation for Enzymatic Degradation of Poly(vinyl Alcohol), *Polymer Degradation and Stability*, **81** (2003) 393-399.

- [3] 渡辺雅二・河合富佐子, 実験結果と数値シミュレーションによるポリマー生分解性解析, 環境制御, 第 25 号 (2003) 25-32 (Masaji Watanabe and Fusako Kawai, Analysis of polymeric biodegradability based on experimental results and numerical simulation, *Environmental Research and Control* **25** (2003), 25-32).
- [4] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, Computational method for analysis of polyethylene biodegradation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **161** (2003) 133-144.
- [5] Fusako Kawai, Masaji Watanabe, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, Shizue Hayashi, Comparative study on biodegradability of polyethylene wax by bacteria and fungi, *Polymer Degradation and Stability* **86** (2004), 105-114.
- [6] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Masaru Shibata, Shigeo Yokoyama, Yasuhiro Sudate, Shizue Hayashi, Analytical and computational techniques for exogenous depolymerization of xenobiotic polymers, *Mathematical Biosciences* **192** (2004) 19-37.
- [7] 渡辺雅二・河合富佐子, 数値シミュレーションによるポリエチレングリコール生分解性解析, 環境制御, 第 26 号 (2004) 17-22 (Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Analysis of biodegradability for polyethylene glycol via numerical simulation, *Environmental Research and Control* 26 (2004) 17-22).
- [8] Masaji Watanabe, Fusako Kawai, Numerical simulation of microbial depolymerization process of exogenous type, Proceedings of the 2004 International Conference on Computational Techniques and Applications, Melbourne, Australia in September 2004, Scientific Editor: Rob May, Electronic Editor: A. J. Roberts, *ANZIAM J.* **46**(E) pp.C1188–C1204, 2005.
- [9] M. Watanabe, F. Kawai, Mathematical modelling and computational analysis of enzymatic degradation of xenobiotic polymers, *Applied Mathematical Modelling* 30 (2006) 1497-1514.
- [10] M. Watanabe, F. Kawai, Mathematical study of the biodegradation of xenobiotic polymers with experimental data introduced into analysis, Proceedings of the 7th Biennial Engineering Mathematics and Applications Conference, EMAC-2005, Melbourne, Editors: Andrew Stacey and Bill Blyth and John Shepherd and A. J. Roberts, *ANZIAM J.* 47 pp.C665–C681, 2007. (<http://anziamj.austms.org.au/V47EMAC2005/Watanabe>)

- [11] M. Watanabe, F. Kawai, S. Tsuboi, S. Nakatsu, H. and Ohara, Study on enzymatic hydrolysis of polylactic acid by endogenous depolymerization model, *Macromolecular Theory and Simulations* **16** (2007) 619-626. doi: 10.1002/mats.200700015.
- [12] M. Watanabe, F. Kawai, Modeling and analysis of biodegradation of xenobiotic polymers based on experimental results, Editors: Geoffrey N. Mercer and A. J. Roberts, *ANZIAM J.* 49 (EMAC-2007) pp.C457–C474, 2008. (<http://anziamj.austms.org.au/ojs/index.php/ANZIAM/article/view/361>)
- [13] M. Watanabe, F. Kawai, Mathematical modeling and numerical study of biodegradation of xenobiotic polymers with experimental data, Submitted.
- [14] 渡辺雅二, 河合富佐子, バイオプロセスによる合成ポリマー分解のモデルとシミュレーションについて, 平成19年度統計数理研究所共同研究集会「環境データ解析の方法と実際」(2007年12月25日, 26日)報告集, 投稿中。



# 直線3体問題の記号化とSchubart軌道

柴山允瑠 (京都大学)

## 1 はじめに

$\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$  上の3個の質点のNewton的な引力の相互作用による運動を調べる3体問題

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} \frac{m_j (q_i - q_j)}{|q_i - q_j|^3} \quad (q_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

について考える. ここで,  $m_i \geq 0$  は質点の質量 ( $m_i$  は質点の質量を表すと同時に, 文章の中では質点自体を表す場合にも用いる),  $q_i \in \mathbb{R}^d$  は質点の位置である.

3体問題は長い歴史をもつ有名な問題である. Newtonが2体問題を解き, Laplaceから3体問題の本格的な研究が始まった. それから, 20世紀初頭まで3体問題の研究は微分方程式の研究の中でかなり大きな部分を占めていた. その後, BrunsやPoincaréが3体問題がある意味では解けないこと (知られてる第一積分以外の第一積分が存在しないこと, つまり新たな第一積分を見つけることによって解くことは不可能であること) を証明し, また相対性理論などの新たな理論が現れたこともあって3体問題は数学の王道ではなくなってしまった. しかし, その後も3体問題の研究の中でホモクリニック軌道が発見されたり, KAM理論の確立の原動力となったり (太陽系の安定性の証明のため), 数学 (とくに力学系) に大きな影響を与え続けている. 近年も (3体問題ではないが) 5体問題に非衝突特異性 (衝突をしないにもかかわらず, 有限時間にしか存在しないという性質) をもつ解の存在が証明されたり ([11]), 3体問題に8の字解 (図1) という周期解の存在が証明されたり ([1]) と様々な注目すべき結果が出されており,  $n$ 体問題の研究は今後も数学に大きな影響を与えることが期待される.

最近私は, 3体問題をより易しい部分力学系から解明していこうという方向性で研究している. 部分力学系の例として直線3体問題 ( $d = 1$ ) があるが, 3体問題は直線に制限してもなお難しい. 谷川氏や斉藤氏による数値実験結果 ([5, 6]) を見ていただけると直線3体問題の複雑さを認識してもらえと思う. 今回は直線3体問題について数学的に研究した中で導かれたいくつかの結果についてのべる.

## 2 直線3体問題の記号化

直線3体問題の軌道は必ず衝突し, 衝突で終わるとするととその振る舞いは単純なものになってしまう. また, 直線3体問題は平面 (あるいは空間) 3体問題の部分力学

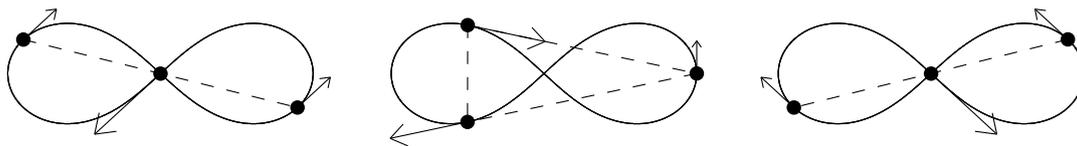


図 1: 8 の字解

等質量の平面 3 体問題においてこのような 8 の字の形をした曲線上を互いに追跡するように振る舞う周期軌道の存在が証明された。

系であり、今後直線 3 体問題における結果を拡張する為には衝突の後も接続されるとして定式化することが必要である。2 体衝突した場合は同じエネルギーを持ってはね返り、解はその後も接続されるものとみなす。この正則化は Levi-Civita や Sundman らによって数学的に保証されている (つまり、適当な変数変換によって 2 体衝突特異点は解消され、微分方程式は特異点であった部分にまで拡張され、解は滑らかに接続される)。

質点は常に  $x$  軸の負の方から  $m_1, m_2, m_3$  の順で並んでいるとする (2 体衝突しても順は保たれる)。  $m_1$  と  $m_2$  が衝突したとき 1,  $m_2$  と  $m_3$  が衝突したとき 3, 3 体衝突したとき 2 と記号を付ける。記号列  $\underbrace{11\dots 1}_l$  などは  $1^l$  と書く。質量のなす空間の中で allowable という性質を満たす質量全体を  $\mathcal{M} \subset (\mathbb{R}_{>0})^3$  とおく。  $\mathcal{M}$  は空ではない。 allowable に関しては次節で説明する。各  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{M}$  に対し、3 体近衝突する軌道の振る舞いを特徴づける自然数  $l_{\mathbf{m}} \geq 2$  が存在する。この  $l_{\mathbf{m}}$  に対して長さ  $l_{\mathbf{m}}$  または  $l_{\mathbf{m}} - 1$  の 1 と 3 の交互列が 4 通りとれるが、その集合を  $\text{Alt}_{l_{\mathbf{m}}}$  とおく:

$$\text{Alt}_{l_{\mathbf{m}}} = \left\{ \underbrace{1313\dots 13}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}}, \underbrace{1313\dots 31}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}}, \underbrace{3131\dots 13}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}}, \underbrace{3131\dots 31}_{l_{\mathbf{m}}-1 \text{ or } l_{\mathbf{m}}} \right\}$$

数列  $2 \leq a_n \leq \infty, b_n = 1, 2, 3 (n \in \mathbb{Z})$  に対して次のような記号列を考える:

$$\dots c_{k-1} (b_k)^{a_k} c_k (b_{k+1})^{a_{k+1}} c_{k+1} \dots \quad (2)$$

ここで、  $c_k \in \text{Alt}_{l_{\mathbf{m}}}$  で  $c_k$  の最初の記号が  $b_k$  でなく最後の記号が  $b_{k+1}$  でないものとして定める。  $a_n = \infty$  や  $b_n = 2$  とした場合はその後 (またはその前) の記号列はないとする。

定理 1. (2) の形をした任意の記号列に対して、それに対応する直線 3 体問題の軌道が存在する。

すなわち、  $m_2$  は  $m_{b_k}$  と連続してちょうど  $a_k$  回の衝突をする。その後  $m_2$  は  $m_1, m_3$  と交互に  $l_{\mathbf{m}}$  または  $l_{\mathbf{m}} - 1$  回衝突した後  $m_{b_{k+1}}$  と  $a_{k+1}$  回の衝突をする。この同様の振る舞いを過去にも未来にもおいて繰り返す。

この結果を応用することで、新たな振動解や周期解の存在が言える。振動解は Chazy が 3 体問題の軌道の分類問題を研究した中で定義され、非有界な軌道で複雑な振る舞いをする軌道として知られている:

定義 1. 3 体問題 (1) の解  $q$  は

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{i < j} \|q_i - q_j\| &= \infty \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \max_{i < j} \|q_i - q_j\| &< \infty\end{aligned}$$

を満たすとき, 振動解という.

系 1. 定理 1 において特に  $a_n \neq \infty (\forall n \in \mathbb{N})$  で  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が非有界となるようにとると, 対応する解は未来において振動的な解となる. 同様に過去において振動的な解や, 未来にも過去にも振動的な解が得られる.

この系を示す為には  $a_n$  が非有界でも軌道が有界になるような解が存在しないことを示さなければならないが, それはエネルギー保存性を用いることで容易に導かれる.

定理 2. 定理 1 において, ある  $L \geq 1$  に対して  $a_k = a_{k+L} = a_{-k}, b_k = b_{k+L} = b_{-k} (\forall k \in \mathbb{Z})$  が成り立つようにとると, その記号列を実現する周期解が存在する.

注意 1. [10] では定理 1 のような記号による完全な特徴付けはしていないが, 数列を片側無限列にしたようなものを証明しており, 定理 1 はそれを両側無限列に関しても成り立つように拡張したものである. 実は [10] の証明には欠陥があり, 今回の証明はその改良にもなっている. また, [10] の議論からは定理 2 のような周期軌道の存在は分からない.

次の節でこれらの証明を行う.

## 3 定理 1, 2 の証明

### 3.1 McGehee による結果

McGehee([3]) は 3 体衝突を Blow-up する手法を開発し, それによって 3 体近衝突をする軌道の振る舞いも分かってきた. McGehee の方法は次のような段階を踏む.

1.  $r := \sum_{i=1,2,3} m_i |q_i|^2 \rightarrow 0$  を blow-up する.
2. 時間を変換し, 衝突に至るまでの時間を無限にする.
3. 2 体衝突を blow-up する.

すると 3 体衝突特異点  $r = 0$  は衝突多様体とよばれる 2 次元多様体  $M (\cong S^2 - \{4\text{pts}\})$  になる. 衝突多様体  $M$  上に 2 つの平衡点  $C, D$  がある.  $D$  は 3 体衝突から始まる状況に対応する平衡点であり,  $C$  は 3 体衝突で終わる平衡点である. 衝突多様体には  $D$  から二つの腕に分かれる.  $C, D$  は双曲的な平衡点であり, 衝突多様体におけるその安定多様体と不安定多様体は共に 1 次元である. 衝突多様体上の flow は gradient-like ( $v' \geq 0$ ) であり,  $C$  の不安定多様体の 2 つの分岐  $\beta_+, \beta_-$  は  $D$  に収束するかどち

らかの腕を上っていく. 衝突多様体上の flow は質量  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  によるが不安定多様体的一方が2体衝突を交互に  $l_m$  回経た後腕を上り, もう一方も2体衝突を交互に  $l_m$  回経た後もう一方の腕を上るような質量を allowable とよぶ(図2). それを満たす質量全体を  $\mathcal{M}$  とする.  $\mathcal{M}$  は空ではないことが数学的に示されており, 数値計算によると質量全体の多くの部分を占めていることが分かる. McGehee によって次

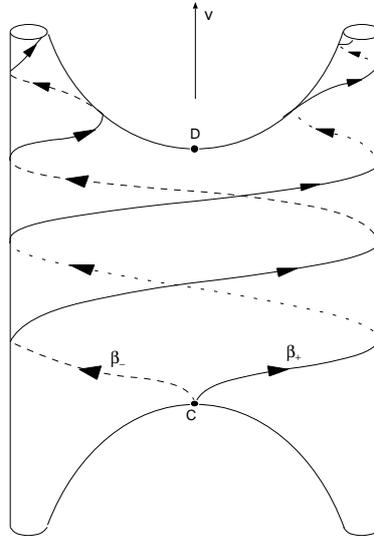


図 2: 衝突多様体 ( $l_m = 2$ )

のことが分かっている.

命題 1.  $(\bar{q}, \bar{p})$  を3体衝突を起こす初期値とする.  $\gamma(\alpha) (-\varepsilon < \alpha < \varepsilon)$  を  $\gamma(0) = (\bar{q}, \bar{p})$  となる曲線とし,  $\alpha > 0$  のときには,  $\gamma(\alpha)$  を初期値とする軌道は  $m_2$  と  $m_1$  が衝突する前に  $m_3$  と  $m_2$  が衝突する軌道となり,  $\alpha < 0$  のときには,  $\gamma(\alpha)$  を初期値とする軌道は  $m_2$  と  $m_1$  が衝突する後に  $m_3$  と  $m_2$  が衝突する軌道であるとする. このとき,  $\alpha > 0$  のとき対応する軌道は  $m_2$  が  $m_1, m_3$  と交互に  $l$  回衝突した後,  $m_1$  (あるいは  $m_3$ ) が大きな速度をもって離れていく. とくに, その速度は  $\alpha \rightarrow +0$  のとき無限大に発散する. また,  $\alpha < 0$  のとき対応する軌道は  $m_2$  が  $m_1, m_3$  と交互に  $l$  回衝突した後,  $m_3$  (あるいは  $m_1$ ) が大きな速度をもって離れていき, その速度は  $\alpha \rightarrow -0$  のとき無限大に発散する.

厳密には  $C > 0$  を固定したとき  $r^2 = \sum m_i q_i^2 = C$  となったときの速度  $|\dot{q}_1|$  (または  $|\dot{q}_3|$ ) が  $s \rightarrow +0$  のとき  $\infty$  に発散する.

つまり  $\alpha > 0$  が十分小さければ, 記号列  $c1^\infty$  (あるいは  $c3^\infty$ ) ( $c \in \text{Alt}_{l_m}$ ) に対応する軌道が得られ,  $\alpha < 0$  が十分0に近ければ記号列  $c3^\infty$  (あるいは  $c1^\infty$ ) ( $c \in \text{Alt}_{l_m}$ ) に対応する軌道が得られる.

### 3.2 2体衝突の正則化

$m_1$  と  $m_2$ ,  $m_2$  と  $m_3$  の2体衝突は正則化可能であり, 2体衝突の後も軌道は接続されるものとみなすが, ここでは  $m_1$  と  $m_2$  の2体衝突だけを正則化した座標をとり軌

道の振る舞いを調べる.

方程式 (1) はハミルトニアン

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m_i} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|} \quad (3)$$

に関するハミルトン方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

として表すことができる.

質点は常に  $q_1 \leq q_2 \leq q_3$  の順になっているとする. ハミルトニアンは絶対値を除くことができ

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{m_1 m_2}{q_2 - q_1} - \frac{m_1 m_3}{q_3 - q_1} - \frac{m_2 m_3}{q_2 - q_3}$$

となる. このハミルトニアンに次の Jacobi 変換と呼ばれる正準変換を行う:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\mu_3}(m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3) \\ u_2 &= q_2 - q_1 \\ u_3 &= q_3 - \frac{1}{\mu_2}(m_1 q_1 + m_2 q_2) \\ v_1 &= p_1 + p_2 + p_3 \\ v_2 &= \frac{1}{\mu_2}(m_1 p_2 - m_2 p_1) \\ v_3 &= \frac{1}{\mu_3}\{\mu_2 p_3 - m_3(p_1 + p_2)\} \end{aligned}$$

ここで,  $\mu_k = \sum_{i=1}^k m_i$  である.  $M_k = \frac{m_k \mu_{k-1}}{\mu_k}$ ,  $\alpha_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\alpha_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$  とおき, ハミルトニアン (3) を Jacobi 変換すると,

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{v_1^2}{2\mu_3} + \frac{v_2^2}{2M_2} + \frac{v_3^2}{2M_3} - \frac{m_1 m_2}{u_2} - \frac{m_1 m_3}{u_3 + \alpha_0 u_2} - \frac{m_2 m_3}{u_3 - \alpha_1 u_2}$$

$u_1$  が現れないので (循環座標),  $u_2, u_3, v_2, v_3$  に関する方程式と考えてよい. 一般性を失わないので  $v_1 = 0$  とする.

注意 2. 直線 3 体問題では Jacobi 変換のありがたみはあまり感じられないかもしれないが, Jacobi 変換は平面や空間の場合でもそのまま適用できて, 角運動量の形や慣性モーメントの形を変えないまま ( $\sum q_i \times p_i = \sum u_i \times v_i$ ,  $\sum m_i |q_i|^2 = \sum M_i |u_i|^2$ ) 重心と全運動量の成分を除くことができる便利な座標である. Jacobi 座標は 4 体以上にも適用できる. 今回は 2 体衝突 ( $u_2 = q_1 - q_2 \rightarrow 0$ ) を正則化しやすいように, この座標を用いた.

ここで,  $u_2 = q_2 - q_1$  であるから,  $u_2 = 0$  は  $m_1$  と  $m_2$  の 2 体衝突を表す. この 2 体衝突を正則化しよう. 母関数  $S = v_2 U_2^2 + v_3 U_3$  によって生成される正準変換をする:

$$\begin{aligned} U_2 &= \sqrt{u_2} \\ U_3 &= u_3 \\ V_2 &= 2\sqrt{u_2}v_2 \\ V_3 &= v_3 \end{aligned}$$

するとハミルトン方程式は,

$$H(U_2, U_3, V_2, V_3) = \frac{V_2^2}{8M_2 U_2^2} + \frac{V_3^2}{2M_3} - \frac{m_1 m_2}{U_2^2} - \frac{m_1 m_3}{U_3 + \alpha_0 U_2^2} - \frac{m_2 m_3}{U_3 - \alpha_1 U_2^2}$$

となる. ここで, 方程式を書いてみると

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{V_2}{4M_2 U_2^2} \\ \dot{U}_3 &= \frac{V_3}{M_3} \\ \dot{V}_2 &= \frac{V_2^2}{4M_2 U_2^3} - \frac{2m_1 m_2}{U_2^3} - \frac{2m_1 m_3 \alpha_0 U_2}{(U_3 + \alpha_0 U_2^2)^2} + \frac{2m_2 m_3 \alpha_1 U_2}{(U_3 - \alpha_1 U_2^2)^2} \\ \dot{V}_3 &= -\frac{m_1 m_3}{(U_3 + \alpha_0 U_2^2)^2} - \frac{m_2 m_3}{(U_3 - \alpha_1 U_2^2)^2} \end{aligned}$$

となる. この第 3 式を  $H = E$  (定数) を使って書き換えると,

$$\dot{V}_2 = \frac{2}{U_2} \left( E - \frac{V_3^2}{2M_3} + \frac{m_1 m_3}{U_3 + \alpha_0 U_2^2} + \frac{m_2 m_3}{U_3 - \alpha_1 U_2^2} \right) - \frac{2m_1 m_3 \alpha_0 U_2}{(U_3 + \alpha_0 U_2^2)^2} + \frac{2m_2 m_3 \alpha_1 U_2}{(U_3 - \alpha_1 U_2^2)^2}$$

さらに時間を  $dt = U_2^2 d\tau$  によって変換すると ( $\frac{d}{dt} = 'とかく$ ),

$$\begin{aligned} U_2' &= \frac{V_2}{4M_2} \\ U_3' &= \frac{V_3 U_2^2}{M_3} \\ V_2' &= 2U_2 \left( E - \frac{V_3^2}{2M_3} + \frac{m_1 m_3}{U_3 + \alpha_0 U_2^2} + \frac{m_2 m_3}{U_3 - \alpha_1 U_2^2} \right) - \frac{2m_1 m_3 \alpha_0 U_2^3}{(U_3 + \alpha_0 U_2^2)^2} + \frac{2m_2 m_3 \alpha_1 U_2^3}{(U_3 - \alpha_1 U_2^2)^2} \\ V_3' &= -\frac{m_1 m_3 U_2^3}{(U_3 + \alpha_0 U_2^2)^2} - \frac{m_2 m_3 U_2^3}{(U_3 - \alpha_1 U_2^2)^2} \end{aligned}$$

となり 2 体衝突特異点が正則化された. ここで, もとの方程式の軌道との対応を考えるとときは  $(U_2, U_3, V_2, V_3)$  と  $(-U_2, U_3, -V_2, V_3)$  を同一視しなければならない.

注意 3. この新たな方程式もハミルトン方程式で (一応) かける. そのハミルトニアンは,

$$\Gamma(U_2, U_3, V_2, V_3) = \frac{V_2^2}{8M_2} + \frac{V_3^2 U_2^2}{2M_3} - m_1 m_2 - \frac{m_1 m_3 U_2^2}{U_3 + \alpha_0 U_2^2} - \frac{m_2 m_3 U_2^2}{U_3 - \alpha_1 U_2^2} - E U_2^2$$

である. ただし,  $H = E$  でなくてはならないので, 軌道は  $\Gamma = 0$  のものでなくてはならない.

### 3.3 Poincaré 面

横断面  $V_3 = 0$  (すなわち,  $p_3 = 0$ ) を考える.  $H = E < 0$  と固定し,  $(U_3, V_2)$  をこの横断面の座標としたい.  $V_3 = 0, H = E$  より

$$\frac{V_2^2}{8M_2} - m_1m_2 - \frac{m_1m_3U_2^2}{U_3 + \alpha_0U_2^2} - \frac{m_2m_3U_2^2}{U_3 - \alpha_1U_2^2} - EU_2^2 = 0 \quad (4)$$

$\frac{V_2^2}{8M_2} - m_1m_2 \leq 0$  で (4) を満たす  $U_2$  が存在する  $(U_3, V_2)$  全体のなす領域  $\Sigma_3$  を考える. その領域の境界上では対応する  $U_2$  はただ 1 つであるが, それ以外は 2 つあり, その小さい方で  $U_2$  を決定する.

以上の議論を  $m_1$  と  $m_3$  を入れ替えて展開し, 横断面  $\Sigma_1$  が同様に定義される.

$N : \Sigma_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を  $(U_3, V_2) \in \Sigma_3$  を初期値とする軌道において  $q_3$  が最初に  $q_2$  と衝突するまでに  $q_1$  と  $q_2$  が衝突する回数とする.  $M : \Sigma_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を  $(U_3, V_2) \in \Sigma_3$  を初期値とする軌道においてその過去における振る舞い  $q(-t)$  を考えたとき,  $q_3$  が最初に  $q_2$  と衝突するまでに  $q_1$  と  $q_2$  が衝突する回数とする.

$N$  が次の性質を持つことは明らかである.

命題 2. (i)  $V_2$  を固定すると,  $U_3 \rightarrow \infty$  のとき  $N(U_3, V_2) \rightarrow \infty$ .

(ii)  $V_2 \neq \pm 2\sqrt{2M_2m_1m_2}$  なら  $N$  の不連続点  $(U_3, V_2)$  に対応する軌道は 3 体衝突する. また,  $N(U_3, \pm 2\sqrt{2M_2m_1m_2})$  の不連続点  $(U_3, \pm 2\sqrt{2M_2m_1m_2})$  に対応する軌道は 3 体衝突する.

(iii)  $M(U_3, V_2) = N(U_3, -V_2)$

(iii) は 3 体問題が Time reversible ( $q(t)$  が解なら  $q(-t)$  も解) であることからわかる. このことから  $\Sigma_3$  は  $N$  と  $M$  の不連続点によってタイル状に分割される.  $N$  と  $M$  の不連続点によって区切られたタイルは連星の連続して起こる回数で特徴付けられる.  $N + M = k$  によって定まるタイル (すなわち, 連星が連続して  $k$  回衝突する領域) を  $A_{k3}$  とおく.  $\Sigma_1$  も同様にタイル分割し, 各タイルを  $A_{k1}$  とする (図 3).  $\Sigma = \bigcup_{k \geq 2, j=1,3} A_{kj}$  を Poincaré 面とする.

### 3.4 Poincaré 写像

Poincaré 写像  $\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  を再び  $\Sigma$  を通ったときの点として定める.

$\beta : [0, 1] \rightarrow A_{k3}$  を  $A_{k3}$  の対辺 ( $N$  の不連続点) を結ぶ曲線とし,  $N(\beta_0) = k, N(\beta_1) = k + 1$  とする.  $0 < s < \epsilon$  のとき  $\beta_s$  を初期値とする解は  $m_1$  と  $m_2$  が衝突した直後に  $m_2$  と  $m_3$  が衝突する. したがって, McGehee の結果よりその後  $m_2$  が  $m_1, m_3$  と交互に  $l$  回衝突した後  $m_1$  (あるいは  $m_3$ ) が高速で飛び出し,  $s$  が十分小さければ双曲運動となる. すなわち記号列としては  $1^k \underbrace{313 \dots 13}_{l-1} 1^\infty$  (または  $1^k \underbrace{313 \dots 1}_{l-1} 3^\infty$ ) となる. 一方,  $1 - \epsilon < s < 1$  の場合, 解は  $m_1$  と  $m_2$  が衝突した直前に  $m_2$  と  $m_3$  が衝突し,  $m_2$  が  $m_1, m_3$  と交互に  $l - 1$  回衝突した後  $m_3$  (あるいは  $m_1$ ) が高速で飛び出す. 記号列は

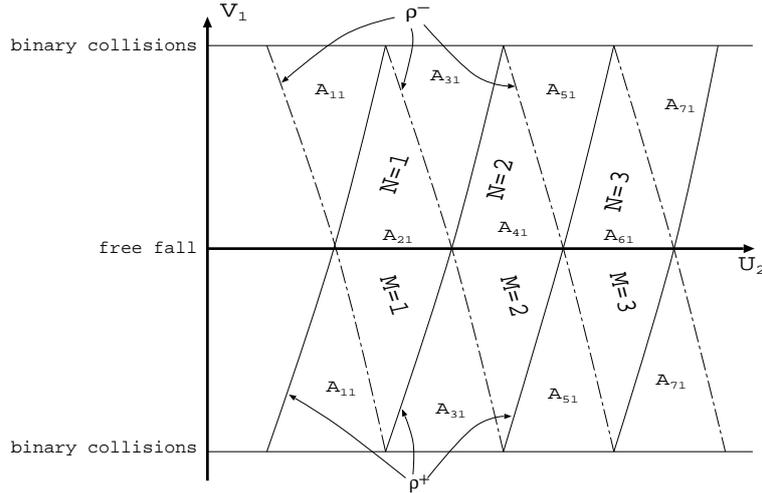


図 3: タイリング

$1^k \underbrace{313\dots 13}^l \infty$  (または  $1^k \underbrace{313\dots 13}^l 1^\infty$ ) となる. 従って,  $\beta_s$  は  $s$  が 0 から 1 まで変化する間に, 対応する軌道は  $m_1$  が無限に発散する双曲運動から  $m_3$  が無限に発散する双曲運動へと変化する. その間の变化を考えよう. 簡単のため  $l$  が偶数の場合に限って議論する. 奇数の場合も同様にできる. 最初の  $k+l+1$  個の記号は  $0 < s < \varepsilon$  では  $1^k \underbrace{3131\dots 31}^l 1$  で,  $1 - \varepsilon < s < 1$  では  $1^k \underbrace{3131\dots 31}^l 3$  である. 初めて最初の  $k+l+1$  個の記号が変化する  $s$  を  $s_0$  とするとその記号列は 2 (つまり 3 体衝突) を含む. すなわち,  $1^k \underbrace{3131\dots 2}^m$  ( $l \leq m$ ). すると  $s_0 - \varepsilon < s < s_0$  に対応する軌道は  $1^k \underbrace{3131\dots 13}^{l+m} 1^\infty$  または  $1^k \underbrace{3131\dots 31}^{l+m} 3^\infty$  に対応する軌道となる.  $0 < s < s_0$  に対して  $\tau(s)$  を  $\beta_s$  を初期値とする軌道が交互衝突を始めて  $l-1$  回目の 2 体衝突する時間とする.  $\tau(s)$  は連続であり,  $\dot{q}_3 \rightarrow \infty (s \rightarrow 0)$  で  $s_0$  に近いとき  $m_1$  と  $m_2$  がもう一度衝突する前に  $m_2$  と  $m_3$  が衝突する程度である.  $s_0$  から  $s$  を減少させていくと対応する軌道は再び  $m_2$  と  $m_3$  の衝突を起こすので, その途中で必ず  $\dot{q}_3 = 0$  となり,  $\Sigma$  と交わる. 先ほどの考察から  $s$  を小さくしていくと交わる点は  $U_3 \rightarrow \infty$  となる.

連続性より  $\beta_s$  の像は  $A_{k1(3)}$  ( $k \geq 2$ ) をすべて通過する. すると, Poincaré 写像の像は  $\Sigma$  上の曲線  $\gamma$  を成す.

また,  $\gamma$  は過去において  $\beta$  であったものであるから, 直前に 3 体衝突をしていない. 従って,  $M$  の  $V_2 = \pm 2\sqrt{2M_2 m_1 m_2}$  以外の不連続点を通ってはならない. このことから,  $N$  の不連続点を可算個通過していくことが分かる.

### 3.5 定理 1 の証明

$A_{kj}$  の Poincaré 写像の像は全てのタイルを横断的に横切る. その考察から, 任意の記号列に対する軌道の存在が言える. すなわち,  $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \Phi^{-n}(A_{a_n b_n})$  は空でなく, その

点が求める軌道の初期値である.

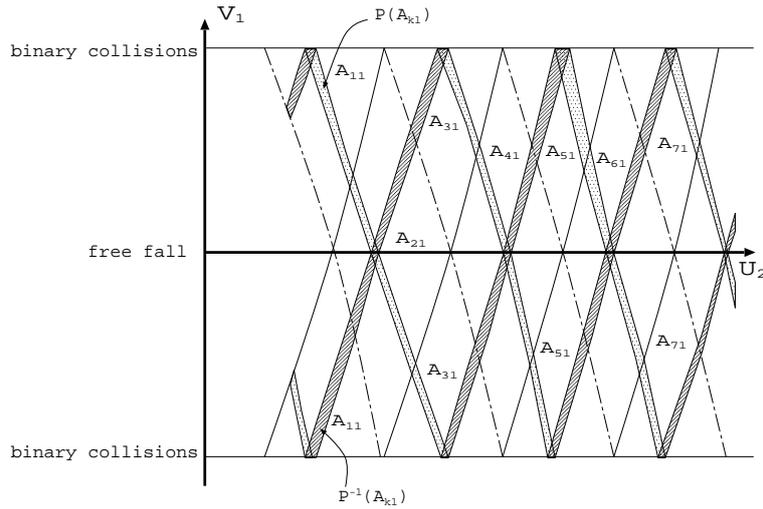


図 4: Poincaré 写像による像

### 3.6 周期解の存在 (定理 2 の証明)

$l_{a_L b_L}$  を  $L$  が偶数のときは  $A_{a_L b_L}$  と  $U_3$  軸との共通部分,  $L$  が奇数のときは  $A_{a_L b_L}$  と 2 体衝突直線との共通部分とする. ここで,  $\bigcap_{n=0}^L \Phi^{-n}(A_{a_n b_n}) \cap \Phi^{-L}(l_{a_L b_L}) \cap l_{a_0 b_0}$  とする. これは  $A_{a_0 b_0}$  を横切る曲線で  $U_3$  軸, あるいは 2 体衝突直線と交わる. その交点を初期値とする軌道を考えて, free-fall から始まり,  $A_{a_n b_n}$  を順に通過し,  $A_{a_L b_L}$  で free-fall となる. するとその後その軌道はそれまでの振る舞いを逆にたどり, もとの初期値に戻る. すなわち, 求める周期解となる.

## 4 Schubart 軌道

以上の結果からは導くことができない軌道が存在している. 例えば Schubart 軌道というものがある. Schubart 軌道とは 2 種類の 2 体衝突を交互に繰り返す周期軌道である (図 4). Schubart 軌道は記号列で表すと  $(13)^\infty$  であるが, この記号列は (2) の形をしていないので定理 1 は適用できない.

Schubart は 1950 年代にこの軌道を数値的に見つけ ([7]), 近年 Moeckel が  $m_1 = m_3$  の場合にその存在を数学的に示した ([4]). 変分法を用いることにより, その結果を任意の質量にまで拡張できた:

定理 3 ([9]). 任意の質量に対して, Schubart 軌道が存在する.

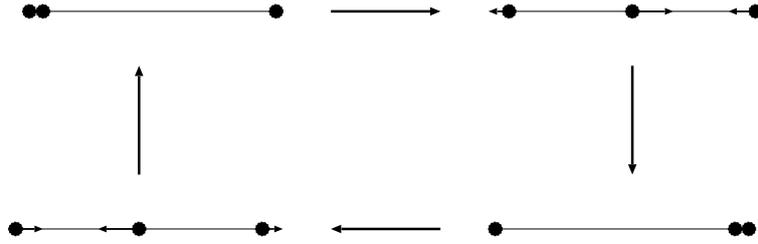


図 5: Schubart 軌道

## 5 定理 3 の証明

3 体問題 (1) は Lagrangian

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{x}_i\|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}$$

に関する Euler-Lagrange 方程式として表され, 作用積分

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt$$

に関する変分問題として定式化できる.

命題 3. 適当に座標  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  をとることによって

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{M_1}{|y|} + \frac{M_2}{|cx - y|} + f(x, y) \quad (5)$$

と表すことができる<sup>1</sup>. ここで,  $c > 0$  は定数,  $f(x, y)$  は  $-1$  次の同次式で  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < cx\}$  上で定義される連続関数である.

$\mathcal{A}$  の定義域は Sobolev 空間とする:

$$H^1 = \{(x, y) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq cx, x \in L^2, \dot{x} \in L^2\}.$$

$B_1$  と  $B_2$  を次のようにして定義される衝突配置の集合とする:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\} \\ B_2 &= \{(x, cx) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\} \end{aligned}$$

$t = 0$  で  $B_1$ ,  $t = 1$  で  $B_2$  に属するような曲線全体を  $\Omega$  と書く:

$$\Omega = \{\gamma \in H^1 \mid x(0) \in B_1, x(1) \in B_2\}$$

このとき  $\mathcal{A}|_\Omega$  は coercive ( $\|x_n\|_{H^1} \rightarrow \infty, x_n \in \Omega$  ならば  $\mathcal{A}(x_n) \rightarrow \infty$ ) であることが分かり,  $\mathcal{A}|_\Omega$  の minimizer  $x_*$  の存在がいえる. これが, 求めていた周期軌道である事を示す.

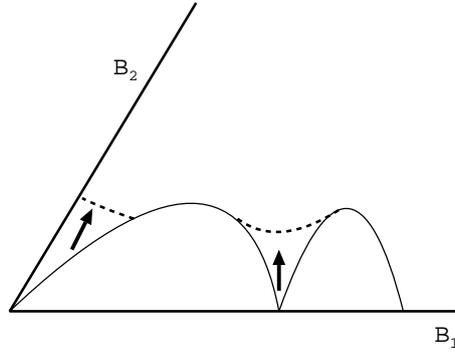


図 6: 衝突

$x_*$  は  $t \in (0, 1)$  では特異点を持たず,  $t = 0, 1$  のときは  $x > 0$  である事を示す.  $x_*$  がそのような特異点を持つと仮定すると, その軌道を変形して, より小さな作用積分の値を持つ曲線を構成できる (図 5). 従って, minimizer  $x_*$  はそのような特異点を持ち得ない.

第一変分公式より  $\dot{x}_*(0) \perp B_1$  と  $\dot{x}_*(1) \perp B_2$  がわかる (図 5).

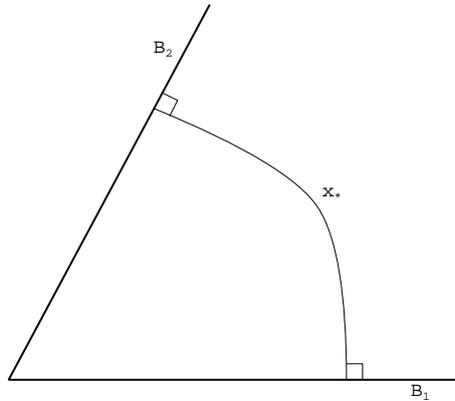


図 7: 対称性

このことから, 軌道は対称性

$$x_*(t) = x_*(-t), x_*(1+t) = x_*(1-t)$$

を持つことが分かる.

従って

$$x_*(t+2) = x_*(1+(1+t)) = x_*(1-(1+t)) = x_*(-t) = x_*(t).$$

であるから,  $x_*$  は周期軌道である.

<sup>1</sup> 重心は 0 に固定しているので自由度 2 である

## 参考文献

- [1] A. Chenciner & R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Annals of Math.*, **152**, pp. 881-901 (2000)
- [2] J. Chazy, sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **39**(1922), 29-130.
- [3] R. McGehee, Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27** (1974), 191-227.
- [4] R. Moeckel, A Topological Existence Proof for the Schubart Orbits in the Collinear Three-body Problem, preprint(2006)
- [5] M. Saito & K. Tanikawa, Collinear Three-Body Problem with Non-Equal Masses by Symbolic Dynamics, Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems ASP Conference Series, Vol. 316, 2004
- [6] M. Saito & K. Tanikawa, The rectilinear three-body problem using symbol sequence I. Role of triple collision, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy***98**(2007) 95-120
- [7] J. Schubart, *Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem*, Astr. Nachr., **283** (1956) 17-22.
- [8] M. Shibayama, *Tiling and Symbolic Dynamics in the Collinear Three-body Problem*, preprint.
- [9] M. Shibayama, *Variational Existence Proof for the Periodic Orbits with regularized collisions in the n-body Problem*, preprint.
- [10] D. G. Saari and Z. Xia, The existence of oscillatory and super hyperbolic motions in newtonian systems, *Journal of Differential Equations* **82**(1989), 342-355.
- [11] Z. Xia, The existence of noncollision singularities in Newtonian systems. *Ann. of Math.* (2) **135** (1992), no. 3, 411-468.

# 非線形固有値問題の解の漸近挙動

柴田 徹太郎

広島大学・大学院工学研究科

## 1 Introduction

よく知られた非線形固有値問題を考える.

$$-u''(t) + u(t)^p = \lambda u(t) \quad t \in I = (0, 1), \quad (1.1)$$

$$u(t) > 0, \quad t \in I, \quad (1.2)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.3)$$

$p > 1$  は定数、 $\lambda > 0$  は正のパラメータである. [1] により、次の事実はよく知られている. 任意に与えた  $\alpha > 0$  に対し、(1.1)–(1.3) の解  $(\lambda, u) = (\lambda_q(\alpha), u_\alpha) \in \mathbf{R}_+ \times C^2(\bar{I})$  で  $\|u_\alpha\|_q = \alpha$  を満たすものがただひとつ存在する.  $\|\cdot\|_q$  は  $L^q$ -norm である. 集合  $\{(\lambda_q(\alpha), u_\alpha); \alpha > 0\}$  は (1.1)–(1.3) のすべての解を与え、 $(\pi^2, 0)$  からスタートする  $\mathbf{R}_+ \times C^2(\bar{I})$  の空間における  $C^1$  級の曲線を与える. 一般に、曲線  $\lambda_q(\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) は、(1.1)–(1.3) の  $L^q$  の枠組みでの正值解の分岐曲線と呼ばれている. (1.1)–(1.3) の解の構造をよりよく理解することは非常に重要な課題である. そのためには、 $\alpha \rightarrow \infty$  のときの  $\lambda_q(\alpha)$  の漸近展開公式をあたえることが目標となる. 結果として、解の  $L^q$  ノルムの漸近挙動や境界層の傾きなど、解の漸近的性質を詳しく知ることができる.

(1.1)–(1.3) は分岐問題や非線形固有値問題の観点から、 $L^\infty$  や  $L^2$  の枠組みで多くの研究者たちにより精力的に研究がなされてきた. (文献 [1–8] 参照) もうひとつの重要なバックグラウンドは、 $p = 2$  のときは生物の個体分布のロジスティック方程式に由来することである. したがって、解の  $L^1$  ノルムを調べることは非常に重要であることがわかる.

$t \in I$  に対し、 $\alpha \rightarrow \infty$  のとき、次に述べる性質はよく知られている:

$$\frac{u_\alpha(t)}{\lambda_q(\alpha)^{1/(p-1)}} \rightarrow 1. \quad (1.4)$$

したがって、 $\alpha \rightarrow \infty$  のとき、次のことがわかる。

$$\lambda_q(\alpha) = \alpha^{p-1}(1 + o(1)). \quad (1.5)$$

最近の論文 [9] において、非線形項が、一般の  $f(u)$  のかたちをしているとき、(1.1)–(1.3) の  $L^q$ -分岐曲線が考察された。その結果として次の公式が得られている。

**定理 1.1** [9]. (1.1)–(1.3) を考える.  $1 \leq q < \infty$  を固定する. すると  $\alpha \rightarrow \infty$  のとき次の公式が成り立つ :

$$\lambda_q(\alpha) = \alpha^{p-1} + C_1 \alpha^{(p-1)/2} + o(\alpha^{(p-1)/2}). \quad (1.6)$$

ここで

$$C_1 = \frac{p-1}{q} C(q),$$

$$C(q) := 2 \int_0^1 \frac{1-s^q}{\sqrt{1-s^2-2(1-s^{p+1})/(p+1)}} ds.$$

ここでの問題点は、[9] では一般の非線形項  $f(u)$  を扱っているので、(1.6) において第 3 項を求めるのは困難であるということである。そこで  $f(u) = u^p$  の場合に焦点を絞ることにより、 $\alpha \rightarrow \infty$  のときの  $\lambda_q(\alpha)$  の精密な漸近公式を与えよう。特に  $p = q + 1$  のときは optimal な剰余項評価まで導くことができる。 $q = 2$  のときは我々の結果はすでに [8] で得られている。しかしながら [8] で用いられた手法は、 $q = 2$  のときにのみ成り立つ解の臨界値と固有値の関係を利用しており、ここでその方法を応用することはできない。そこで、ここでは [8] の方法とは別の、単純で直接的なアプローチで公式を証明する。具体的には  $\|u_\lambda\|_q$  と  $\|u_\lambda\|_\infty$  を直接比較する方法を採用する。

**Theorem 1.2.**  $1 \leq q < \infty$  を固定する. さらに、任意の自然数  $N$  を固定する. このとき  $\alpha \rightarrow \infty$  で

$$\begin{aligned} \lambda_q(\alpha) &= \alpha^{p-1} + C_1 \alpha^{(p-1)/2} + a_0 \\ &\quad + \sum_{k=1}^N a_k \alpha^{k(1-p)/2} + o(\alpha^{N(1-p)/2}), \end{aligned}$$

ここで

$$a_0 = \frac{p-1}{2q}C(q)^2,$$

$$a_1 = \frac{(p-1)(p-1-2q)(p-1-4q)}{24q^3}C(q)^3$$

であり、 $\{a_j\}_{j=1}^N$  は  $C(q), a_0, a_1, \dots, a_{j-1}$  により帰納的に定まる。

特に  $p = q + 1$  のときは剰余項評価を得る。(  $p = 2, q = 1$  の場合を含む )

**Theorem 1.3.**  $p = q + 1$  とする. このとき  $\alpha \rightarrow \infty$  で

$$\lambda_1(\alpha) = \alpha^{p-1} + C(q)\alpha^{(p-1)/2} + \frac{1}{2}C(q)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{C(q)^{2n+1}}{2^{2n}} \alpha^{-(p-1)(n-1/2)}$$

$$+ O(\alpha^{p-1} e^{-\sqrt{(p-1)\alpha^{p-1}(1+o(1))}/2}).$$

## 2 定理の証明

$1 \leq q < \infty$  を固定し、 $(\lambda, u_\lambda) \in \mathbf{R}_+ \times C^2(\bar{I})$  を与えられた  $\lambda > \pi^2$  に対する (1.1) の解とする。  $\alpha = \|u_\lambda\|_q$  とし、簡単のため  $\lambda = \lambda_q(\alpha)$  とする。

**Proposition 2.1.**  $\lambda \rightarrow \infty$  のとき

$$\alpha^{p-1} = \lambda \left( 1 - \frac{C(q)}{\sqrt{\lambda}} \right)^{(p-1)/q} + O(\lambda e^{-\sqrt{(p-1)\lambda(1+o(1))}/2})$$

ここでは Proposition 2.1 を認めて定理を示そう。

**Theorem 1.2** の証明.  $a_0$  と  $a_1$  の求め方のみを紹介する。

Step 1:  $a_0$  の求め方. 次のように定義する :

$$r(\alpha) := \lambda - \alpha^{p-1} - \frac{p-1}{q}C(q)\alpha^{(p-1)/2}.$$

$\alpha \gg 1$  に対して,

$$r(\alpha) = o(\alpha^{(p-1)/2}).$$

テイラー展開により, for  $\lambda \gg 1$

$$\sqrt{\lambda} = \alpha^{(p-1)/2} + \frac{p-1}{2q}C(q) + o(1).$$

これと Proposition 2.1 とテイラー展開により,

$$\begin{aligned}
\alpha^{p-1} &= \lambda \left( 1 - \frac{p-1}{q} \frac{C(q)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(p-1)(p-1-q)}{2q^2} \frac{C(q)^2}{\lambda} + o(\lambda^{-1}) \right) \\
&\quad + O \left( \lambda e^{-\sqrt{(p-1)\lambda}(1+o(1))/2} \right) \\
&= \lambda - \frac{p-1}{q} C(q) \sqrt{\lambda} + \frac{(p-1)(p-1-q)}{2q^2} C(q)^2 + o(1) \\
&= \alpha^{p-1} + \frac{p-1}{q} C(q) \alpha^{(p-1)/2} + r(\alpha) \\
&\quad - \frac{p-1}{q} C(q) \left( \alpha^{(p-1)/2} + \frac{p-1}{2q} C(q) + o(1) \right) \\
&\quad + \frac{(p-1)(p-1-q)}{2q^2} C(q)^2 + o(1).
\end{aligned}$$

これにより、 $\alpha \gg 1$  のとき,

$$r(\alpha) = \frac{p-1}{2q} C(q)^2 + o(1).$$

すなわち

$$a_0 = \frac{(p-1)C(q)^2}{2q}.$$

Step 2:  $a_1$  の求め方。次のように定義する :

$$V(\alpha) := \lambda - \alpha^{p-1} - \frac{p-1}{q} C(q) \alpha^{(p-1)/2} - \frac{p-1}{2q} C(q)^2.$$

Step 1 により、 $\alpha \gg 1$  で  $V(\alpha) = o(1)$  である。テイラー展開により、 $\lambda \gg 1$  で

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda} &= \alpha^{(p-1)/2} + \frac{p-1}{2q} C(q) + \frac{p-1}{4q} C(q)^2 \alpha^{-(p-1)/2} \\
&\quad - \frac{(p-1)^2}{8q^2} C(q)^2 \alpha^{-(p-1)/2} + o(\alpha^{-(p-1)/2}).
\end{aligned}$$

これと Proposition 2.1 とテイラー展開により,

$$\begin{aligned}
\alpha^{p-1} &= \lambda \left( 1 - \frac{p-1}{q} \frac{C(q)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(p-1)(p-1-q)}{2q^2} \frac{C(q)^2}{\lambda} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(p-1)(p-1-q)(p-1-2q)}{6q^3} \frac{C(q)^3}{\lambda^{3/2}} (1 + o(1)) \right) \\
&\quad + O \left( \lambda e^{-\sqrt{(p-1)\lambda}(1+o(1))/2} \right) \\
&= \lambda - \frac{p-1}{q} C(q) \sqrt{\lambda} + \frac{(p-1)(p-1-q)}{2q^2} C(q)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(p-1)(p-1-q)(p-1-2q)}{6q^3} \frac{C(q)^3}{\lambda^{1/2}} (1+o(1)) \\
= & \alpha^{p-1} + \frac{p-1}{q} C(q) \alpha^{(p-1)/2} + \frac{p-1}{2q} C(q)^2 + V(\alpha) \\
& - \frac{p-1}{q} C(q) \left( \alpha^{(p-1)/2} + \frac{p-1}{2q} C(q) + \frac{p-1}{4q} C(q)^2 \alpha^{-(p-1)/2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(p-1)^2}{8q^2} C(q)^2 \alpha^{-(p-1)/2} + o(\alpha^{-(p-1)/2}) \right) \\
& + \frac{(p-1)(p-1-q)}{2q^2} C(q)^2 - \frac{(p-1)(p-1-q)(p-1-2q)}{6q^3} C(q)^3 \alpha^{-(p-1)/2} \\
& + o(\alpha^{-(p-1)/2}).
\end{aligned}$$

これにより、 $\alpha \gg 1$  のとき、

$$V(\alpha) = \frac{(p-1)(p-1-2q)(p-1-4q)}{24q^3} C(q)^3 \alpha^{-(p-1)/2} + o(\alpha^{-(p-1)/2}).$$

すなわち

$$a_1 = \frac{(p-1)(p-1-2q)(p-1-4q)}{24q^3} C(q)^3.$$

■

Theorem 1.3 の証明.  $p = q + 1$  なので、 $\lambda \gg 1$  に対して

$$\alpha^{p-1} = \lambda - C(q)\sqrt{\lambda} + O\left(\lambda e^{-\sqrt{(p-1)\lambda(1+o(1))}/2}\right).$$

すなわち、2 次方程式の解の公式により

$$\sqrt{\lambda} = \frac{C(q)}{2} + \frac{\sqrt{C(q)^2 - 4(-\alpha^{p-1} + O(\lambda e^{-\sqrt{(p-1)\lambda(1+o(1))}/2}))}}{2}.$$

これにより

$$\begin{aligned}
\lambda & = \alpha^{p-1} + C(q)\sqrt{\alpha^{p-1} + \frac{C(q)^2}{4}} + \frac{1}{2}C(q)^2 + O\left(\alpha^{p-1}e^{-\sqrt{(p-1)\alpha^{p-1}(1+o(1))}/2}\right) \\
& = \alpha^{p-1} + C(q)\alpha^{(p-1)/2} + \frac{1}{2}C(q)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{C(q)^{2n+1}}{2^{2n}} \alpha^{-(p-1)(n-1/2)} \\
& \quad + O\left(\alpha^{p-1}e^{-\sqrt{(p-1)\alpha^{p-1}(1+o(1))}/2}\right).
\end{aligned}$$

これにより定理を得る。■

### 3 Proposition 2.1 の証明

$\lambda > \pi^2$  に対し

$$u_\lambda(t) = u_\lambda(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.1)$$

$$u_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \max_{0 \leq t \leq 1} u_\lambda(t) = \|u_\lambda\|_\infty, \quad (3.2)$$

$$u'_\lambda(t) > 0, \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

$\lambda > \pi^2$  と  $0 \leq s \leq 1$  に対し,

$$\begin{aligned} R_\lambda(s) &:= 1 - s^2 - \frac{2}{p+1} \frac{\|u_\lambda\|_\infty^{p-1}}{\lambda} (1 - s^{p+1}), \\ S_\lambda(s) &:= 1 - s^2 - \frac{2}{p+1} (1 - s^{p+1}), \\ U_\lambda &:= 2 \int_0^1 \frac{(1-s^q)(S_\lambda(s) - R_\lambda(s))}{\sqrt{R_\lambda(s)}\sqrt{S_\lambda(s)}(\sqrt{R_\lambda(s)} + \sqrt{S_\lambda(s)})} ds. \end{aligned}$$

とする。

**Lemma 3.1.**  $\lambda > \pi^2$  に対し

$$\|u_\lambda\|_\infty^q - \|u_\lambda\|_q^q = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|u_\lambda\|_\infty^q (C(q) + U_\lambda).$$

**証明.** (1.1) より  $0 \leq t \leq 1$  に対して

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} u'_\lambda(t)^2 - \frac{1}{p+1} u_\lambda(t)^{p+1} + \frac{1}{2} \lambda u_\lambda(t)^2 \right] = 0.$$

これより、 $0 \leq t \leq 1$  に対して

$$\frac{1}{2} u'_\lambda(t)^2 - \frac{1}{p+1} u_\lambda(t)^{p+1} + \frac{1}{2} \lambda u_\lambda(t)^2 = \text{constant} = -\frac{1}{p+1} \|u_\lambda\|_\infty^{p+1} + \frac{1}{2} \lambda \|u_\lambda\|_\infty^2.$$

次のように定義する：

$$\begin{aligned} M_\lambda(\theta) &:= \lambda(\|u_\lambda\|_\infty^2 - \theta^2) - \frac{2}{p+1} (\|u_\lambda\|_\infty^{p+1} - \theta^{p+1}), \\ Q_\lambda(s) &:= \lambda \|u_\lambda\|_\infty^2 (1-s^2) - \frac{2}{p+1} \|u_\lambda\|_\infty^{p+1} (1-s^{p+1}). \end{aligned}$$

このとき  $0 \leq t \leq 1/2$  に対して,

$$u'_\lambda(t) = \sqrt{M_\lambda(u_\lambda(t))}. \quad (3.4)$$

$\theta = u_\lambda(t)$  とおき、さらに  $s = \theta/\|u_\lambda\|_\infty$  とすると

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_\infty^q - \|u_\lambda\|_q^q &= 2 \int_0^{1/2} (\|u_\lambda\|_\infty^q - u_\lambda^q(t)) \frac{u'_\lambda(t)}{\sqrt{M_\lambda(u_\lambda(t))}} dt \\ &= 2 \int_0^{\|u_\lambda\|_\infty} (\|u_\lambda\|_\infty^q - \theta^q) \frac{1}{\sqrt{M_\lambda(\theta)}} d\theta \\ &= 2 \frac{\|u_\lambda\|_\infty^q}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{1 - s^q}{\sqrt{Q_\lambda(s)/(\lambda\|u_\lambda\|_\infty^2)}} ds \\ &= 2 \frac{\|u_\lambda\|_\infty^q}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{1 - s^q}{\sqrt{R_\lambda(s)}} ds \\ &= \frac{\|u_\lambda\|_\infty^q}{\sqrt{\lambda}} \left( 2 \int_0^1 \frac{1 - s^q}{\sqrt{S_\lambda(s)}} ds + U_\lambda \right) \\ &= \frac{\|u_\lambda\|_\infty^q}{\sqrt{\lambda}} (C(q) + U_\lambda). \end{aligned}$$

■

**Lemma 3.2.**  $\lambda \gg 1$  に対して

$$|U_\lambda| \leq C\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{(p-1)\lambda(1+o(1))}/2}. \quad (3.5)$$

**Proposition 2.1** の証明. Lemmas 3.1 と 3.2 により,  $\lambda \gg 1$  に対して

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_q^{p-1} &= \|u_\lambda\|_\infty^{p-1} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(C(q) + U_\lambda) \right)^{(p-1)/q} \\ &= (\lambda - \xi_\lambda) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(C(q) + U_\lambda) \right)^{(p-1)/q} \\ &= \lambda \left( 1 - \frac{\xi_\lambda}{\lambda} \right) \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}C(q) \right)^{(p-1)/q} + O\left( \frac{U_\lambda}{q\sqrt{\lambda}} \right) \right] \\ &= \lambda(1 - e^{-\sqrt{(p-1)\lambda(1+o(1))}/2}) \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}C(q) \right)^{(p-1)/q} + O(e^{-\sqrt{(p-1)\lambda(1+o(1))}/2}) \right]. \end{aligned}$$

これにより Proposition 2.1 を得る. ■

## 参考文献

- [1] H. Berestycki, Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques, *J. Funct. Anal.* **40** (1981) 1–29.
- [2] R. Chiappinelli, Remarks on bifurcation for elliptic operators with odd nonlinearity, *Israel J. Math.* **65** (1989) 285–292.
- [3] R. Chiappinelli, On spectral asymptotics and bifurcation for elliptic operators with odd superlinear term, *Nonlinear Anal. TMA* **13** (1989) 871–878.
- [4] J. M. Fraile, J. López-Gómez and J. C. Sabina de Lis, On the global structure of the set of positive solutions of some semilinear elliptic boundary value problems, *J. Differential Equations* **123** (1995) 180–212.
- [5] M. Holzmann and H. Kielhöfer, Uniqueness of global positive solution branches of nonlinear elliptic problems, *Math. Ann.* **300** (1994) 221–241.
- [6] P. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **8** (1971) 321–340.
- [7] P. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.* **7** (1971) 487–513.
- [8] T. Shibata, Precise spectral asymptotics for nonlinear Sturm-Liouville problems, *J. Differential Equations* **180** (2002) 374–394.
- [9] T. Shibata,  $L^q$  spectral asymptotics for nonlinear Sturm-Liouville problems, *Differential and Integral Equations* **19** (2006) 773–783.

# 平面上の複素ポテンシャルの再構成について

渡辺道之 (東京理科大学・理工学部)

watanabe\_michiyuki@ma.noda.tus.ac.jp

## 1 序

物理的現象を特徴づける物理係数は、しばしば偏微分作用素の係数に現れる。様々な計測ではこれらの物理係数を求める問題、すなわち偏微分方程式の係数同定逆問題が重要となる。

未知係数を計測データから具体的に構成する手続き（再構成手続き）を与えることが応用上あるいは実用上重要である。

境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = f, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える。ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  は滑らかな境界を持つ有界領域とし、 $V$  は複素数値関数で  $V \in L^p(\Omega)$  ( $p > 2$ ) とする。もし  $0$  が  $-\Delta + V$  in  $\Omega$  の Dirichlet 固有値でないならば、境界値問題(1.1) は  $f \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$  に対し唯一つの解  $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  を持つ（ただし、 $\alpha = 1 - 2/p$  とおいた）。そこで、Dirichlet-Neumann 写像 (DN 写像) を次のように定義する：

$$\Lambda_V : C^{1,\alpha}(\partial\Omega) \rightarrow C^\alpha(\partial\Omega)$$
$$f \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$$

ここで、 $\nu$  は  $\partial\Omega$  の外向き単位法線ベクトルであり、 $C^\alpha$  と  $C^{m,\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1, m \in \mathbb{N}$ ) は通常の Hölder 空間である。ここでは、以下の問題について考える。

境界値逆問題： $\Lambda_V$  から  $V(x)$  を再構成せよ。

シュレーディンガー方程式に対する散乱の逆問題や、導電場の方程式  $\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0$  に対する境界値逆問題も ( $V$  に制限はつくが) (1.1) の境界値逆問題に帰着できることが知られている。

(1.1) の多次元境界値逆問題に関しては多くの結果があり、DN 写像から  $V(x)$  を一意的に再構成できることが知られている（例えば、[3]、[5] 及びそれらの参考文献を参照してほしい）。 $V$  が複素数値関数の場合も、実数値関数の場合とほぼ同様の結果が得られることもわかる。一方、2次元の場合は導電場の方程式から得られる、特殊な形のポテンシャル  $V$  については再構成手続きが与えられている（例えば、Nachman [10]）。しかし、一般のポテンシャルに関しては未解決である。 $V$  に適当な意味で小ささを仮定すれば、Nachman [10] の方法に従って再構成手続きを与えら

れることが期待できる．しかし， $V$  が複素数値関数の場合は Nachman の手法は直接適用できないように思える．なお，複素数値関数  $V \in L^p(\Omega)$  の一意性 ( $\Lambda_{V_1} = \Lambda_{V_2}$  ならば  $V_1 = V_2$ ) については Kang [6] によって得られているが，再構成手続きは含まれていない．

この報告集では，適当な意味での小ささの仮定の下で，複素数値関数  $V$  を DN 写像から求める再構成手続きについて紹介する．

**定理 1.1.**  $V(x)$  は複素数値関数で  $V \in W^{1,p}(\Omega)$  ( $p > 2$ ) とする．また  $\|V\|_{W^{1,p}}$  は十分小さいとする．このとき， $\Lambda_V$  から  $V(x)$  を一意的に再構成できる．

2次元境界値逆問題の結果は多くあるが，ここではその一部を紹介する．先にも述べたが，2次元の導電場の方程式  $\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0$  に関しては，係数  $\gamma = \gamma(x)$  の小ささの制限なしに，対応する DN 写像から  $\gamma$  を一意的に再構成できることが知られている． $\gamma \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $p > 1$  の場合に Nachman [10] が一意性と再構成手続きを与えた．Brown-Uhlmann [1] は方程式を1階の連立系に書き直す方法で， $\gamma \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p > 2$  に対して一意性を証明した．1階の連立系を利用した Brown-Uhlmann の方法を基に， $\gamma \in W^{1+\varepsilon,p}(\Omega)$ ,  $p > 2$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  に対して再構成手続きを与えたのが Knudsen-Tamasan [9] である．また，Francini [2] は  $\gamma$  が複素数値でその虚部が十分小さい場合に一意性を証明した．ここであげた結果の証明法は  $\bar{\partial}$  理論と呼ばれる方法に基づいてなされている．これは，複素パラメータを持つ特殊な解（複素幾何光学解，または exponentially growing solution などと呼ばれている）を  $\mathbb{R}^2$  で構成し，それを利用する方法である．

導電場の方程式  $\nabla \cdot \gamma \nabla u = 0$  は  $v = \gamma^{1/2}u$  と変換することで，Schrödinger 方程式  $-\Delta v + Vv = 0$ ,  $V = \gamma^{-1/2}\Delta(\gamma^{1/2})$  に書き換えることができる．従って，導電場の方程式に関する結果は，特殊な形のポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式に関する結果であるといえる．

一般のポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式の場合については，先にも述べたように，十分小さい複素数値関数  $V \in L^p(\Omega)$  に対して，Kang [6] が一意性を証明した．また，Kang-Uhlmann [7] は， $q_1 \in W^{1,p}$ ,  $q_2 \in L^p$ ,  $p > 2$  に対し  $\|q\|_{W^{1,p}}$  が十分小さければ， $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$  のとき  $q_1 = q_2$  となること（一意性）を示した．この結果は  $q_1, q_2$  が複素数値関数の場合も成り立つことがわかる．これらの結果も  $\bar{\partial}$  理論に基づいているが，とくに Kang-Uhlmann [7] の論文では，有界領域  $\Omega$  の中で構成した複素幾何光学解を利用し，議論を  $\Omega$  の中だけで行っている点が特徴的である．

定理 1.1 の結果は Knudsen-Tamasan [9] と Kang-Uhlmann [7] を拡張したものである．導電場の方程式に関する Knudsen-Tamasan[9] の方法を一般のポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式へ応用するために， $3 \times 3$  の  $\bar{\partial}$  system

$$\left\{ \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \right\} u = 0$$

を導入する．ここで，複素数  $z = x_1 + ix_2$  に対し， $\partial = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$ ， $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$  とした．この system に対し Kang-Uhlmann [7] で考察された複素幾何光学解を  $\Omega$  で構成しこれを利用する． $V$  の再構成手続きのなかで，DN 写像から複素幾何光学解の境界値を求めることが必要となる．通常それは一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャルを構成し，境界での飛び公式を利用して複素幾何光学解の境界値が満たす方程式を導くのである．一重層ポテンシャル，二重層ポテンシャルを使うのであるから，当然  $\mathbb{R}^2$  まで議論をひろげる必要がある．ところが，Kang-Uhlmann [7] で構成された複素幾何光学解を利用し，Knudsen-Tamasan [9] の方法を応用すると，実は一重層ポテンシャル及び，二重層ポテンシャルの飛び公式を利用しなくとも，DN 写像から複素幾何光学解の境界値が定まることがわかる．その結果， $\Omega$  での議論だけで，複素ポテンシャルの再構成手続きを与えることができるのである．

さらに面白いことに， $3 \times 3$  の  $\bar{\partial}$  system に対する複素幾何光学解の第三行目の性質は，他の成分とは少し異なることがわかる．このことにより，今まで知られている（複素幾何光学解からポテンシャル  $V$  を求める）公式とは違った公式も与えることができる．

この報告集では以下の記号を用いる．

- $I_{id}$  : 恒等写像， $I$  : 単位行列
- $s : [0, |\partial\Omega|] \rightarrow \partial\Omega$ ， $\partial\Omega$  の弧長パラメータ．
- $\partial_\tau f = \frac{d}{dt}f(s(t))$  : 境界の接方向微分．
- $C_0(\partial\Omega) = \{f \in C(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} f d\sigma = 0\}$   $d\sigma$  は  $\partial\Omega$  上の Euclidean surface measure.
- $(\partial_\tau^{-1}f)(s(t)) = \int_0^t f(s(t')) dt'$  on  $C_0(\partial\Omega)$ .
- 太字は 3 次の列ベクトル  $f = {}^t(f_1, f_2, f_3)$  を表すことにする．
- $\partial\Omega$  の単位法線ベクトル  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  に対し， $\eta = \nu_1 + i\nu_2$  とする．
- $e_k(z) := e^{i(kz + \bar{k}\bar{z})}$ ， $\tilde{e}_k(z) := e^{i(\bar{k}z + k\bar{z})}$  とおく． $\tilde{e}_k(z) = e_{\bar{k}}(z)$  である．
- $k_R, k_I$  : 複素数  $k$  の実部と虚部．
- $|\Omega|$  : 有界領域  $\Omega$  の面積．
- 複素数  $z = x_1 + ix_2$  に対し， $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$ ， $\bar{\partial}_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$ .
- $z$  と  $\bar{z}$  の関数  $u(z, \bar{z})$  を誤解のおそれのない限り  $u(z)$  と略記する．
- $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$  とし，とくにことわりがない限り， $p > 2$  とする．

- $Tf$  と  $\bar{T}f$  を

$$Tf \equiv T_\Omega f = -\frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta_R d\zeta_I, \quad \bar{T}f \equiv \bar{T}_\Omega f = -\frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta_R d\zeta_I$$

で定義する .  $\bar{T}f = \overline{T(f)}$  である .

- $k \in \mathbf{C}$  上定義された関数  $f(k)$  に対し ,  $\bar{\partial}_k^{-1} f(k) \equiv (T_{\mathbf{R}^2} f)(k)$  とする .
- 誤解の恐れのない限り ,  $L^p \equiv L^p(\Omega)$  ,  $C^\alpha \equiv C^\alpha(\bar{\Omega})$  と略記する .

### 再構成手続き

$V$  の再構成手続きは三段階にわたり , 具体的に以下のようなになる .

Step 1.  $H_V := \Lambda_V \partial_\tau^{-1}$  とおく . 与えられた  $\Lambda_V$  に対し , 次を満たす境界上の関数  $\Phi_{11}(z, k)$  と  $\Phi_{31}(z, k)$  ,  $z \in \partial\Omega$  ,  $k \in \mathbf{C}$  を求める .

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-ik\zeta} \Phi_{11}(\zeta, k)}{\zeta - z} d\zeta = 1, & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{e^{ik\bar{\zeta}} \Phi_{31}(\zeta, k)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} = 0, \\ iH_V(\eta\Phi_{11} - \bar{\eta}\Phi_{31}) = (\eta\Phi_{11} + \bar{\eta}\Phi_{31}) \end{cases}$$

これらの関数から  $\Phi_{21}(z, k) := i\partial_\tau^{-1}(\eta\Phi_{11}(z, k) - \bar{\eta}\Phi_{31}(z, k))$  と定める .

同様に ,

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-i\bar{k}\zeta} \Phi_{12}(\zeta, k)}{\zeta - z} d\zeta = 0, & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{e^{ik\bar{\zeta}} \Phi_{32}(\zeta, k)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} = 0, \\ iH_V(\eta\Phi_{12} - \bar{\eta}\Phi_{32}) = (\eta\Phi_{12} + \bar{\eta}\Phi_{32}) \end{cases}$$

を満たす関数  $\Phi_{12}(z, k)$  と  $\Phi_{32}(z, k)$  ,  $z \in \partial\Omega$  ,  $k \in \mathbf{C}$  を求める .

Step 2. Step 1 で求めた関数  $\Phi_{12}$  と  $\Phi_{21}$  から  $\mathbf{C}$  上の関数  $s_{12}(k)$  と  $s_{21}(k)$  を

$$s_{12}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{-i\bar{k}z} \Phi_{12}(z, k) dz, \quad s_{21}(k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{ik\bar{z}} \Phi_{21}(z, k) dz$$

と定める . これらを係数に持つ方程式

$$\begin{cases} \bar{\partial}_k m_{11}(z, k) = ie_{-k}(z) s_{21}(k) m_{12}(z, \bar{k}) \\ \bar{\partial}_k m_{12}(z, k) = i\bar{e}_k(z) s_{12}(k) m_{11}(z, \bar{k}) \end{cases}$$

を解き ,  $m_{11}(z, \cdot) - 1$  ,  $m_{12}(z, \cdot) \in L^{2,\delta}(\mathbf{C})$  ( $-1 < \delta < 0$ ) を満たす  $m_{11}$  と  $m_{12}$  ,  $z \in \Omega$  ,  $k \in \mathbf{C}$  を求める .

Step 3. 最後に , Step 2 で求めた  $m_{12}$  に対し ,  $\Phi_{12} = e^{-ik\bar{z}} m_{12}(z, k)$  とおけば ,  $V$  は次の公式で与えられる .

$$V(z) = \lim_{|k_0| \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi} \int_{|k-k_0| < 1} e^{ik\bar{z}} \bar{\partial}_z \Phi_{12}(z, k) dk_R dk_I \quad z \in \Omega$$

複素幾何光学解の3行目を利用すると，上で述べた Step 3 の公式とは別の形のものが得られる．

Step 1'. Step 1 と同様にして  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{21}$  を求める．

Step 2'.  $\mathbf{C}$  上の関数  $s_{12}(k)$  と  $s_{21}(k)$  を Step 2 と同様に定める．さらに，

$$s_{31}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}z} \Phi_{11}(z, k) dz - i\bar{k}s_{21}(k)$$

と定める．これらを係数に持つ方程式

$$\begin{cases} \bar{\partial}_k m_{31}(z, k) = -ie_{-k}(z)s_{31}(k) + e_{-k}(z)is_{21}(k)m_{32}(z, \bar{k}) \\ \bar{\partial}_k m_{32}(z, k) = is_{12}(k)e_{\bar{k}}(z)m_{31}(z, \bar{k}) \end{cases}$$

を解き， $m_{31}(z, k)$  と  $m_{32}(z, k)$ ,  $z \in \Omega$ ,  $k \in \mathbf{C}$  を求める．

Step 3'. Step 2 で得られた  $m_{32}$  から  $V(x)$  は次の式で求められる．

$$V(x) = 4\partial_z \lim_{|k| \rightarrow \infty} m_{32}(z, k) \quad z \in \Omega$$

2節で定理の証明に必要な補題をまとめておく．3節では，複素幾何光学解を構成し，いくつかの性質を導く．DN 写像から複素幾何光学解の境界値を構成できることを4節で示す．5節で  $\bar{\partial}_k$  方程式の解の一意性を証明した後，6節で Step 3 および Step 3' で述べたポテンシャル  $V$  の公式を証明する．最後に7節で定理 1.1 における  $V$  の小ささの仮定について注意を与える．

## 2 準備

定理の証明に必要な補題をいくつかまとめておく．

補題 2.1.  $p > 2$ ,  $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$  とする．このとき  $T$  と  $\bar{T}$  は  $L^p(\Omega)$  から  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  への有界作用素となり， $f \in L^p(\Omega)$  に対し

$$\|Tf\|_{C^\alpha}, \|\bar{T}f\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|f\|_{L^p}$$

を満たす．ここで， $C_1$  は  $p$  と  $\Omega$  に依存する正の定数である．

補題 2.2.  $f \in L^1(\Omega)$  に対し， $Tf$  は (弱) 導関数を持ち  $\bar{\partial}_z Tf = f$  となる．

さらに  $\partial_z T$  は  $L^p(\Omega)$  から  $L^p(\Omega)$  ( $p > 1$ ) への有界作用素であり， $f \in L^p(\Omega)$  に対し，

$$\|\partial_z Tf\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{L^p}$$

が成り立つ．ここで， $C_2$  は  $p$  と  $\Omega$  に依存する正の定数である．

補題 2.3.  $-1 < \delta < 0$  とする . このとき  $\bar{\partial}_k^{-1}$  は  $L^{2,\delta+1}(\mathbb{C})$  から  $L^{2,\delta}(\mathbb{C})$  への有界作用素となる .

補題 2.1 と補題 2.2 の証明は Vekua [12, Chapter 1] にある . 補題 2.3 は Nachman [10, Lemma 2.4] にある .

補題 2.4. 写像  $k \rightarrow (\bar{\partial} - ik)^{-1}$  は  $L^\infty(\Omega)$  上の作用素ノルムにおいて  $\mathbb{C}$  上微分可能である .

証明 : Nachman [10, Lemma 2.2] と同様に示される .

□

### 3 複素幾何光学解

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  に対し ,  $z = x_1 + ix_2$  とおく . 以下 , 誤解のおそれのないときは ,  $\partial_z, \bar{\partial}_z$  をそれぞれ  $\partial, \bar{\partial}$  と略記する .  $(-\Delta + V(x))u = 0$  は次のように書き換えられる .

$$(\bar{\partial}\partial - q(z))u = 0, \quad q(z) = \frac{1}{4}V(z) \quad (3.1)$$

逆問題では , (3.1) の複素パラメータを持った特殊な解 (複素幾何光学解) を利用することが有効であった .  $q$  が複素数値関数である場合 , (3.1) の代わりに , 次の  $3 \times 3$  の  $\bar{\partial}$ -system を利用することが有効であるように思う .

$$D = \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

とおく . 方程式  $(D - Q)\Phi = 0$  を満たすもので , 複素パラメータ  $k$  を持つ特殊な形の解  $\Phi = \Phi(z, k) = M(z, k)E(z, k)$  ,  $z \in \Omega$  (これを複素幾何光学解という) を構成することを考えよう . ここで ,  $M(z, k) = (m_{ij}(z, k))$  は  $3 \times 3$  行列であり

$$E(z, k) = \begin{pmatrix} e^{ikz} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik\bar{z}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik\bar{z}} \end{pmatrix}$$

である．簡単な計算により  $M$  は方程式  $DME - QME = O$  を満たすことがわかる．この方程式を  $M$  でまとめられる形に書き換えよう．成分で書き下すと，

$$\begin{aligned} DME &= \begin{pmatrix} \bar{\partial}(m_{11}e^{ikz}) & \bar{\partial}(m_{12}e^{-ik\bar{z}}) & \bar{\partial}(m_{13}e^{-ik\bar{z}}) \\ \partial(m_{21}e^{ikz}) & \partial(m_{22}e^{-ik\bar{z}}) & \partial(m_{23}e^{-ik\bar{z}}) \\ \partial(m_{31}e^{ikz}) & \partial(m_{32}e^{-ik\bar{z}}) & \partial(m_{33}e^{-ik\bar{z}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{ikz}\bar{\partial}(m_{11}) & \bar{\partial}(m_{12}e^{-ik\bar{z}}) & \bar{\partial}(m_{13}e^{-ik\bar{z}}) \\ \partial(m_{21}e^{ikz}) & e^{-ik\bar{z}}\partial(m_{22}) & e^{-ik\bar{z}}\partial(m_{23}) \\ \partial(m_{31}e^{ikz}) & e^{-ik\bar{z}}\partial(m_{32}) & e^{-ik\bar{z}}\partial(m_{33}) \end{pmatrix} \\ QME &= \begin{pmatrix} e^{ikz}qm_{21} & e^{-ik\bar{z}}qm_{22} & e^{-ik\bar{z}}qm_{23} \\ e^{ikz}m_{11} & e^{-ik\bar{z}}m_{12} & e^{-ik\bar{z}}m_{13} \\ e^{ikz}qm_{21} & e^{-ik\bar{z}}qm_{22} & e^{-ik\bar{z}}qm_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる． $e^{ikz}\bar{\partial}(e^{-ik\bar{z}}m_{ij}) = e^{i(\bar{k}z+k\bar{z})}\bar{\partial}(e^{-i(\bar{k}z+k\bar{z})}m_{ij})$  に注意すれば， $DME - QME = O$  から

$$\begin{pmatrix} \bar{\partial}(m_{11}) & e^{ik\bar{z}}\bar{\partial}(m_{12}e^{-ik\bar{z}}) & e^{ik\bar{z}}\bar{\partial}(m_{13}e^{-ik\bar{z}}) \\ e^{-ikz}\partial(m_{21}e^{ikz}) & \partial(m_{22}) & \partial(m_{23}) \\ e^{-ikz}\partial(m_{31}e^{ikz}) & \partial(m_{32}) & \partial(m_{33}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} qm_{21} & qm_{22} & qm_{23} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ qm_{21} & qm_{22} & qm_{23} \end{pmatrix} = O$$

を得る． $3 \times 3$  行列  $X = (x_{ij})$  に対し， $\mathcal{P}_k X$  を

$$\mathcal{P}_k X = \begin{pmatrix} x_{11} & \tilde{e}_{-k}x_{12} & \tilde{e}_{-k}x_{13} \\ e_k x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ e_k x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

により定義する．このとき  $M$  は  $\mathcal{P}_k^{-1}D\mathcal{P}_k M - QM = O$  を，すなわち

$$D\mathcal{P}_k M - \mathcal{P}_k QM = O \quad (3.2)$$

を満たす．

$M$  を構成しよう．

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & \bar{T} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T} \end{pmatrix}, \quad D_k^{-1} = \mathcal{P}_k^{-1}D^{-1}\mathcal{P}_k$$

とおく．(3.2) 式のかわりに

$$(I_{id} - D_k^{-1}Q)X = O \quad (3.3)$$

を考える．もし  $(I_{id} - D_k^{-1}Q)^{-1}$  が存在するならば，(3.3) の Dirichlet 境界値問題は唯ひとつの解を持つことがわかる．また， $\bar{\partial}(Tf) = f$ ， $\partial(\bar{T}f) = f$  より(3.3) の両辺に  $D_k$  を作用させると，(3.3) を満たす  $X$  は(3.2) 式を満たすことがわかる．

**補題 3.1.**  $q \in L^p(\Omega)$  のノルムは  $C_1^2|\Omega|^{1/q}\|q\|_{L^p} < 1$  を満たすとする．このとき， $(I_{id} - D_k^{-1}Q)^{-1}$  が  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  で存在する．

証明：掛け算作用素  $Q(z)$  は  $C^\alpha(\bar{\Omega}) \rightarrow L^p(\Omega)$  へのコンパクト作用素， $T, \bar{T}$  はそれぞれ  $L^p(\Omega) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$  への有界作用素であるから， $D_k^{-1}Q$  は  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  上のコンパクト作用素である．従って，Fredholm の交代定理より， $I_{id} - D_k^{-1}Q$  の単射性を示せばよい．

$(I_{id} - D_k^{-1}Q)X = O$  を考える． $X$  は  $\mathcal{P}_k X - D^{-1}\mathcal{P}_k QX = O$  を満たす．

$$D^{-1}\mathcal{P}_k QX = \begin{pmatrix} T(qx_{21}) & T(\tilde{e}_{-k}qx_{22}) & T(\tilde{e}_{-k}qx_{23}) \\ \bar{T}(e_k x_{11}) & \bar{T}x_{12} & \bar{T}x_{13} \\ \bar{T}(e_k qx_{21}) & \bar{T}(qx_{22}) & \bar{T}(qx_{23}) \end{pmatrix}$$

であるから  $X = (x_{ij})$  の各成分は

$$\begin{cases} x_{11} - T(qx_{21}) = 0, \\ e_k x_{21} - \bar{T}(e_k x_{11}) = 0, \\ e_k x_{31} - \bar{T}(e_k qx_{21}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{e}_{-k}x_{12} - T(\tilde{e}_{-k}qx_{22}) = 0, \\ x_{22} - \bar{T}x_{12} = 0, \\ x_{32} - \bar{T}(qx_{22}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{e}_{-k}x_{13} - T(\tilde{e}_{-k}qx_{23}) = 0 \\ x_{23} - \bar{T}x_{13} = 0 \\ x_{33} - \bar{T}(qx_{23}) = 0 \end{cases}$$

を満たす． $p > 2$  に対して

$$\begin{aligned} \|x_{11}\|_{C^\alpha} &= \|T(qx_{21})\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|qx_{21}\|_{L^p} \leq C_1 \|q\|_{L^p} \|x_{21}\|_{C^\alpha} \\ \|x_{21}\|_{C^\alpha} &= \|\bar{T}(e_k x_{11})\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|x_{11}\|_{L^p} \leq C_1 |\Omega|^{1/p} \|x_{11}\|_{C^\alpha} \end{aligned}$$

と評価できるので，

$$\|x_{11}\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|q\|_{L^p} C_1 |\Omega|^{1/p} \|x_{11}\|_{C^\alpha}, \quad \|x_{21}\|_{C^\alpha} \leq C_1 |\Omega|^{1/p} C_1 \|q\|_{L^p} \|x_{21}\|_{C^\alpha}$$

を得る．従って  $C_1^2 |\Omega|^{1/p} \|q\|_{L^p} < 1$  ならば  $x_{11} = x_{21} = 0$  である．同様にして，

$$\begin{aligned} \|x_{22}\|_{C^\alpha} &= \|\bar{T}(x_{12})\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|x_{12}\|_{L^p} \leq C_1 |\Omega|^{1/p} \|x_{12}\|_{C^\alpha} \\ \|x_{12}\|_{C^\alpha} &= \|T(\tilde{e}_{-k}qx_{22})\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|\tilde{e}_{-k}qx_{22}\|_{L^p} \leq C_1 \|q\|_{L^p} \|x_{22}\|_{C^\alpha} \end{aligned}$$

から  $C_1^2 |\Omega|^{1/p} \|q\|_{L^p} < 1$  ならば  $x_{12} = x_{22} = 0$ ．さらに

$$\begin{aligned} \|x_{23}\|_{C^\alpha} &= \|\partial^{-1}(x_{13})\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|x_{13}\|_{L^p} \leq C_1 |\Omega|^{1/p} \|x_{13}\|_{C^\alpha} \\ \|x_{13}\|_{C^\alpha} &\leq C_1 \|\tilde{e}_{-k}qx_{23}\|_{L^p} \leq C_1 \|q\|_{L^p} \|x_{23}\|_{C^\alpha} \end{aligned}$$

から， $C_1^2 |\Omega|^{1/p} \|q\|_{L^p} < 1$  ならば  $x_{13} = x_{23} = 0$  となる．以上のことから  $x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0$  もわかる．従って  $X = O$  を得る．

□

$M$  を

$$M(z, k) = (I_{id} - D_k^{-1}Q)^{-1}I \quad (3.4)$$

によって定義すれば  $M$  は(3.2) を満たすことが確かめられる .

$M(z, k)$  の  $k$  に関する漸近挙動

(3.4) で定義した関数  $M(z, k)$  は  $|k| \rightarrow \infty$  としたとき ,

$$M(z, k) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{T}q & 1 \end{pmatrix} \equiv U$$

となることを示そう .

**補題 3.2.**  $M(z, k) = (m(z, k)_{ij})$  ,  $1 \leq i, j \leq 3$  は(3.4) で定義された関数とする .  
 $2\{(1 + \frac{C_3}{2\pi}) + C_2\}C_1\|q\|_{L^p} < |k|$  を満たす  $k \in \mathbb{C}$  に対して次が成立する .

$$\|m_{11}(\cdot, k) - 1\|_{L^\infty} + \|m_{22}(\cdot, k) - 1\|_{L^\infty} \leq \frac{2C_1}{|k|}\|q\|_p \quad (3.5)$$

$$\|m_{12}(\cdot, k)\|_{L^\infty} + \|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{|k|} \quad (3.6)$$

$$m_{13}(z, k) = m_{23}(z, k) = 0, \quad m_{33}(z, k) = 1, \quad \forall z \in \Omega \quad (3.7)$$

$$\|m_{31}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \leq \frac{2C_1}{|k|}\|q\|_{L^p} \quad (3.8)$$

$$\|m_{32}(\cdot, k) - \bar{T}q(\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{2C_1^2}{|k|}\|q\|_{L^p}^2 \quad (3.9)$$

**証明 :** (3.5) と(3.6) を示そう .  $m_{ij} = m_{ij}(z, k)$  ,  $1 \leq i, j \leq 2$  は次を満たす .

$$\begin{cases} m_{11} - T(qm_{21}) = 1, \\ m_{21} - e_{-k}\bar{T}(e_k m_{11}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m_{12} - \tilde{e}_k T(\tilde{e}_{-k} q m_{22}) = 0, \\ m_{22} - \bar{T}(m_{12}) = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

この式の第一式から ,

$$\begin{aligned} \|m_{11}(\cdot, k) - 1\|_{C^\alpha} &= \|T(qm_{21})\|_{C^\alpha} \leq C_1\|qm_{21}(\cdot, k)\|_{L^p} \\ &\leq C_1\|q\|_{L^p}\|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \end{aligned} \quad (3.11)$$

を得る . 補題 2.2 より  $\partial T$  は  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) 上の有界作用素であるから

$$\begin{aligned} \|\partial m_{11}(\cdot, k)\|_{L^p} &= \|\partial T(qm_{21})\|_{L^p} \leq C_2\|qm_{21}(\cdot, k)\|_{L^p} \\ &\leq C_2\|q\|_{L^p}\|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

となる . (3.10) より  $e_k m_{21} = \bar{T}(e_k m_{11}) = \frac{1}{ik}\bar{T}\{\partial(e_k m_{11}) - e_k \partial m_{11}\}$  と変形すれば ,  
 コーシー積分の性質と一般化されたコーシーの積分公式および  $m_{11}$  の評価式を用

いて,

$$\begin{aligned}
\|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} &= \|\bar{T}(e_k m_{11})\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|k|} \{ \|\bar{T}(\partial(e_k m_{11}))\|_{L^\infty} + \|\bar{T}(e_k \partial m_{11})\|_{L^\infty} \} \\
&\leq \frac{1}{|k|} \{ \|e_k m_{11}\|_{L^\infty} + \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{e_k(\zeta) m_{11}(\zeta, k)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \right\|_{L^\infty} + C_1 \|e_k \partial m_{11}\|_{L^p} \} \\
&\leq \frac{1}{|k|} \{ \|m_{11}(\cdot, k)\|_{C^\alpha} + \frac{C_3}{2\pi} \|e_k m_{11}(\cdot, k)\|_{C^\alpha(\partial\Omega)} + C_1 C_2 \|q\|_{L^p} \|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \} \\
&\leq \frac{1}{|k|} \left\{ \left(1 + \frac{C_3}{2\pi}\right) \|m_{11}(\cdot, k)\|_{C^\alpha} + C_1 C_2 \|q\|_{L^p} \|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \right\} \\
&\leq \frac{1}{|k|} \left\{ \left(1 + \frac{C_3}{2\pi}\right) C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} + 1 + C_1 C_2 \|q\|_{L^p} \|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \right\} \\
&= \frac{1}{|k|} \left\{ \left(1 + \frac{C_3}{2\pi}\right) + C_2 \right\} C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} + \frac{1}{|k|}
\end{aligned}$$

を得る．従って,  $k \in \mathbf{C}$  が  $\{(1 + \frac{C_3}{2\pi}) + C_2\} C_1 \|q\|_{L^p} < \frac{1}{2}|k|$  を満たすならば

$$\|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{|k|}$$

が成り立つ．これを(3.11)へ代入すれば,

$$\|m_{11}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \leq \frac{2C_1}{|k|} \|q\|_{L^p}$$

を得る．

$m_{22}, m_{12}$  についても全く同様に示される．よって, (3.5) と(3.6) が示された．

次に(3.7)を示す． $m_{i3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は

$$\begin{cases} m_{33} - \bar{T}(q m_{23}) = 1 \\ m_{13} - \tilde{e}_k T(\tilde{e}_{-k} q m_{23}) = 0 \\ m_{23} - \bar{T} m_{13} = 0 \end{cases}$$

を満たすに注意して, 前と同様の計算により

$$\begin{aligned}
\|m_{23}(\cdot, k)\|_{L^\infty} &= \|\bar{T}(m_{13})\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|k|} \{ \|\bar{T}(\partial m_{13})\|_{L^\infty} + \|\bar{T}(e_k \partial(e_{-k} m_{13}))\|_{L^\infty} \} \\
&\leq \frac{1}{|k|} \{ \|m_{13}\|_{L^\infty} + \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{m_{13}(\zeta, k)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \right\|_{L^\infty} + C_1 \|\partial(e_{-k} m_{13})\|_{L^p} \} \\
&\leq \frac{1}{|k|} \left\{ \left(1 + \frac{C_3}{2\pi}\right) \|m_{13}(\cdot, k)\|_{L^\infty} + C_1 \|\partial(e_{-k} m_{13})\|_{L^p} \right\} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

を得る．ここで,

$$\begin{aligned}
\|\partial(\tilde{e}_{-k} m_{13})\|_{L^p} &= \|\partial T(\tilde{e}_{-k} q m_{23})\|_{L^p} \leq C_2 \|q m_{23}\|_{L^p} \\
&\leq C_2 \|q\|_{L^p} \|m_{23}\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

を用いて(3.12) を評価すると ,

$$\|m_{23}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|k|} \left\{ \left(1 + \frac{C_3}{2\pi}\right) \|m_{13}\|_{L^\infty} + C_1 C_2 \|q\|_{L^p} \|m_{23}\|_{L^\infty} \right\}$$

となる . さらに

$$\begin{aligned} \|m_{13}(\cdot, k)\|_{L^\infty} &= \|T(\tilde{e}_{-k} q m_{23})\|_{L^\infty} \leq C_1 \|\tilde{e}_{-k} q m_{23}\|_{L^p} \\ &\leq C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{23}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \end{aligned} \quad (3.13)$$

であるから(3.12) は

$$\|m_{23}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|k|} \left\{ \left(1 + \frac{C_3}{2\pi}\right) + C_2 \right\} C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{23}(\cdot, k)\|_{L^\infty}$$

と評価される . 従って ,  $k \in \mathbf{C}$  が  $\{(1 + \frac{C_3}{2\pi}) + C_2\} C_1 \|q\|_{L^p} < |k|$  を満たすならば  $\|m_{23}\|_{L^\infty} \leq 0$  すなわち ,  $\|m_{23}(\cdot, k)\|_{L^\infty} = 0$  を得る . このことと , (3.13) より  $\|m_{13}(\cdot, k)\|_{L^\infty} = 0$  を得る . さらに ,

$$\|m_{33}(\cdot, k) - 1\|_{C^\alpha} = \|\bar{T}(q m_{23})\|_{C^\alpha} \leq C_1 \|q m_{23}\|_{L^p} \leq C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{23}(\cdot, k)\|_{L^\infty}$$

から  $\|m_{33}(\cdot, k) - 1\|_{L^\infty} = 0$  が従う . 以上により , (3.7) が示された .

最後に(3.8) と(3.9) を示そう .  $m_{3j}$  ( $j = 1, 2$ ) は

$$\begin{cases} m_{31} - e_{-k} \bar{T}(e_k q m_{21}) = 0 \\ m_{32} - \bar{T}(q m_{22}) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

を満たす . このことと , すでに示した不等式(3.5) と(3.6) を用いて ,

$$\begin{aligned} \|m_{31}(\cdot, k)\|_{L^\infty} &= \|\bar{T}(e_k q m_{21})\|_{L^\infty} \leq C_1 \|q m_{21}(\cdot, k)\|_{L^p} \\ &\leq C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{2C_1}{|k|} \|q\|_{L^p} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \|m_{32}(\cdot, k) - \bar{T}q(\cdot)\|_{L^\infty} &= \|\bar{T}(q m_{22}) - \bar{T}q\|_{L^\infty} = \|\bar{T}q(m_{22} - 1)\|_{L^\infty} \\ &\leq C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{22}(\cdot, k) - 1\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{2C_1^2}{|k|} \|q\|_{L^p}^2 \end{aligned}$$

を得る .

□

補題 3.2 より  $M$  の，特に  $\mathcal{M} := (m_{ij}(z, k))$  ,  $1 \leq i, j \leq 2$  は  $|k| \rightarrow \infty$  とすると  $2 \times 2$  の単位行列  $I$  へ近づくことがわかる．以後， $3 \times 3$  行列  $A = (a_{ij})$  に対し，その一つの小行列を  $\mathcal{A} := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  と書くことにする．さて， $\mathcal{M}$  は(3.2) すなわち， $\mathcal{Q}\mathcal{M} = D_k \mathcal{M}$  を満たすのだから，両辺形式的に  $|k| \rightarrow \infty$  としてみると

$$\mathcal{Q} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} D_k \mathcal{M}$$

となる．従って，複素幾何光学解  $\mathcal{M}$  が構成できれば，求めようとしている未知関数  $q$  が求まる．では， $M(z, k)$  を構成するにはどうしたらよいか？ $\mathcal{Q}$  は未知関数であるから，もちろん  $M$  を(3.4) 式で与えることはできない．与えられた境界でのデータである DN 写像  $\Lambda_V$  から(3.2) を満たし，かつ補題 3.2 のような性質を持つ関数  $M(z, k)$  を構成するには，次の  $M$  の性質が重要な役割をはやす．

$\bar{\partial}$  方程式

$$M(z, k) = (I_{id} - D_k^{-1} \mathcal{Q})^{-1} I \text{ とする． } \mathcal{M}(z, k) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}, \mathcal{Q}(z) = \begin{pmatrix} 0 & q(z) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．さらに任意の  $2 \times 2$  行列  $A = (a_{ij})$  に対し， $J$  を

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & ia_{12} \\ -ia_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき， $\mathcal{M}$  は次の方程式を満たす．

**補題 3.3.**

$$\bar{\partial}_k \mathcal{M}(z, k) = \mathcal{M}(z, \bar{k}) \Gamma(z, k) S(k) \quad \text{in } L^\infty(\Omega). \quad (3.15)$$

ここで，

$$\Gamma(z, k) = \begin{pmatrix} \tilde{e}_k(z) & 0 \\ 0 & e_{-k}(z) \end{pmatrix}, \quad S(k) = -\frac{1}{\pi} J \int_{\Omega} \mathcal{P}_k \mathcal{Q}(z) \mathcal{M}(z, k) dz_R dz_I.$$

とおいた．

証明：

$$\tilde{e}_k \bar{\partial}^{-1} (\tilde{e}_{-k} f)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\tilde{e}_{-k}(\zeta - z)}{\zeta - z} f(\zeta) d\zeta_R d\zeta_I$$

に注意して，補題 2.4 から

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_k m_{12}(z, k) &= -\bar{\partial}_k \{ \tilde{e}_k(z) (\bar{\partial}^{-1} \tilde{e}_{-k} q m_{22})(z, k) \} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -i \int_{\Omega} \tilde{e}_{-k}(\zeta - z) q(\zeta) m_{22}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{\tilde{e}_{-k}(\zeta - z)}{\zeta - z} q(\zeta) \bar{\partial}_k m_{22}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right\} \\ &= -\frac{i}{\pi} \tilde{e}_k(z) \int_{\Omega} \tilde{e}_{-k}(\zeta) q(\zeta) m_{22}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \\ &\quad - \tilde{e}_k(z) \bar{\partial}^{-1} (\tilde{e}_{-k} q \bar{\partial}_k m_{22})(z, k). \end{aligned}$$

さらに(3.10) より

$$\bar{\partial}_k m_{12}(z, k) = i\tilde{e}_k(z)s_{12}(k) - \tilde{e}_k(z)\bar{\partial}^{-1}(\tilde{e}_{-k}q\partial^{-1}(\bar{\partial}_k m_{12}))(z, k)$$

を得る . ここで

$$s_{12}(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \tilde{e}_{-k}(\zeta)q(\zeta)m_{22}(\zeta, k)d\zeta_R d\zeta_I \quad (3.16)$$

とおいた .  $s_{12}(k)$  は  $z$  に依存しない関数であることに注意すれば

$$\bar{\partial}_k m_{12}(z, k) = is_{12}(k)[1 + \tilde{e}_k\bar{\partial}^{-1}\tilde{e}_{-k}q\partial^{-1}]^{-1}(\tilde{e}_k)$$

と書ける .  $v = [1 + \tilde{e}_k\bar{\partial}^{-1}\tilde{e}_{-k}q\partial^{-1}]^{-1}(\tilde{e}_k)$  とおく . これは

$$v = \tilde{e}_k[1 + \bar{\partial}^{-1}\tilde{e}_{-k}q\partial^{-1}\tilde{e}_k]^{-1}(1)$$

と書き換えられる .  $\tilde{e}_k(z) = e_{\bar{k}}(z)$ ,  $\tilde{e}_{-k}(z) = e_{-\bar{k}}(z)$  であることと , (3.10) から

$$\begin{aligned} v(z, k) &= \tilde{e}_k[1 + \bar{\partial}^{-1}e_{-\bar{k}}q\partial^{-1}e_{\bar{k}}]^{-1}(1) \\ &= \tilde{e}_k(z)m_{11}(z, \bar{k}) \end{aligned}$$

となる . 以上のことから

$$\bar{\partial}_k m_{12}(z, k) = is_{12}(k)\tilde{e}_k(z)m_{11}(z, \bar{k})$$

を得る . さらに(3.10) から

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_k m_{22}(z, k) &= \partial^{-1}(\bar{\partial}_k m_{12})(z, k) = is_{12}(k)\partial^{-1}(\tilde{e}_k m_{11}(\cdot, \bar{k})) \\ &= is_{12}(k)\tilde{e}_k m_{21}(z, \bar{k}) \end{aligned}$$

を得る .

次に  $\bar{\partial}_k m_{21}$  と  $\bar{\partial}_k m_{11}$  を計算しよう . 先ほどの計算と同様に(3.10) を利用して

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_k m_{21}(z, k) &= \bar{\partial}_k \left( \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{e_k(\zeta - z)}{\zeta - \bar{z}} m_{11}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ i \int_{\Omega} e_k(\zeta - z) m_{11}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{e_k(\zeta - z)}{\zeta - \bar{z}} \bar{\partial}_k m_{11}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right\} \\ &= ie_{-k}(z)s_{21}(k) + e_{-k}(z)\bar{T}(e_k\bar{\partial}_k m_{11})(z, k) \\ &= ie_{-k}(z)s_{21}(k) - e_{-k}(z)\bar{T}(e_k T(q\bar{\partial}_k m_{21})) \end{aligned}$$

を得る . ここで ,

$$s_{21}(k) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} e_k(\zeta)m_{11}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \quad (3.17)$$

とおいた． $s_{21}(k)$  は  $z$  に依存しない関数であるから，

$$\bar{\partial}_k m_{21}(z, k) = i s_{21}(k) [1 + e_{-k} \bar{T}(e_k T q)]^{-1} (e_{-k})$$

と書ける． $w = [1 + e_{-k} \bar{T}(e_k T q)]^{-1} (e_{-k})$  とおくと  $e_k w + \bar{T} e_k T q w = 1$  を満たし，さらに  $w$  でまとめると  $[1 + \bar{T} e_k T q e_{-k}] e_k w = 1$  となる． $e_k(z) = \tilde{e}_{\bar{k}}$  であるから  $w$  は

$$w = e_{-k} [1 + \bar{T} \tilde{e}_{\bar{k}} T q \tilde{e}_{-\bar{k}}]^{-1} (1) = e_{-k} m_{22}(z, \bar{k})$$

と書き換えられる．以上のことから

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_k m_{21}(z, k) &= i s_{21}(k) e_{-k}(z) m_{22}(z, \bar{k}) \\ \bar{\partial}_k m_{11}(z, k) &= i s_{21}(k) e_{-k}(z) m_{12}(z, \bar{k}) \end{aligned}$$

を得る．

□

$\mathcal{M}$  は  $D\mathcal{P}_k \mathcal{M} = \mathcal{P}_k \mathcal{Q} \mathcal{M}$  を満たすから，Green の公式より

$$\begin{aligned} S(k) &= -\frac{1}{\pi} J \int_{\Omega} D\mathcal{P}_k \mathcal{M} dz_R dz_I \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \tilde{e}_{-k}(\zeta) m_{12}(\zeta, k) d\zeta \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e_k(\zeta) m_{21}(\zeta, k) d\bar{\zeta} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{-i\bar{k}\zeta} \Phi_{12}(\zeta, k) d\zeta \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}\bar{\zeta}} \Phi_{21}(\zeta, k) d\bar{\zeta} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18) \end{aligned}$$

と表される．このことから， $S(k)$  は複素幾何光学解の境界値  $\Phi_{12}|_{\partial\Omega}$  と  $\Phi_{21}|_{\partial\Omega}$  から定まることがわかる．

$M = (I_{id} - D_k^{-1} Q) I$  に対し， $\mathcal{M}$  は  $\bar{\partial}_k$  方程式(3.15) を満たす．逆に， $N|_{\partial\Omega}$  から(3.18) で定義される  $S(k)$  を係数に持つ  $\bar{\partial}_k$  方程式の解  $N(z, k)$  は，後に示す一意性により  $M = N$  となる．先に述べたように  $M$  が求まれば  $|k| \rightarrow \infty$  として  $q$  が求まるのであった．これにより，残りの問題は，DN 写像  $\Lambda_V$  から  $M|_{\partial\Omega}$  を構成することである．これについては次の章で考察することにしよう．

ところで， $M$  の第 3 行目についても  $\bar{\partial}_k$  を計算してみると次のことがわかる．

補題 3.4.  $M = (m_{ij}) = (I_{id} - D_k^{-1} Q) I$  の  $m_{31}$  と  $m_{32}$  は次の方程式を満たす．

$$\begin{cases} \bar{\partial}_k m_{31}(z, k) = -i e_{-k}(z) s_{31}(k) + e_{-k}(z) i s_{21}(k) m_{32}(z, \bar{k}) \\ \bar{\partial}_k m_{32}(z, k) = i s_{12}(k) e_{\bar{k}}(z) m_{31}(z, \bar{k}) \end{cases} \quad (3.19)$$

ここで， $s_{12}$  と  $s_{21}$  はそれぞれ(3.16)，(3.17) で与えられたものであり，

$$s_{31}(k) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} e_k(\zeta) q(\zeta) m_{21}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \quad (3.20)$$

である．

証明：補題 3.3 の結果を利用して，

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_k m_{32}(z, k) &= \bar{\partial}_k(\bar{T} q m_{22}) = \bar{\partial}_k \left( -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{q(\zeta) m_{22}(\zeta, k)}{\zeta - \bar{z}} d\zeta_R d\zeta_I \right) \\
&= \bar{T}(q \bar{\partial}_k m_{22}) \\
&= \bar{T}(q i s_{12}(k) \bar{e}_k m_{21}(\cdot, \bar{k})) \\
&= i s_{12}(k) \bar{T}(q \bar{e}_k m_{21}(\cdot, \bar{k})) \\
&= i s_{12}(k) e_{\bar{k}}(z) m_{31}(z, \bar{k})
\end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
\bar{T}(e_k q \bar{\partial}_k m_{21}) &= \bar{T}(e_k q i s_{21}(k) e_{-k} m_{22}(\cdot, \bar{k})) = i s_{21}(k) \bar{T}(q m_{22}(\cdot, \bar{k})) \\
&= i s_{21}(k) m_{32}(z, \bar{k})
\end{aligned}$$

となるから，今までと同様の計算により

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_k m_{31}(z, k) &= \bar{\partial}_k(e_{-k} \bar{T}(e_k q m_{21})) \\
&= \bar{\partial}_k \left( -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{e_k(\zeta - z)}{\zeta - \bar{z}} q(\zeta) m_{21}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right) \\
&= -\frac{1}{\pi} \left( i \int_{\Omega} e_k(\zeta - z) q(\zeta) m_{21}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{e_k(\zeta - z)}{\zeta - \bar{z}} q(\zeta) \bar{\partial}_k m_{21}(\zeta, k) d\zeta_R d\zeta_I \right) \\
&= -i e_{-k}(z) s_{31}(k) + e_{-k}(z) \bar{T}(e_k q \bar{\partial}_k m_{21}) \\
&= -i e_{-k}(z) s_{31}(k) + i s_{21}(k) m_{32}(z, \bar{k})
\end{aligned}$$

を得る．

□

$s_{12}(k)$  と  $s_{21}(k)$  はそれぞれ複素幾何光学解の境界値  $\Phi_{12}|_{\partial\Omega}$ ,  $\Phi_{21}|_{\partial\Omega}$  から定まるのであった． $s_{31}(k)$  は  $\Phi_{11}|_{\partial\Omega}$  と  $\Phi_{21}|_{\partial\Omega}$  から定まるのである．このことをみてみよう．(3.10) 式と Green の公式から

$$\begin{aligned}
s_{31}(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \{ \bar{\partial}(e_k m_{11}) - m_{11} \bar{\partial} e_k \} dz_R dz_I \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \bar{\partial}(e_k m_{11}) dz_R dz_I - \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} i \bar{k} e_k m_{11} dz_R dz_I \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \bar{\partial}(e_k m_{11}) dz_R dz_I - \frac{i \bar{k}}{\pi} \int_{\Omega} \partial(e_k m_{21}) dz_R dz_I \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e_k(z) m_{11}(z, k) dz + \frac{\bar{k}}{2\pi} \int_{\partial\Omega} e_k(z) m_{21}(z, k) d\bar{z} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

となる．

注意 1. これまでの計算で行った  $\bar{\partial}_k$  と  $\bar{T}$  との入れ替えは補題 2.4 により証明される．

## 4 Step 1 の証明

DN 写像  $\Lambda_V$  から複素幾何光学解の境界値  $\Phi|_{\partial\Omega}$  が構成できることを示す.

$$D = \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. 方程式

$$(D - Q)v = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.1)$$

について考える.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_q &= \{v|_{\partial\Omega} : v \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega}) \text{ は(4.1) を満たす} \} \\ \mathcal{BR} &= \{h \in C^\alpha(\partial\Omega) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega) \times C^\alpha(\partial\Omega) : (\eta h_1 - \bar{\eta} h_3) \in C_0^{1,\alpha}(\partial\Omega), \\ &\quad iH_q(\eta - \bar{\eta}h_3) = \eta h_1 + \bar{\eta}h_3, \quad \partial_\tau h_2 = i(\eta h_1 - \bar{\eta}h_3)\} \end{aligned}$$

とおく.

補題 4.1.  $Q \in L^p(\Omega)$  ならば  $\mathcal{C}_q = \mathcal{BR}$  である.

証明: まず  $\mathcal{BR} \subset \mathcal{C}_q$  を示そう.  $h \in \mathcal{BR}$  とし,  $u$  は

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0, & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = i\partial_\tau^{-1}(\eta h_1 - \bar{\eta} h_3) \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega). \end{cases}$$

の  $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  解とする. この  $u$  に対し,  ${}^t(\varphi, \psi, \chi) = {}^t(\partial u, u, \bar{\partial} u) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$  とおく. 容易に  $(D - Q){}^t(\varphi, \psi, \chi) = \mathbf{0}$  がわかる.  $h \in \mathcal{BR}$  であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\eta} & -i\bar{\eta} \\ \eta & i\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_V(u|_{\partial\Omega}) \\ \partial_\tau(u|_{\partial\Omega}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\eta} & -i\bar{\eta} \\ \eta & i\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\Lambda_V\partial_\tau^{-1}(\eta h_1 - \bar{\eta} h_3) \\ i(\eta h_1 - \bar{\eta} h_3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\eta} & -i\bar{\eta} \\ \eta & i\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta h_1 + \bar{\eta} h_3 \\ i(\eta h_1 - \bar{\eta} h_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となり, 従って  $h \in \mathcal{C}_q$  となる. なぜならば,  $\psi|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$  だからである.

次に  $\mathcal{C}_q \subset \mathcal{BR}$  を示そう.  $h \in \mathcal{C}_q$  とし,  ${}^t(\varphi, \psi, \chi) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$  は方程式

$$\begin{cases} (D - Q){}^t(\varphi, \psi, \chi) = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega \\ {}^t(\varphi, \psi, \chi)|_{\partial\Omega} = h. \end{cases}$$

の解とする. このとき,  $\varphi, \psi$  と  $\chi$  は

$$\bar{\partial}\varphi = q\psi, \quad \partial\psi = \varphi, \quad \partial\chi = q\psi$$

を満たす．従って， $\varphi = \partial\psi$ ， $\chi = \bar{\partial}\psi$  ととれば簡単な計算により，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} \partial\psi \\ \psi \\ \bar{\partial}\psi \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\eta}\Lambda_V h_2 - i\bar{\eta}\partial_\tau h_2 \\ h_2 \\ \eta\Lambda_V h_2 + i\eta\partial_\tau h_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\eta} & 0 & -i\bar{\eta} \\ 0 & 2 & 0 \\ \eta & 0 & i\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_V h_2 \\ h_2 \\ \partial_\tau h_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

を得る．このことから  $h \in \mathcal{BR}$  を得る．なぜならば，

$$\begin{pmatrix} \Lambda_V h_2 \\ h_2 \\ \partial_\tau h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & 0 & \bar{\eta} \\ 0 & 1 & 0 \\ i\eta & 0 & -i\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

と書けるからである．

□

(3.4) 式で定義された  $M(z, k)$  に対して， $(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)})$  を  $\Phi = M(z, k)E(z, k)$  の列ベクトル表示とする．Step 1 は次の補題を書き下したものである．

**補題 4.2.** 次の方程式を満たす  $f, g \in C^\alpha(\partial\Omega) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega) \times C^\alpha(\partial\Omega)$  が存在する．

$$\begin{pmatrix} C(e^{-ikz} f_1) & \tilde{e}_{-k} C(e^{-i\bar{k}z} g_1) \\ e_{-k} \bar{C}(e^{i\bar{k}\bar{z}} f_2) & \bar{C}(e^{ik\bar{z}} g_2) \\ e_{-k} \bar{C}(e^{i\bar{k}\bar{z}} f_3) & \bar{C}(e^{ik\bar{z}} g_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} (iH_V - 1)\eta & 0 & -(iH_V + 1)\bar{\eta} \\ -i\eta & \partial_\tau & i\bar{\eta} \end{pmatrix} (f, g) = O \quad (4.3)$$

さらに， $(f, g) = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})|_{\partial\Omega}$  である．ここで，

$$C(\psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \bar{C}(\psi) = \overline{C(\bar{\psi})}$$

とおいた．

**証明：**  $M = (I_{id} - D_k^{-1}Q)^{-1}I$  に対し， $\Phi(z, k) = M(z, k)E(z, k)$  とおく． $\Phi$  は  $(D - Q)\Phi = O$  を満たすので Lemma 4.1 から  $\Phi^{(1)}|_{\partial\Omega}, \Phi^{(2)}|_{\partial\Omega} \in \mathcal{BR}$  であることがわかる．従って  $(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})|_{\partial\Omega}$  は (4.3) を満たす．

さらに， $M$  は  $D_k M - QM = O$ ，すなわち  $DP_k M - P_k QM = O$  を満たすので，一般化された Cauchy の積分公式から

$$M - P_k^{-1}D^{-1}P_k QM = P_k^{-1}C(P_k M|_{\partial\Omega}), \quad C = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C} \end{pmatrix}$$

を得る．ゆえに  $M$  の定義から

$$\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{P}_k M|_{\partial\Omega}) = (I_{id} - D_k^{-1}Q)M = I.$$

がわかり， $(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})|_{\partial\Omega}$  は (4.2) も満たすことがわかる．

逆に， $(f, g)$  は (4.2) と (4.3) を満たすものとしよう．このとき  $f, g \in BR$  である．Lemma 4.1 から  $3 \times 2$  行列  $H$  が存在し

$$(D - Q)H = O, \quad H|_{\partial\Omega} = (f, g)$$

を満たす． $G = HE^{-1}(z, k)$  とおけば， $G$  は  $D_k G - QG = O$  を満たす．ゆえに  $G$  は

$$(I_{id} - D_k^{-1}Q)G = \mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{P}_k H|_{\partial\Omega})$$

を満たす． $H|_{\partial\Omega}$  は (4.2) を満たしているので， $G = (I_{id} - D_k^{-1}Q)I = M$ ，すなわち  $H = ME = \Phi$  を得る．

□

## 5 Step 2 の証明

$\bar{\partial}_k$  方程式の解の一意性を示そう． $s_{12}(k)$ ， $s_{21}(k)$ ， $s_{31}(k)$  はそれぞれ (3.16)，(3.17)，(3.20) で与えられたものとする．これらの関数には次の評価式が成立する．

補題 5.1.  $0 < \delta < 1$  に対し， $C_1^2 |\Omega|^{1/p} \|q\|_{L^p} < \delta$  ならば任意の  $k \in \mathbb{C}$  に対し，次の評価式が成立する．

$$\begin{aligned} |s_{12}(k)| &\leq \frac{\gamma_1(q)}{1 + |k|} \|q\|_{W^{1,p}} \\ |s_{21}(k)| &\leq \frac{\gamma'}{1 + |k|} (\|q\|_{L^p} + 1) \\ |s_{31}(k)| &\leq \frac{\gamma_2(q)}{1 + |k|} \|q\|_{L^p} \end{aligned}$$

ここで， $\gamma_1(q)$  と  $\gamma_2(q)$  は  $\|q\|_{L^p}$  に依存し，ある定数  $C > 0$  が存在して一様に  $C < \gamma_1(q), \gamma_2(q)$  となる正の定数である．また， $\gamma'$  は  $|k|$  と  $q$  には依存しない正の定数である．

証明：補題 2.1 と (3.10) より

$$\begin{aligned} \|m_{22} - 1\|_{L^\infty} &= \|\bar{T}m_{12}\|_{L^\infty} \leq C_1 \|m_{12}\|_{L^p} \leq C_1 |\Omega|^{1/p} \|m_{12}\|_{L^\infty} \\ \|m_{12}\|_{L^\infty} &= \|\tilde{e}_{-k} T(\tilde{e}_{-k} q m_{22})\|_{L^\infty} \leq C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{22}\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

仮定より  $C_1^2 |\Omega|^{1/p} \|q\|_{L^p} < \delta < 1$  だから，すべての  $k \in \mathbb{C}$  に対し

$$\|m_{22}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{1 - \delta}$$

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned} |s_{12}(k)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} |q(z)m_{22}(z, k)| dz_R dz_I \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-\delta} \|q\|_{L^1} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-\delta} |\Omega|^{1/p'} \|q\|_{L^p}. \end{aligned}$$

がわかる．Green の公式より， $k \neq 0$  に対し

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{e}_{-k}(z)q(z) dz_R dz_I \right| = \frac{1}{|k|} \left| \int_{\Omega} (\partial \tilde{e}_{-k}(z))q(z) dz_R dz_I \right| \leq \frac{C_4}{|k|} \|q\|_{W^{1,p}}$$

となる．ここで， $C_4$  は  $k$  と  $q$  には依存しない定数である．(3.5) より十分大きな  $|k|$  に対しては  $\|m_{22}(\cdot, k) - 1\|_{L^\infty} \leq 2C_1 \|q\|_{L^p}/|k|$  であったから， $M > 0$  を十分大きな定数として， $M < |k|$  に対して

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{e}_{-k}(z)q(z)(m_{22}(z, k) - 1) dz_R dz_I \right| \leq \frac{2C_1 |\Omega|^{1/p'}}{|k|} \|q\|_{L^p}^2.$$

となる．従って  $M < |k|$  に対して

$$\begin{aligned} |s_{12}(k)| &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{\Omega} \tilde{e}_{-k}(z)q(z) dz_R dz_I \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\Omega} \tilde{e}_{-k}(z)q(z)(m_{22}(z, k) - 1) dz_R dz_I \right| \\ &\leq \frac{C_5(q)}{|k|} \|q\|_{W^{1,p}}, \end{aligned}$$

ここで  $C_5(q) = (C_4 + 2C_1 |\Omega|^{1/p'} \|q\|_{L^p})/\pi$  である．以上からすべての  $k \in \mathbb{C}$  に対して

$$|s_{12}(k)| \leq \frac{\gamma_1(q)}{1 + |k|} \|q\|_{W^{1,p}}$$

が成立する．ここで， $\gamma_1(q) = \frac{2+M}{\pi(1-\delta)} |\Omega|^{1/p'} + C_5(q)$  である．

同様にして，

$$\begin{aligned} \|m_{11} - 1\|_{L^\infty} &= \|T(qm_{21})\|_{L^\infty} \leq C_1 \|q\|_{L^p} \|m_{21}\|_{L^\infty} \\ \|m_{21}\|_{L^\infty} &\leq C_1 |\Omega|^{1/p} \|m_{11}\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

と  $C_1^2 |\Omega|^{1/p} \|q\|_{L^p} < \delta < 1$  より，すべての  $k \in \mathbb{C}$  に対して，

$$\|m_{11}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{1-\delta}$$

が成り立つ． $M > 0$  を十分大きくとると， $M < |k|$  に対して，

$$\begin{aligned} |s_{21}(k)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} e_k(z) dz_R dz_I + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} e_k(z)(m_{11}(z, k) - 1) dz_R dz_I \right| \\ &\leq \frac{C'}{|k|} (\|q\|_{L^p} + 1) \end{aligned}$$

が成立する．ここで， $C'$  は  $p$  と  $\Omega$  だけに依存する正の定数である．以上のことから，すべての  $k \in \mathbf{C}$  に対して，

$$|s_{21}(k)| \leq \frac{\gamma'}{1 + |k|} (\|q\|_{L^p} + 1)$$

が成立する．ここで， $\gamma' = \frac{2|\Omega|}{\pi(1-\delta)}(1 + M)$  である．

最後に  $s_{31}(k)$  について評価しよう． $\|m_{21}\|_{L^\infty} \leq C_1|\Omega|^{1/p}\|m_{11}\|_{L^\infty}$  と  $\|m_{11}\|_{L^\infty} \leq C_1\|q\|_{L^p}\|m_{21}\|_{L^\infty} + 1$  さらに  $\|q\|_{L^p}$  の仮定からすべての  $k \in \mathbf{C}$  に対して

$$\|m_{21}(\cdot, k)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_1|\Omega|^{1/p}}{1 - \delta}$$

が成り立つ．従って，すべての  $k \in \mathbf{C}$  に対し，

$$|s_{31}(k)| \leq \frac{C_1|\Omega|^{1/p}}{\pi(1 - \delta)} |\Omega|^{1/p'} \|q\|_{L^p} = \frac{C_1|\Omega|}{\pi(1 - \delta)} \|q\|_{L^p}$$

を得る．また，(3.6) から  $M >$  を十分大きな定数として， $M < |k|$  に対し，

$$|s_{31}(k)| \leq \frac{1}{\pi} \|m_{21}\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |q(z)| dz_R dz_I \leq \frac{2|\Omega|^{1/p'}}{\pi} \frac{1}{|k|} \|q\|_{L^p}$$

が成り立つ．従ってすべての  $k \in \mathbf{C}$  に対し，

$$|s_{31}(k)| \leq \frac{\gamma_2}{|k|} \|q\|_{L^p}, \quad \gamma_2 = \frac{C_1|\Omega|(2 + M)}{\pi(1 - \delta)} + \frac{2|\Omega|^{1/p'}}{\pi}$$

を得る．

□

補題 5.2.  $a(k)$  と  $b(k)$  は

$$|a(k)| \leq \frac{A(\varepsilon + 1)}{1 + |k|}, \quad |b(k)| \leq \frac{B\varepsilon}{1 + |k|}$$

を満たすとする． $f_i - 1, g_i \in L^{2,\delta}(\mathbf{C})$  ( $-1 < \delta < 0$ )， $i = 1, 2$  は

$$\begin{cases} \bar{\partial}_k f_i(k) = a(k)g_i(\bar{k}) \\ \bar{\partial}_k g_i(k) = b(k)f_i(\bar{k}) \end{cases}$$

を満たしているとする．このとき  $\varepsilon > 0$  が十分小さければ  $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$  である．

証明：  $F = f_1 - f_2, G = g_1 - g_2$  とおく． $F, G \in L^{2,\delta}(\mathbf{C})$  は積分方程式

$$\begin{cases} F(k) = \bar{\partial}_k^{-1}(a(\cdot)G(\bar{\cdot})) \\ G(k) = \bar{\partial}_k^{-1}(b(\cdot)F(\bar{\cdot})) \end{cases}$$

を満たす.  $\bar{\partial}_k^{-1}$  は  $L^{2,\delta+1}(\mathbf{R}^2)$  から  $L^{2,\delta}(\mathbf{R}^2)$  への有界作用素であり,  $|\bar{\partial}_k^{-1} f|_{L^{2,\delta}} \leq \tilde{C} \|f\|_{L^{2,\delta+1}}$  を満たす. また  $\|F(\cdot)\|_{L^{2,\delta}} = \|F(\cdot)\|_{L^{2,\delta}}$  であるから

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^{2,\delta}} &= \|\bar{\partial}_k^{-1}(a(\cdot)G(\cdot))\|_{L^{2,\delta}} \leq \tilde{C} \|a(\cdot)G(\cdot)\|_{L^{2,\delta+1}} \\ &= \tilde{C} \left( \int_{\mathbf{R}^2} (1+|k|^2)|a(k)|^2(1+|k|^2)^\delta |G(\bar{k})|^2 dk_R dk_I \right)^{1/2} \\ &\leq \tilde{C} A(\varepsilon+1) \|G\|_{L^{2,\delta}}. \end{aligned}$$

を得る. 同様に  $\|G\|_{L^{2,\delta}} = \|\bar{\partial}_k^{-1}(b(\cdot)F(\cdot))\|_{L^{2,\delta}} \leq \tilde{C} B\varepsilon \|F\|_{L^{2,\delta}}$  を得る. ゆえに  $\|F\|_{L^{2,\delta}} \leq \tilde{C}^2 AB\varepsilon(\varepsilon+1) \|F\|_{L^{2,\delta}}$  が成立する. 従って,  $\tilde{C}^2 AB\varepsilon(\varepsilon+1) < 1$  ならば  $\|F\|_{L^{2,\delta}} = \|G\|_{L^{2,\delta}} = 0$  を得る.

□

この補題により, (3.19) も唯一つの解を持つことがわかる.

## 6 Step 3 の証明

$B_r(s)$  を半径  $r$ , 中心  $s$  の円とする.  $M$  は  $D_k M - QM = O$  を満たすので,

$$\begin{aligned} \lim_{|k_0| \rightarrow \infty} \int_{B_1(k_0)} D_k M(z, k) dk_R dk_I &= Q(z) \lim_{|k_0| \rightarrow \infty} \int_{B_1(k_0)} M(z, k) dk_R dk_I \\ &= Q(z)\pi + Q(z) \lim_{|k_0| \rightarrow \infty} \int_{B_1(k_0)} (M(z, k) - I) dk_R dk_I. \end{aligned}$$

右辺第二項は 0 になる. 実際, (3.5) から

$$\begin{aligned} \int_{B_1(k_0)} |m_{11}(z, k) - 1| dk_R dk_I &\leq \int_{B_1(k_0)} \frac{C}{|k|} dk_R dk_I \\ &\leq C\pi \frac{1}{|k_0| - 1} \rightarrow 0 \quad (|k_0| \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

であり, ほかの成分も補題 3.2 から同様の計算により消えることがわかる.

両辺の (1, 2) 成分に注目すれば, 公式

$$q(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{|k_0| \rightarrow \infty} \int_{B_1(k_0)} e^{ik\bar{z}} \bar{\partial}_z e^{-ik\bar{z}} m_{12}(z, k) dk_R dk_I$$

を得る.

□

$\bar{\partial}_k$  方程式(3.19) を解いて  $m_{32}(z, k)$  を求めると, 補題 3.2 より  $m_{32}(z, k) \rightarrow \bar{T}q(z)$  ( $|k| \rightarrow \infty$ ) であったから, 別の公式

$$q(z) = \partial_z \lim_{|k| \rightarrow \infty} m_{32}(z, k)$$

を得る.

## 7 $\|V\|_{W^{1,p}}$ の大きさについて

ここで述べた方法について,  $\|V\|_{W^{1,p}}$  はどれくらい小さければよいのかまとめてみよう.

正の定数  $C_1 \sim C_5$  は以下のものとする.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{C^\alpha} &\leq C_1 \|f\|_{L^p}, & \|\partial T f\|_{L^p} &\leq C_2 \|f\|_{L^p}, \\ \left\| \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} &\leq C_3 \|f\|_{C^\alpha(\partial\Omega)}, & \left| \int_{\Omega} q(z) \partial \bar{e}_{-k}(z) dz_R dz_I \right| &\leq C_4 \|q\|_{W^{1,p}}, \\ \|\bar{\partial}_k^{-1} f\|_{L^{2,s}} &\leq C_5 \|f\|_{L^{2,s+1}} \quad (-1 < s < 0) \end{aligned}$$

$\|V/4\|_{W^{1,p}} = \|q\|_{W^{1,p}} = \varepsilon$  とおく.  $0 < \delta < 1$  とする. 補題 3.1 と補題 5.1 から  $\varepsilon$  は

$$C_1^2 |\Omega|^{1/p} \varepsilon < \delta \tag{7.1}$$

を満たす必要がある.  $M > 0$  を以下の条件を満たす  $p$  と  $\Omega$  から定まる正の定数とする.

$$M \geq -1 + (1 - \delta) \max \left\{ \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}, 2C_1 \right\}$$

補題 5.2 から  $\varepsilon$  は

$$C_5^2 \gamma' \gamma_1(\varepsilon) \varepsilon (\varepsilon + 1) < 1 \tag{7.2}$$

を満たす必要がある. ここで,

$$\begin{aligned} \gamma' &= \frac{|\Omega|}{\pi(1-\delta)} (1+M) \\ \gamma_1(\varepsilon) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{|\Omega|^{1/p'} (2+M)}{1-\delta} + C_4 \right) + \frac{2C_1 |\Omega|^{1/p'}}{\pi} \varepsilon \end{aligned}$$

である. (7.1) と (7.2) から  $\varepsilon$  すなわち  $\|V\|_{W^{1,p}}$  は

$$\frac{1}{4} \|V\|_{W^{1,p}} < \min \left\{ \frac{\delta}{C_1^2 |\Omega|^{1/p}}, \frac{1-\delta}{C_5^2 \gamma' (C_6 + \frac{C_7 \delta}{C_1^2 |\Omega|^{1/p}}) (1 + \frac{\delta}{C_1^2 |\Omega|^{1/p}})}, \frac{M}{\{2(1 + \frac{C_3}{2\pi}) + C_2\} C_1} \right\}$$

を満たすものである. ここで,

$$C_6 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{|\Omega|^{1/p'} (2+M)}{1-\delta} + C_4 \right), \quad C_7 = \frac{2C_1 |\Omega|^{1/p'}}{\pi}$$

とおいた.

## 参考文献

- [1] R. Brown and G. Uhlmann, Uniqueness in the conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions, *Comm. in PDE*. **22** (1997), 1009-1027.
- [2] E. Francini, Recovering a complex coefficient in a planar domain from the Dirichlet-to-Neumann map, *Inverse Problems*. **16** (2000), 107-119.
- [3] 池畠優, 中村玄, 境界値逆問題... Calderon からの15年, 数学48巻3号, 岩波書店, 1996.
- [4] V. Isakov and A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional semilinear elliptic inverse problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3375-3390.
- [5] 磯崎洋, 散乱理論と逆問題, 数学59巻2号, 岩波書店, 2007.
- [6] H. Kang, A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in two dimensions, *J. Math. Anal. Appl.* **270** (2002), 291-302.
- [7] H. Kang and G. Uhlmann, Inverse problems for the Pauli Hamiltonian in two dimensions, *J. Fourier Anal. Appl.* **10** (2004), 201-215.
- [8] K. Knudsen, On the inverse conductivity problem. Ph.D. thesis, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University 2002.
- [9] K. Knudsen and A. Tamasan, Reconstruction of less regular conductivities in plane, *Comm. in PDE* **29** (2004), 361-381.
- [10] A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem, *Annals of Math.* **143** (1996), 71-96.
- [11] A. Nachman, Reconstructions from boundary measurements, *Annals of Math.* **128** (1988), 531-576.
- [12] I. N. Vekua, Generalized analytic functions, Pergamon Press, London, 1962.



# 完全非線形偏微分方程式の解の等高面の除去可能性について<sup>1</sup>

広島大学・大学院理学研究科 滝本 和広<sup>2</sup>

## 1 はじめに

自然現象や社会現象の数学的モデルとして偏微分方程式が登場するが、例えば極小曲面を考えると古典解ばかりではなく特異性を持った解も出現しうる。そして特異集合やその周りにおける解の挙動の解析は重要な研究課題であり、既に多くの結果が得られている。例えば、連続な調和関数のクラスにおいては polar set (容量が 0 である集合) は常に除去可能であることが知られている。

さて、ここでは「一風変わった」結果を紹介する。20 世紀の初頭に Radó は次の定理を証明した。

**Theorem 1.1.** [19] 領域  $\Omega \subset \mathbb{C}$  上で連続な複素数値関数  $f$  が  $\Omega \setminus f^{-1}(0)$  で正則ならば、 $f$  は  $\Omega$  全体で正則である。

即ち「正則関数のクラスにおいて、(関数が連続ならば) 等高面は除去可能である」ことを意味する。後に、調和関数に対して次のような等高面の除去可能性に関する結果が得られた。

**Theorem 1.2.** [1, 8, 13]  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を領域とし、 $u \in C^1(\Omega)$  とする。もし  $u$  が  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$  上で調和ならば、 $u$  は  $\Omega$  全体で調和である。

これらの結果が「一風変わっ」ている点は、多くの研究においては定義域内のある決められた集合の除去可能性を論じているのに対し、**像集合** (ここでは 1 点) の方を考え、その逆像の除去可能性を論じている点である。微分幾何学における Sard の定理に代表されるように、像集合に着目して特異性を論じることは大変興味深い。

この種の「等高面の除去可能性」に関する問題については、一般の線形楕円型偏微分方程式に対しては Šabat [20]、 $p$ -Laplace 方程式や一般の準線形方程式に対しては Kilpeläinen, Juutinen-Lindqvist [12, 14, 15] による結果がある。しかしながら、完全非線形方程式に対してはこれまで研究はなされていなかった。また、等高面の除去可能性に関するこれまでの研究は楕円型方程式についてのみなされており、放物型方程式に対しては (線形・非線形にかかわらず) 結果は知られていなかった。(ただし、Juutinen-Lindqvist の論文 [15] において (準線形) 放物型方程式に対しても結果が得られるというコメントがある。しかし定理の形としては述べられていない。)

本稿では、**完全非線形楕円型偏微分方程式**

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

<sup>1</sup>研究集会「偏微分方程式と現象：PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007」, 2007 年 11 月 17 日

<sup>2</sup>E-mail: takimoto@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

および完全非線形放物型偏微分方程式

$$u_t + F(t, x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \quad (2)$$

に対して次の問題を考察する.

**問題.** 関数  $u$  が, 領域全体から  $u$  の 0-等高面  $u^{-1}(0) = \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}$  or  $\{(t, x) \in \mathcal{O} \mid u(t, x) = 0\}$  を除いた集合上で方程式 (1) または (2) の解であるならば, 実は  $u$  は領域全体で (1) または (2) の解となっているか?

ここで, 我々は「解」として粘性解を考える. 以下, 本稿では主に楕円型方程式 (1) について考える. 次の節では (1) の粘性解の定義を与える. 第 3 節で主結果を述べ, その証明のスケッチを第 4 節で述べる. 第 5 節では放物型方程式 (2) に対する結果および  $F(x, u, Du, D^2u)$  が  $Du = 0$  において特異性を持つ場合の等高面の除去可能性について結果を与える. 最後に第 6 節で最近の進展について触れて本稿を終える.

## 2 準備 ～粘性解の定義～

ここでは, 完全非線形楕円型方程式 (1) の粘性解の定義を与える. 粘性解理論は 1980 年代以降 Crandall, Evans, 石井, Jensen, Lions ら多くの数学者によって発展してきた. 詳しくは [6, 7, 9, 11]などを参照されたい.

以下,  $\mathbb{S}^{n \times n}$  を  $n$  次実対称行列全体とし,  $\mathbb{S}^{n \times n}$  に次の (半) 順序を導入する:

$$X, Y \in \mathbb{S}^{n \times n} \text{ に対して } X \leq Y \stackrel{\text{def}}{\iff} (Y - X)\xi \cdot \xi \geq 0 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (3)$$

また, 以下の記号を用いる.

$$\text{USC}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty), u \text{ は } \Omega \text{ で上半連続関数}\}, \quad (4)$$

$$\text{LSC}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty], u \text{ は } \Omega \text{ で下半連続関数}\}. \quad (5)$$

いま,  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  内の領域とする. このとき,  $F = F(x, u, Du, D^2u)$  が次の 2 つの条件を満たすと仮定する.

(A1)  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続関数.

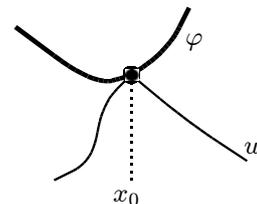
(A2)  $F$  は退化楕円型である. 即ち  $\forall x \in \Omega, \forall r \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}^n, \forall X, \forall Y \in \mathbb{S}^{n \times n}$  に対し,

$$X \geq Y \text{ ならば } F(x, r, q, X) \leq F(x, r, q, Y). \quad (6)$$

**Definition 2.1.**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  内の領域とし, 条件 (A1), (A2) が成立していると仮定する.

(i)  $u \in \text{USC}(\Omega)$  が (1) の粘性劣解

$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \not\equiv -\infty$ , かつ  $\forall x_0 \in \Omega, \forall \varphi \in C^2(\Omega)$  に対して  $u - \varphi$  が  $x_0$  において最大値 0 を取るならば  $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$ .

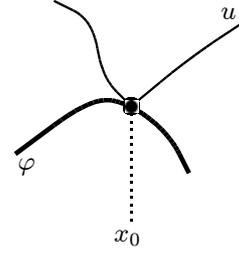


(ii)  $u \in \text{LSC}(\Omega)$  が (1) の粘性優解

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \not\equiv \infty, \text{ かつ } \forall x_0 \in \Omega, \forall \varphi \in C^2(\Omega) \text{ に対して}$$

$$u - \varphi \text{ が } x_0 \text{ において最小値 } 0 \text{ を取るならば}$$

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$



(iii)  $u \in C(\Omega)$  が (1) の粘性解

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \text{ は (1) の粘性劣解かつ粘性優解.}$$

このとき, 条件 (A1), (A2) の下では,  $u \in C^2(\Omega)$  が (1) の古典解であるならば,  $u$  は (1) の粘性解であることが容易に証明できる. 従って粘性解は古典解より弱い意味の解 (即ち, 広い意味の解) となっていることがわかる.

次に, (1) に対して別の粘性解 (relaxed viscosity solution) の概念を与える. 粘性解との違いは, 試験関数  $\varphi$  と “touching point”  $x_0$  が  $D\varphi(x_0) = 0$  を満たす時は何も要求しないことである.

**Definition 2.2.**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  内の領域とし, 条件 (A1), (A2) が成立していると仮定する.

(i)  $u \in \text{USC}(\Omega)$  が (1) の relaxed viscosity subsolution

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \not\equiv -\infty \text{ かつ } \forall x_0 \in \Omega, \forall \varphi \in C^2(\Omega) \text{ に対して}$$

$$u - \varphi \text{ が } x_0 \text{ において最大値 } 0 \text{ を取り, かつ } D\varphi(x_0) \neq 0 \text{ ならば}$$

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0.$$

(ii)  $u \in \text{LSC}(\Omega)$  が (1) の relaxed viscosity supersolution

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \not\equiv \infty \text{ かつ } \forall x_0 \in \Omega, \forall \varphi \in C^2(\Omega) \text{ に対して}$$

$$u - \varphi \text{ が } x_0 \text{ において最小値 } 0 \text{ を取り, かつ } D\varphi(x_0) \neq 0 \text{ ならば}$$

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$

(iii)  $u \in C(\Omega)$  が (1) の relaxed viscosity solution

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \text{ は (1) の relaxed viscosity subsolution かつ relaxed viscosity supersolution.}$$

明らかに  $u$  が (1) の粘性解ならば relaxed viscosity solution である. 後に, ある条件の下では, 粘性解と relaxed viscosity solution の概念が一致することを示す (準線形方程式の場合は [15] で示されている). また, この定義を用いて  $Du = 0$  上で特異性を持った方程式に対して, 等高面の除去可能性に関する定理を述べる.

### 3 主結果

この節では完全非線形楕円型方程式 (1) に対する等高面の除去可能性に関する定理について述べる.

**Theorem 3.1.**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  内の領域とし, (A1), (A2) および次の 2 つの条件を仮定する.

(A3) 任意の  $x \in \Omega$  に対して  $F(x, 0, 0, O) = 0$ .

(A4)  $\alpha > 2$  が存在し, 任意のコンパクト集合  $K \Subset \Omega$  に対して, ある  $\varepsilon > 0$ ,  $C > 0$ ,  $\omega_K(0) = 0$  かつ非減少な関数  $\omega_K \in C([0, \infty))$  があって次を満たす:

$x, y \in K$ ,  $r, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $j \geq C$ ,  $X, Y \in \mathbb{S}^{n \times n}$  が

$$-3j(\alpha - 1)|x - y|^{\alpha-2} I_{2n} \leq \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \leq 3j(\alpha - 1)|x - y|^{\alpha-2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

を満たすならば

$$\begin{aligned} F(y, s, j|x - y|^{\alpha-2}(x - y), Y) - F(x, r, j|x - y|^{\alpha-2}(x - y), X) \\ \leq \omega_K(|r - s| + j|x - y|^{\alpha-1} + |x - y|). \end{aligned} \quad (8)$$

このとき,  $u \in C^1(\Omega)$  が  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$  で方程式 (1) の粘性解ならば,  $u$  は  $\Omega$  全体で (1) の粘性解である.

**Remark 3.1.** (i) 条件  $u \in C^1(\Omega)$  は optimal なものであり,  $u \in C^{0,1}(\Omega)$  に弱めると定理が成立しないような反例が存在する. 例えば

$$u(x) = |x_1|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega = B_1 = \{|x| < 1\} \quad (9)$$

は  $\Omega \setminus u^{-1}(0) = B_1 \setminus \{x_1 = 0\}$  において  $-\Delta u = 0$  の古典解であるが (従って粘性解でもある),  $\Omega = B_1$  全体では  $-\Delta u = 0$  の粘性解とはなっていない.

(ii) Theorem 3.1 において, (A1), (A2) は自然な条件であり,  $u \equiv 0$  が解とならなければいけないので (A3) は必要条件であるのだが, (A4) は条件が成立するのをチェックするには複雑である. ところが,  $F(x, r, q, X) = \tilde{F}(q, X)$  または  $F(x, r, q, X) = \tilde{F}(q, X) + f(r)$  の場合は, (A1), (A2) の下で (A4) は自動的に成立する. 即ち次の結果を得る.

**Corollary 3.2.**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  内の領域とし,  $\tilde{F} = \tilde{F}(q, X)$ ,  $f = f(r)$  が次の条件を満たすと仮定する.

(B1)  $\tilde{F}$  は  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n \times n}$  上連続かつ退化楕円型.

(B2)  $f$  は  $\mathbb{R}$  上連続.

(B3)  $\tilde{F}(0, O) + f(0) = 0$ .

このとき,  $u \in C^1(\Omega)$  が  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$  で

$$\tilde{F}(Du, D^2u) + f(u) = 0 \quad (10)$$

の粘性解ならば,  $u$  は  $\Omega$  全体で (10) の粘性解である.

**Example 3.1.** この定理により初めて完全非線形方程式に対しても等高面の除去可能性定理が得られただけでなく, これまでの研究結果の多くを包括するものとなっている. Theorem 3.1 が適用できる方程式の例を次に挙げる.

- (i) Laplace 方程式  $-\Delta u = 0$ . (Beckenbach [1], Green [8], Král [13])  
(ii) Poisson 方程式  $-\Delta u = f(u)$ . (例えば  $f(u) = |u|^{p-1}u$  ( $p > 0$ ))  
(iii) 一般の斉次線形楕円型方程式 (Šabat)

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)D_iu(x) + c(x)u(x) = 0. \quad (11)$$

(例えば  $a_{ij}(x)$  がリプシッツ連続,  $b_i(x), c(x)$  が連続であれば O.K.)

- (iv) 極小曲面方程式  $-\operatorname{div}(Du/\sqrt{1+|Du|^2}) = 0$ .  
(v)  $p$ -Laplace 方程式 (Kilpeläinen [12], Juutinen-Lindqvist [14])

$$-\Delta_p u := -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0, \quad p > 2. \quad (12)$$

- (vi) 一般の準線形楕円型方程式 (Juutinen-Lindqvist [15])

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du) = 0. \quad (13)$$

例えば  $\infty$ -Laplace 方程式  $-\Delta_\infty u = -\sum_{i,j=1}^n D_iu D_ju D_{ij}u = 0$  のような非発散型の方程式を含むことに注意する.

- (vii) Pucci 方程式

$$-\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^\pm(D^2u) = f(u). \quad (14)$$

ただし,  $0 < \lambda \leq \Lambda$ ,  $X \in \mathbb{S}^{n \times n}$  に対して

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) = \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \lambda \sum_{e_i < 0} e_i, \quad \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X) = \lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i. \quad (15)$$

ここで,  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は  $X$  の固有値 (Pucci 方程式については例えば [2, 18] を見よ). この方程式は一様楕円型の完全非線形方程式の例である. (ただし  $\lambda = \Lambda$  の時は  $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^\pm(D^2u) = \lambda \Delta u$  である)

- (viii) Monge-Ampère 方程式

$$-\det(D^2u) = f(u). \quad (16)$$

方程式 (16) は  $C^2$  級関数全体で退化楕円型になっていない (即ち条件 **(A2)** を満たしていない) が,  $C^2$  級の凸関数上では退化楕円型である. しかし我々が (16) を扱う際には解を凸関数のクラスで考えるので, 次節の議論を修正すれば (16) に対しても等高面の除去可能性定理を得ることができる.

- (ix) Hessian 方程式

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(u). \quad (17)$$

ここで  $F$  は対称関数,  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は  $D^2u$  の固有値 ([3] などを見よ). もし  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$  ならば Poisson 方程式,  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = -\prod_{i=1}^n \lambda_i$  ならば Monge-Ampère 方程式である.

(x) Gauss 曲率方程式

$$-\det D^2u = f(u) (1 + |Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}. \quad (18)$$

(xi) 曲率方程式

$$F(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = f(u). \quad (19)$$

ここで  $F$  は対称関数,  $\kappa_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は  $u$  のグラフの主曲率 ([4] などを見よ). もし  $F(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = -\sum_{i=1}^n \kappa_i$  ならば平均曲率方程式,  $F(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = -\prod_{i=1}^n \kappa_i$  ならば Gauss 曲率方程式である.

## 4 Theorem 3.1 の証明のスケッチ

この節では Theorem 3.1 の証明の概略を述べる. 証明のアイデアは Juutinen-Lindqvist [15] に従っている. 詳細は [21] を参照されたい. 以下,  $x \in \mathbb{R}^n$  と  $r > 0$  に対して  $B_r(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z - x| < r\}$  と書くことにする.

いま,  $u$  が  $\Omega$  全体での (1) の粘性劣解ではないと仮定する. 即ち,  $\exists x_0 \in \Omega, \exists \varphi \in C^2(\Omega)$  s.t.

$$u(x_0) = \varphi(x_0), \quad (20)$$

$$u(x) < \varphi(x) \quad \text{for } x \neq x_0, \quad (21)$$

$$\mu := F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) > 0. \quad (22)$$

ここで,  $u$  が  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$  上で  $F = 0$  の粘性劣解であるという仮定より  $u(x_0) = 0$  であることがわかる.

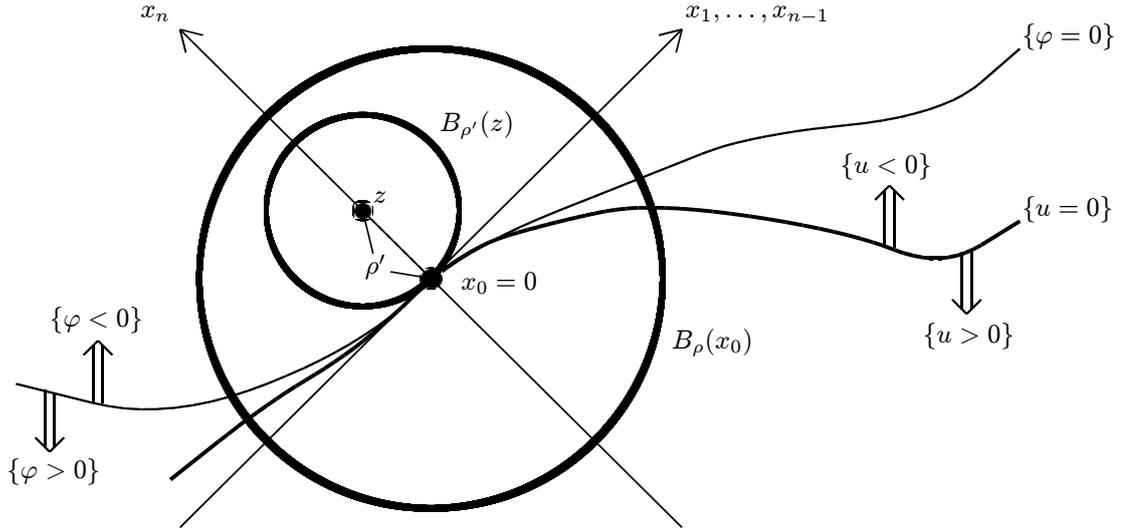
この定理の証明の難しさは 特異集合 (等高面) の大きさがアプリアリにわからない ことにある. 従って, 次のように場合分けを行う.

**Case 1.**  $D\varphi(x_0) \neq 0$  の場合

このときは,  $D\varphi(x_0) = Du(x_0) \neq 0$  に注意すると, 陰関数定理より, 等高面  $\{u = 0\}$ ,  $\{\varphi = 0\}$  は  $x_0$  の近傍でそれぞれ  $C^1$  級超曲面,  $C^2$  級超曲面をなしている. さらに, 次が成立する.

- $\exists \rho > 0$  s.t.  $\{u < 0\} \supset \{\varphi < 0\}$  in  $B_\rho(x_0)$ .
- $\exists z \in \{\varphi < 0\}, \exists \rho' \in (0, \frac{\rho}{2})$  s.t.  $B_{\rho'}(z) \subset \{\varphi < 0\}$  かつ  $x_0 \in \partial B_{\rho'}(z)$ .

一般性を失うことなく,  $x_0 = 0, z = (0, \dots, 0, \rho')$  と仮定してよい. (次頁の図を参照せよ)



任意の  $\delta \in (0, \rho')$  に対して, 関数  $\psi_\delta$  を

$$\psi_\delta(x) := \varphi(x) - \left( \delta^2 x_n - \frac{\delta}{2} |x|^2 \right) \quad (23)$$

と定義する. このとき,  $w_\delta := u - \psi_\delta$  は次を満たす.

- (i)  $w_\delta(0) = u(0) - \varphi(0) = 0$ .
- (ii)  $D_n w_\delta(0) = D_n(u - \varphi)(0) + \delta^2 = \delta^2 > 0$ .
- (iii) もし  $\delta^2 x_n = \delta |x|^2 / 2$  (即ち  $x \in \partial B_\delta(0, \dots, 0, \delta)$ ) ならば

$$w_\delta(x) = u(x) - \varphi(x) \leq 0. \quad (24)$$

従って,  $\exists x_\delta \in B_\delta(0, \dots, 0, \delta)$  s.t.  $w_\delta(x_\delta) = \sup\{w_\delta(x) \mid x \in \overline{B_\delta(0, \dots, 0, \delta)}\}$  を得る. このとき,  $x_\delta \in B_\delta(0, \dots, 0, \delta) \subset B_{\rho'}(z) \subset \{u < 0\}$  と,  $u$  は  $\{u \neq 0\}$  においては  $F = 0$  の粘性劣解であることから,

$$F(x_\delta, u(x_\delta), D\psi_\delta(x_\delta), D^2\psi_\delta(x_\delta)) \leq 0 \quad (25)$$

が得られる. ここで  $\delta \rightarrow +0$  の極限を取ると

$$x_\delta \rightarrow 0, \quad (26)$$

$$u(x_\delta) \rightarrow u(0) = 0, \quad (27)$$

$$D\psi_\delta(x_\delta) = D\varphi(x_\delta) - \delta^2 \cdot {}^t(0, \dots, 0, 1) + \delta x_\delta \rightarrow D\varphi(0), \quad (28)$$

$$D^2\psi_\delta(x_\delta) = D^2\varphi(x_\delta) + \delta I_n \rightarrow D^2\varphi(0). \quad (29)$$

仮定 **(A1)** より,

$$\mu = F(0, 0, D\varphi(0), D^2\varphi(0)) \leq 0 \quad (30)$$

を得るが, これは (22) に矛盾である.

**Case 2.**  $D\varphi(x_0) = 0$  の場合

このときは、定理の仮定の下では、粘性解の定義において試験関数  $\varphi$  と “touching point”  $x_0$  が  $D\varphi(x_0) = 0$  を満たすならば自動的に  $F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$  ( $\geq 0$ ) が成り立つことを示す。具体的には次の定理を示す。

**Lemma 4.1.**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  内の領域とする。 (A1), (A2) と次を仮定する。

(A3)' 任意の  $x \in \Omega, r \in \mathbb{R}$  に対して  $F(x, r, 0, O) = 0$ .

(A4)'  $\alpha > 2$  が存在し、任意のコンパクト集合  $K \Subset \Omega \times \mathbb{R}$  に対して、ある  $\varepsilon > 0, C > 0, \omega_K(0) = 0$  かつ非減少な関数  $\omega_K \in C([0, \infty))$  があって次を満たす：

$(x, r), (y, s) \in K, j \geq C, X, Y \in \mathbb{S}^{n \times n}$  が

$$-3j(\alpha - 1)|x - y|^{\alpha-2}I_{2n} \leq \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \leq 3j(\alpha - 1)|x - y|^{\alpha-2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

を満たすならば

$$\begin{aligned} F(y, s, j|x - y|^{\alpha-2}(x - y), Y) - F(x, r, j|x - y|^{\alpha-2}(x - y), X) \\ \leq \omega_K(|r - s| + j|x - y|^{\alpha-1} + |x - y|). \end{aligned} \quad (32)$$

このとき、 $u \in C(\Omega)$  が (1) の *relaxed viscosity subsolution* (resp. *relaxed viscosity supersolution*) であることと、(1) の粘性劣解 (resp. 粘性優解) であることは同値である。

証明は [21] を参照されたい。これらより  $u$  が方程式 (1) の粘性劣解であることが証明された。 $u$  が粘性優解であることも同様に証明され、Theorem 3.1 が得られる。

## 5 放物型方程式と特異性を持った方程式についての結果

### (i) 放物型方程式

楕円型方程式の場合と同様の議論により、完全非線形放物型方程式 (2) の場合にも等高面の除去可能性に関する定理を得ることができる。証明は省略する。

**Theorem 5.1.** [21]  $\mathcal{O}$  を  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  内の領域とする。次の条件を満たすと仮定する。

(C1)  $F : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続関数。

(C2)  $F$  は退化楕円型である。

(C3) 任意の  $(t, x) \in \mathcal{O}$  に対して  $F(t, x, 0, 0, O) = 0$ .

(C4)  $\alpha > 2$  が存在し、任意のコンパクト集合  $K \Subset \mathcal{O}$  に対して、ある  $\varepsilon > 0, C > 0, \omega_K(0) = 0$  かつ非減少な関数  $\omega_K \in C([0, \infty))$  があって次を満たす：

$(t, x), (t', y) \in K, r, s \in (-\varepsilon, \varepsilon), j \geq C, X, Y \in \mathbb{S}^{n \times n}$  が

$$-3j(\alpha - 1)|x - y|^{\alpha-2}I_{2n} \leq \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \leq 3j(\alpha - 1)|x - y|^{\alpha-2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \quad (33)$$

を満たすならば

$$\begin{aligned} & F(t', y, s, j|x - y|^{\alpha-2}(x - y), Y) - F(t, x, r, j|x - y|^{\alpha-2}(x - y), X) \\ & \leq \omega_K(|t - t'| + |r - s| + j|x - y|^{\alpha-1} + |x - y|). \end{aligned} \quad (34)$$

このとき,  $u \in C^1(\mathcal{O})$  が  $\Omega \setminus u^{-1}(0)$  で方程式 (2) の粘性解ならば,  $u$  は  $\mathcal{O}$  全体で (2) の粘性解である.

**Remark 5.1.** 楕円型の場合と同様に, もし  $F$  が  $\tilde{F}(q, X) + f(r)$  の形をしているならば,  $\tilde{F}$  と  $f$  の連続性,  $\tilde{F}$  の退化楕円性, および  $\tilde{F}(0, O) + f(0) = 0$  を仮定すれば方程式 (2) の解の等高面の除去可能性を示すことができる.

**Example 5.1.** Theorem 5.1 が適用することができる方程式の例を挙げる.

- (i) 熱方程式  $u_t - \Delta u = 0$ .
- (ii) 放物型  $p$ -Laplace 方程式  $u_t - \Delta_p u = 0$  ( $p > 2$ ).
- (iii) 放物型 Monge-Ampère 方程式  $u_t - (\det D^2 u)^{1/n} = 0$ .
- (iv) Gauss 曲率流方程式  $u_t - \det D^2 u / (1 + |Du|^2)^{(n+1)/2} = 0$ .

(ii) 特異性を持った方程式

ここでは簡単のために  $F$  が  $Du$  および  $D^2u$  変数のみに依存している場合, 即ち

$$F(Du, D^2u) = 0, \quad (35)$$

$$u_t + F(Du, D^2u) = 0 \quad (36)$$

を考える. さらに,  $F$  が  $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{S}^{n \times n}$  で定義されている場合について考察する. ただし,  $F$  が幾何学的であることは仮定しない (幾何学的の定義は [5] を参照せよ).

**Example 5.2.** 特異性を持った方程式の例を挙げる.

- (i)  $p$ -Laplace 方程式  $-\Delta_p = 0$  で  $1 < p < 2$  の場合.
- (ii) 放物型  $p$ -Laplace 方程式  $u_t - \Delta_p u = 0$  で  $1 < p < 2$  の場合.
- (iii) 平均曲率流方程式  $u_t - |Du| \operatorname{div}(Du/|Du|) = 0$ . これは,  $u$  の等高面  $\Gamma_c := \{u(t, \cdot) = c\}$  が平均曲率に従って動くことを記述する方程式である.
- (iv) 放物型  $\infty$ -Laplace 方程式  $u_t - \Delta_\infty u / |Du|^2 = 0$ .

どれも物理学・幾何学で現れる重要な方程式である.

ここでは放物型方程式 (36) に対する等高面の除去可能性定理についてのみ述べる. その前に, 特異性を持った方程式 (36) の粘性解の定義を与える. 以下の定義は大沼-佐藤 [17] による ([10, 16] も見よ).

いま,  $\mathcal{F}(F)$  および  $\Sigma$  を以下のように定義する :

$$\mathcal{F}(F) = \left\{ f \in C^2([0, \infty)) \mid f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \right. \quad (37)$$

$$\left. f''(r) > 0 \ (\forall r > 0), \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow 0} F(Df(|x|), D^2f(|x|)) = 0 \right\},$$

$$\Sigma = \{ \sigma \in C^1(\mathbb{R}) \mid \sigma(0) = \sigma'(0) = 0, \sigma(t) = \sigma(-t) > 0 \ (\forall t > 0) \}. \quad (38)$$

このとき,  $F = F(q, X)$  が次を満たすと仮定する.

(D1)  $F : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{S}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続関数.

(D2)  $F$  は退化楕円型である.

(D3)  $\mathcal{F}(F) \neq \emptyset$ .

(D4)  $f \in \mathcal{F}(F), k > 0 \Rightarrow kf \in \mathcal{F}(f)$ .

$\mathcal{O}$  を  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  内の領域とし, 以下  $(t, x) \in \mathcal{O}, r > 0$  に対して  $B_r(t, x) = \{(s, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid (s-t)^2 + |z-x|^2 < r^2\}$  と書くことにする. 関数  $\varphi \in C^2(\Omega)$  が *admissible* であるとは,  $D\varphi(\hat{t}, \hat{x}) = 0$  を満たす任意の  $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathcal{O}$  に対して, ある  $f \in \mathcal{F}(F), \sigma \in \Sigma, \rho > 0$  が存在して  $B_\rho(\hat{t}, \hat{x}) \subset \mathcal{O}$  かつ

$$|\varphi(t, x) - \varphi(\hat{t}, \hat{x}) - \varphi_t(\hat{t}, \hat{x})(t - \hat{t})| \leq f(|x - \hat{x}|) + \sigma(t - \hat{t}) \quad (\forall (t, x) \in B_\rho(\hat{t}, \hat{x})) \quad (39)$$

を満たすことを言う.

**Definition 5.1.**  $\mathcal{O}$  を  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  内の領域とし, (D1), (D2), (D3), (D4) を仮定する.

(i)  $u \in \text{USC}(\mathcal{O})$  が (36) の粘性劣解

$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \not\equiv -\infty$  かつ  $\forall (t_0, x_0) \in \mathcal{O}, \forall \varphi : \text{admissible}$  に対して  
 $u - \varphi$  が  $(t_0, x_0)$  において最大値を取るならば

$$\begin{cases} \varphi_t(t_0, x_0) + F(D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0)) \leq 0 & \text{if } D\varphi(t_0, x_0) \neq 0, \\ \varphi_t(t_0, x_0) \leq 0 & \text{if } D\varphi(t_0, x_0) = 0. \end{cases} \quad (40)$$

(ii)  $u \in \text{LSC}(\mathcal{O})$  が (36) の粘性優解

$\stackrel{\text{def}}{\iff} u \not\equiv \infty$  かつ  $\forall (t_0, x_0) \in \mathcal{O}, \forall \varphi : \text{admissible}$  に対して  
 $u - \varphi$  が  $(t_0, x_0)$  において最小値を取るならば

$$\begin{cases} \varphi_t(t_0, x_0) + F(D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0)) \geq 0 & \text{if } D\varphi(t_0, x_0) \neq 0, \\ \varphi_t(t_0, x_0) \geq 0 & \text{if } D\varphi(t_0, x_0) = 0. \end{cases} \quad (41)$$

(ii)  $u \in C(\mathcal{O})$  が (36) の粘性解  $\stackrel{\text{def}}{\iff} u$  は (36) の粘性劣解かつ粘性優解.

このとき、次が成り立つ.

**Theorem 5.2.** [21]  $\mathcal{O}$  を  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  内の領域とし, (D1), (D2), (D3), (D4) を仮定する. このとき,  $u \in C^1(\mathcal{O})$  が  $\mathcal{O} \setminus u^{-1}(0)$  上で (36) の粘性解ならば,  $u$  は  $\mathcal{O}$  全体で (36) の粘性解である.

## 6 最近の進展

これまでは特異集合として「像集合が 1 点」の場合を考えてきた. それでは, 「1 点」を  $\mathbb{R}$  の部分集合  $E$  に拡張するとどのようなようになるかを考えるのは自然である. 即ち, 次の問題を考えてみよう.

**問題.**  $E \subset \mathbb{R}$  とする. 関数  $u$  が, 領域全体から  $u^{-1}(E)$  を除いた集合上で方程式 (1) または (2) の解であるならば, 実は  $u$  は領域全体で (1) または (2) の解となっているか?

この種の問題については, Laplace 方程式に対して Král [13] が考えているが, 我々の知る限り, それ以外の方程式に対しては研究結果は得られていない.

ところが, この問題を解くことは非常に難しい.  $E$  の定量的な性質が必要であるため粘性解を用いて解析することは困難であると思われる. 現在のところ, Laplace 方程式や Monge-Ampère 方程式を含む方程式族である「 $k$ -Hessian 方程式», および平均曲率方程式や Gauss 曲率方程式を含む方程式族である「 $k$ -曲率方程式」について部分的な結果を得ている (現在 [22] にて論文の投稿準備中である).

## 謝辞

研究集会「偏微分方程式と現象 : PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007」にて講演の機会を与えて下さった世話人の先生方に深く感謝の意を申し上げます. 多くの有益なご助言をいただき, 有意義な研究集会であったと同時に, 宮崎で大変楽しい時間を過ごすことができました.

## 参考文献

- [1] E.F. Beckenbach, *On characteristic properties of harmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 765–769.
- [2] L. Caffarelli and X. Cabre, *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 43, American Mathematical Society, Providence, 1995.
- [3] L. Caffarelli, L. Nirenberg and J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155** (1985), 261–301.
- [4] L. Caffarelli, L. Nirenberg and J. Spruck, *Nonlinear second-order elliptic equations, V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1988), 47–70.

- [5] Y.G. Chen, Y. Giga and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geometry **33** (1991), 749–786.
- [6] M.G. Crandall, *Viscosity solutions: a primer.*, Viscosity solutions and applications (Montecatini Terme, 1995), Lecture Notes in Math., 1660, Springer, Berlin, 1997, pp. 1–43.
- [7] M.G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1–67.
- [8] J.W. Green, *Functions that are harmonic or zero*, Amer. J. Math. **82** (1960), 867–872.
- [9] H. Ishii and P.-L. Lions, *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Differential Equations **83** (1990), 26–78.
- [10] H. Ishii and P.E. Souganidis, *Generalized motion of noncompact hypersurfaces with velocity having arbitrary growth on the curvature tensor*, Tohoku Math. J. (2) **47** (1995), 227–250.
- [11] R. Jensen, *Uniqueness criteria for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 629–667.
- [12] T. Kilpeläinen, *A Radó type theorem for  $p$ -harmonic functions in the plane*, Electoric J. Differential Equations **9** (1994), 1–4.
- [13] J. Král, *Some extension results concerning harmonic functions*, J. London Math. Soc. **28** (1983), 62–70.
- [14] P. Juutinen and P. Lindqvist, *A theorem of Radó’s type for the solutions of a quasi-linear equation*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 31–34.
- [15] P. Juutinen and P. Lindqvist, *Removability of a level set for solutions of quasilinear equations*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), 305–321.
- [16] P. Juutinen, P. Lindqvist and J.J. Manfredi, *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 699–717.
- [17] M. Ohnuma and K. Sato, *Singular degenerate parabolic equations with applications to the  $p$ -Laplace diffusion equation*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), 381–411.
- [18] C. Pucci, *Operatori ellittici estremanti*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **72** (1966), 141–170.
- [19] T. Radó, *Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit*, Math. Z. **20** (1924), 1–6.
- [20] A.B. Šabat, *On a property of solutions of elliptic equations of second order*, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 926–928.
- [21] K. Takimoto, *Radó type removability result for fully nonlinear equations*, Differential Integral Equations **20** (2007), 939–960.
- [22] K. Takimoto, *Removability of level sets for some types of fully nonlinear equations*, in preparation.

# 大腸菌のパターン形成

川上 裕典、櫻井 建成  
千葉大学大学院理学研究科

## 1 はじめに

生物は、時々刻々と変化する自然現象に対応するため数十世代にわたり蓄積し獲得してきた情報を遺伝子に書き込み後世に伝えてきた。遺伝子発現や組換えを基礎とした遺伝子工学は医療や工学的応用を含め生命の理解を深めると考えられており、その発展が期待されている。一方、生物の神経上の情報伝達は電気インパルスを用いることにより行われている。この電気インパルス伝搬は、HodgkinとHuxleyにより見いだされ、また、非線形現象であることが確かめられている。このように生物は、遺伝子による蛋白の発現だけでなく物理現象を”うまく”使うことにより、情報処理を行い生命活動を維持している。しかし、遺伝子工学を駆使した研究で、マクロな物理現象（リズムやパターンの形成）との接点を求めている研究は少ない。細胞レベルでの遺伝子の役割と物理現象の役割を明らかにすることにより、二つの役割の接点や重要性を探ることが今後の課題と考えている。

さて、非線形数理、もしくは、非線形力学の立場から生物のパターン形成はどのように理解されてきたのであろうか？それらの理解を目指した代表的な例としては、細胞性粘菌の集合時のらせん状cAMPパターン [1]、熱帯魚のチューリングパターン [2]、枯草菌のコロニー形成 [3]、大腸菌のパターン形成 [4]、等が挙げられる。特に大腸菌は、代謝経路、外部刺激を受け取る受容体、受容体から鞭毛を駆動する経路や蛋白などが良くわかっている。また蛋白の発現経路やレセプターの機能を無効にすることが、遺伝子操作により簡単に行える。細胞レベルでの遺伝子の役割や場として必要な蛋白の同定と物理現象の役割を明らかにするためのモデル生物とし有力な候補となりうる生物であろう。具体的には、大腸菌に濃度勾配を感じて動く（走化性）、光の輝度勾配を感じて動く（走光性）、温度勾配を感じて動く（走温性）機能を持たせ、また、不必要な代謝経路などをロックアウトし、それぞれの役割やその接点と重要性を明らかにすることができるであろう。

本報告では、BudreneとBergにより行われた大腸菌が示すパターン形成について紹介するとともに、大腸菌の特徴についてまとめたい。

## 2 大腸菌について

大腸菌は鞭毛を巧みに操ることにより空間的に移動している。一つは、回転運動と直線運動をランダムに繰り返すことにより、ブラウン運動に似た動きをすることである。もう一つは、特定の化学物質の濃度の高い、もしくは、低い方向に自ら移動することである（走化性 [5]）。表 1 および図 1 に示すように、大腸菌には 5 つの走化性受容体 [6] があり、それぞれ特定の化学物質に対して反応する [7]。受容体で感知された情報により、Che タンパク質を介し鞭毛の動き方やその方向が決まることや、tsr 受容体が他の受容体に対して優位に働くことなど多くのことが知られている。Budrene と Berg は、wild 株（受容体欠損なし）および tsr 欠損した走化性大腸菌が寒天培地内（約 0.2%）を中心から swarm ring が広がっていく過程で、大腸菌自身が寒天培地内の栄養素を代謝し、誘引物質（aspartate）を放出し、その誘引物質に向かって動く走化性によりパターン形成をすること、carbon source(succinate) の濃度変化によりパターンが変化することを報告した [8, 9]。彼らの実験結果はその見事までの美しさから多くの研究者の注目を集めた。図 2、3 は Budrene らの実験の再現を試みた結果である。carbon source である succinate の濃度が低いとき、大腸菌が高密度に分布しているリング状のパターン（図 2：swarm ring）が伝搬し、succinate の濃度がある程度高くなると swarm ring の後ろからドットが出現し、その後動かなくなる（図 3）。

一方、大腸菌が示すパターン形成を記述するための数理モデルも提案されている。大腸菌は、細胞分裂すること、ブラウン運動をしていること、走化性を示すこと、carbon source を食べ尽くすと休止期（動かなくなり、細胞分裂もしない）に入ることなどの特徴がある。Ben-Jacob らは、inactive bacteria を表現した 'triggering' field を導入した増殖・拡散・移流モデルを提案した [10, 11]。Budrene らの実験結果では、swarm ring からドットが不安定化して出ていることに対し、Ben-Jacob らの数値計算では一様定常解が不安定化してパターン形成が起こっているように見える。このようにこれらのモデルでは Budrene らの実験結果をすべて説明することができず、更なる実験を通じた数理モデルの改良が望まれる。

次章では、大腸菌のパターン形成の実験方法や各種受容体欠損株を用いた実験の紹介をするとともに、swarm ring とドットの形成メカニズムを紹介する。

表 1: 走化性受容体の種類と、それに対応する化学物質。+は濃度勾配の高い方に進み（正の走化性）、-は濃度勾配の低い方進む（負の走化性）

走化性受容体	化学物質
tsr	<i>serine</i> <sup>+</sup> , <i>acetate</i> <sup>-</sup> , <i>benzoate</i> <sup>-</sup> , <i>indole</i> <sup>-</sup> , <i>leucine</i> <sup>-</sup>
tar	<i>aspartate</i> <sup>+</sup> , <i>maltose</i> <sup>+</sup> , <i>Ni</i> <sup>2+</sup>
trg	<i>glucose</i> <sup>+</sup> , <i>galactose</i> <sup>+</sup> , <i>ribose</i> <sup>+</sup> , <i>phenol</i> <sup>-</sup>
tap	<i>dipeptides</i> <sup>+</sup>
aer	<i>oxigen</i> <sup>+ -</sup>

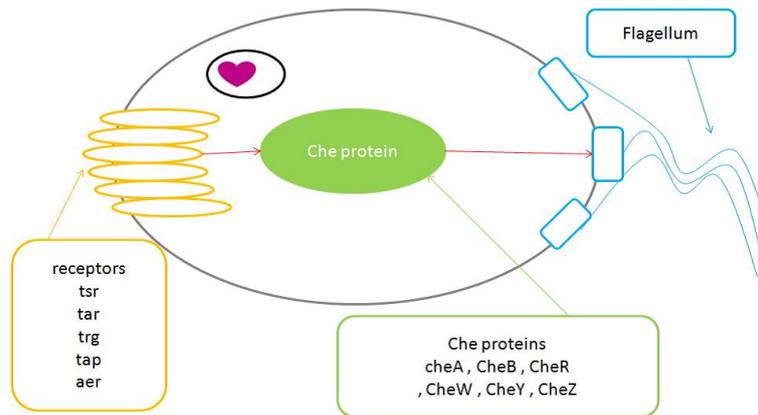


図 1: 大腸菌の走化性に関するタンパク質の反応機構の概図。レセプターで誘引物質などの化学物質を感知し、Che タンパク質により鞭毛の動きが決まる。レセプターにより感知する化学物質が異なり (表 1) Che タンパク質の on , off で鞭毛の回転方向が決まる。

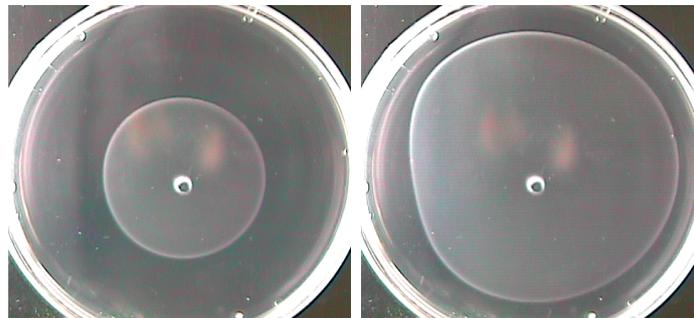


図 2: 大腸菌株 HCB317(*tsr* 欠損) 株による swarm ring パターン。succinate 2[mM]。白色は大腸菌の密度が高い場所を表しており、その高密度のリングが伝搬している。

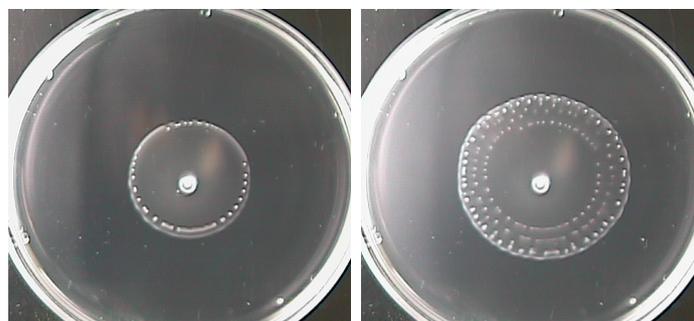


図 3: 大腸菌株 HCB317(*tsr* 欠損) 株によるドットパターン。succinate 3[mM]。swarm ring のすぐ後ろでドットが出現し、その後動かなくなる。swarm ring の伝搬とともにそれらを繰り返している。

### 3 実験方法

本実験では走化性大腸菌株 RP437(wild type : 受容体の欠損なし) , HCB317(*tsr* 欠損) , RP5869(*tar*, *tap* 欠損) を用いた (表 2)。また、寒天培地 (0.2%) は内直径 84[mm] のプラスチックシャーレ内に寒天培地溶液 10[mL] を注ぎ、水平に静置し固定した。ここで、寒天培地として M9 minimal medium を用いており、その組成を表 3 に示す。M9 medium には 4 種のアミノ酸、carbon source として succinate、もしくは、galactose (実験により濃度を変化させる) を混ぜている。また、vital dye を加えることにより、休止期の大腸菌を赤く染めることができる。実験には、高密度の大腸菌を用いることから、大腸菌を増殖させるため、プレカルチャー溶液内で大腸菌が飽和するまで培養する (約  $1 \times 10^8$  bacteria/mL)。このとき、プレカルチャー溶液には餌として  $\alpha$  - *ketoglutarate* を用いている。そしてこのプレカルチャーした大腸菌を遠沈分離し (7.2rpm , 2min)、寒天培地中央に 5[ $\mu$ L] 滴下し、室温  $25 \pm 1$  で観察を行う。

表 2: 実験で用いた走化性大腸菌の種類と欠損受容体

大腸菌株	欠損受容体
RP437	欠損なし
HCB317	<i>tsr</i>
RP5869	<i>tar</i> , <i>tap</i>

表 3: 寒天培地 (M9 media) の組成。

	栄養素	濃度
アミノ酸	L-leucine	20 $\mu$ g/mL
	L-leucine	20 $\mu$ g/mL
	L-histidine	20 $\mu$ g/mL
	L-methionine	20 $\mu$ g/mL
carbon source	succinate	1 – 3mM
	galactose	1 – 3mM
(pre-culture)	$\alpha$ - <i>ketoglutarate</i>	5mM
vital dye	tetrazolium red	50 $\mu$ g/mL

## 4 実験結果

### 4.1 準2次元パターン

それぞれの大腸菌株におけるパターンの違いを図4-7にしめす。図4は tar 欠損 (RP5869) した大腸菌の実験結果である。ここで、carbon source として succinate を用いている。大腸菌は代謝により図8青線のように aspartate を生成していると考えられるが、RP5869 では aspartate に反応する受容体が欠損しており、走化性の特徴が出にくいいためディスク状で広がるパターンになったと考えられる。図5は、carbon source として galactose を用いた大腸菌 RP5869 の実験結果である。大腸菌の代謝により galactose が消費され、図8緑線のように galactose の空間分布が作られていると考えられる。その空間分布に依存して大腸菌が波頭に向かって走るため、リング状のパターンが形成されていると考えられる。

次に、受容体欠損のない大腸菌 RP437、carbon source として galactose を用いた実験結果を図6に示す。swarm ring が時間とともに広がっている様子がわかる。また、galactose の濃度を上げて同じ結果ができることを確認している。図7は大腸菌 RP437、carbon source として succinate の場合の結果である。中央から swarm ring が広がり、そのリングからコロニー(ドット)を形成している様子がわかる。

以上まとめると、

(1) aspartate、および、galactose など大腸菌が自ら作り出した化学物質の空間分布に依存して引き寄せられる走化性をもつ大腸菌株においては、swarm ring が出現する。つまり、図8に示すように、大腸菌がブラウン運動(拡散)により前方へ進んでいくとともに、大腸菌自らが aspartate や galactose などの誘引物質の空間分布を作り、波頭に向かって泳ぐことにより swarm ring を作り出していると考えられることができる。

(2) aspartate への走化性をもち、餌が走化性のない succinate の場合(図3:HCB317、図7:大腸菌 RP437)には、succinate の初期濃度に依存して、コロニーを落としていく swarm ring が出現している。このことは、上述したように大腸菌がリングの法線方向に集まることにより形成された swarm ring において、細胞の数が多くなりすぎたため、図9のようにリングの接線方向に誘引物質の不均一が生まれ、大腸菌がリングの接線方向に沿って走化性により進んでいき、ドットパターンができると想像される。

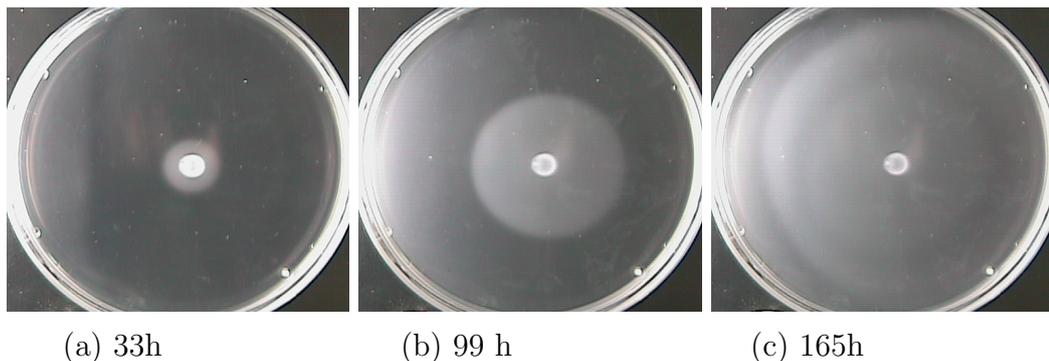
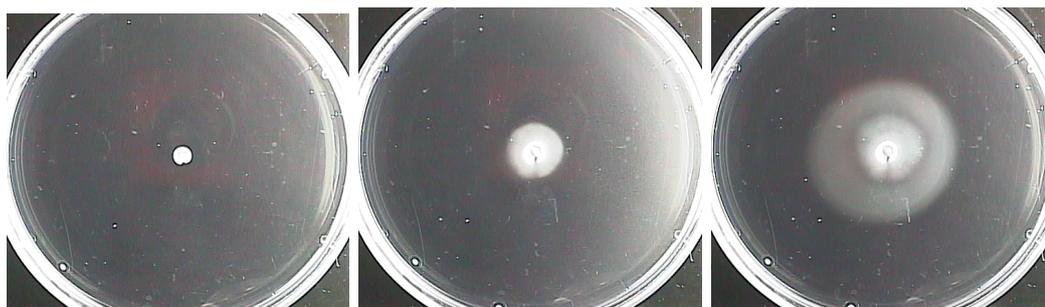
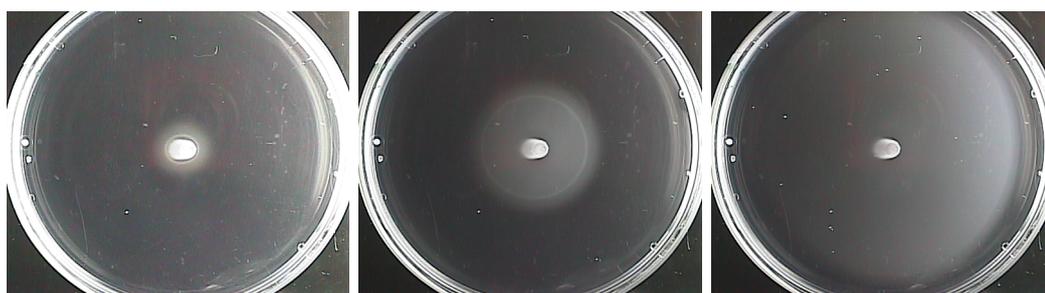


図4: 大腸菌株 RP5869、succinate 3mM。



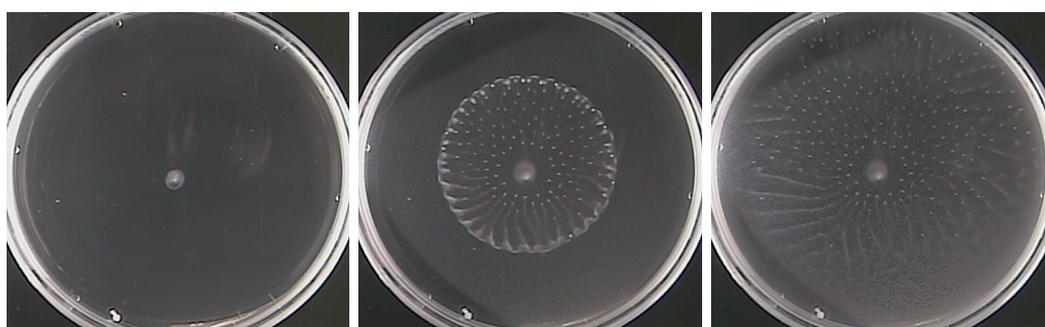
(a) 0h (b) 100 h (c) 167h

図 5: 大腸菌株 RP5869、D-galactose 1mM。



(a) 40h (b) 80 h (c) 160h

図 6: 大腸菌株 RP437、D-galactose 1mM。



(a) 0h (b) 33 h (c) 66h

図 7: 大腸菌株 RP437、succinate 3[mM]。

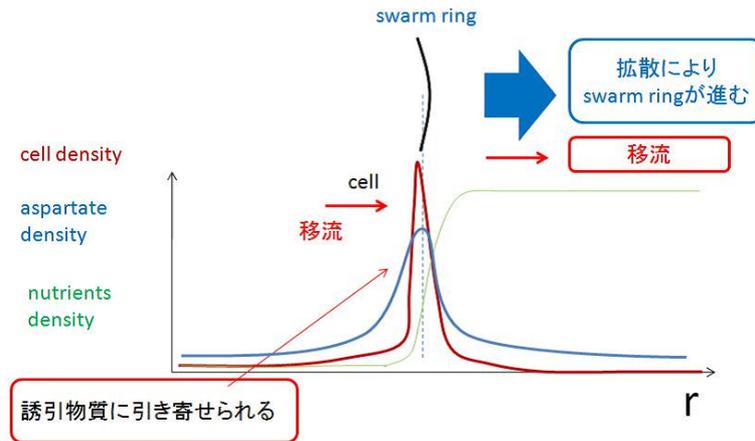


図 8: 大腸菌密度と化学物質の空間分布図 (予想図)。横軸は心からシャーレ外側に向かう swarm ring の進行方向の軸、縦軸は赤は大腸菌の濃度、青は誘引物質の濃度、緑は栄養素の密度を表している。

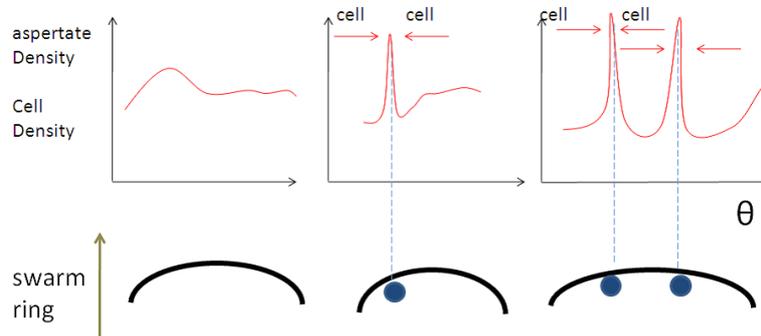
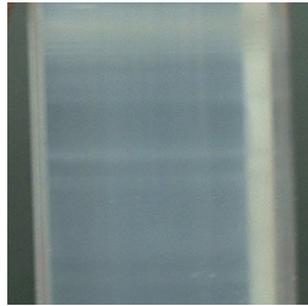


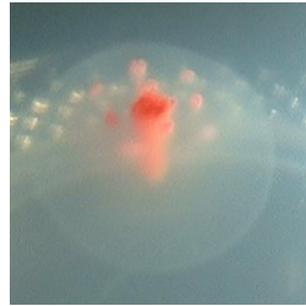
図 9: 集合体のできるメカニズム。図上のグラフ横軸は swarm ring の横方向。縦軸は大腸菌濃度、誘引物質の濃度を表している。

## 4.2 3次元パターン

さて、swarm ring が上述のようなメカニズムにおいて発生するのであれば、空間 3次元においても同様な現象が発生するはずである。図 10 に直径 13mm の試験管中、および、一辺 50mm の四角い瓶の中での大腸菌パターンを示す。図 10(a) では試験管中で、大腸菌が swarm ring に相当する面をもち上から下に伝搬して行くときのスナップショットである。平面状の大腸菌密度の高い領域が試験管下部に進みながらある時間間隔で平面状のパターンを落としていくことにより、このようなパターンが発生している。準 2次元では同心円状パターンが出現することに対応する [12]。次に、試験管よりも広い領域を持った瓶中での結果を図 10(b) に示す。面状の大腸菌密度の高い領域が半球状に広がっていく様子がみえる。この実験も試験管中での実験と同じように、瓶の中に培地を作成し、培地表面に大腸菌を一点接種した結果である。図より、培地表面に複数のコロニーができていることがわかる。これらより、3次元パターンにおいては、実験領域の違いにより異なるパターン形成をすることが予想され、今後の実験報告を待ちたい。



(a) 試験管（直径 13mm）での実験。大腸菌株 RP437。横から観測。



(b) 瓶中での実験。大腸菌株 HCB317。

図 10: 3次元での実験結果。培地の組成は表 3 と同じ。餌として succinate 3mM。

## 5 まとめ

以上、大腸菌のパターン形成を簡単にではあるが紹介させていただいた。Berg らの実験を再現するとともに、3次元空間でのパターン形成において実験領域の違いより異なったパターンを形成すると予想されることを示した。また、swarm ring とドットパターンの概略的な形成メカニズムを紹介した（図 8, 9）。パターン形成に対して、大腸菌自身が代謝により放出した化学物質の空間分布が重要な働きをしていると考えられているが、化学物質である aspartate の分布の計測などは行われておらず、詳細についてはわかっていない。Ben-Jacob らが提案した増殖・拡散・移流モデル [10, 11] の妥当性などを議論するためには、aspartate など走化性を誘引する化学物質の空間分布の計測が必要であろう。また、餌が絶えず補給されている（inactive bacteria が存在しない）増殖・拡散・走化性モデル [13] において、六角形パターンなどが発生することが報告されている。今後は、栄養素を絶えず補給するフロー系の実現など更なる実験システムの改良を行いたい。

最後に、私たちの興味の対象の一つとしては、

- ・ 生きているとは？
- ・ 生物が示すウェットで生々しい振る舞いが如何に記述できるか？

などが、非線形数理、もしくは、非線形力学の立場からどのように理解できるかということが挙げられる。Hodgkin と Huxley による神経興奮現象の記述に代表されるように、生体機構の背景には物理的、数理的側面が潜んでいるに違いないと私たちは信じている。一方、タンパクの設計図である DNA、生体の材料であるタンパク質の研究は過去から現在まで盛んに行われてきている。その部品の分子機構とそれらが示すマクロな時間的・空間的秩序形成とが互いに相互作用し新たな秩序構造を作り出す実験システムの構築が今後の課題であり、大腸菌はそのような実験システムとしてよいモデル生物となりうる可能性がある。特に、これらの相互作用による新しい秩序構造は、情報の伝達と伝達機構の再構築などニューラルネットワーク等でも観測されている現象と同様のアナロジーを含んでおり、今後に期待したい。

## 参考文献

- [1] Newell P.C. *Attraction and adhesion in the slime mold Dictyostelium*. In: J.E.Smith(ed.)*Fungal Differentiation: A contemporary Synthesis*. Mycology Series 43 , pp43-71. New York: Marcel Dekker (1983).
- [2] Kondo S. , Arai R. *Nature* 376 , 765-768(1995).
- [3] M. Matsushita et. al *Physica A* 274 , 190-199(1999).
- [4] Berg.H.C. *Chemotaxis* Springer (2004).
- [5] Adler J. *Science* 153 , 708-716(1966).
- [6] 実際には、Different Enzyme II proteins と呼ばれる受容体も知られているが、ここでは、一般的に用いられている tsr, tar, trg, tap, aer の5つを指している。
- [7] Michael Eisenbach et. al *Chemotaxis* Imperial College Press(2004).
- [8] Budrene E.O. , Berg.H.C. *Nature* 349 , 630-633(1991).
- [9] Budrene E.O. , Berg.H.C. *Nature* 376 , 49-53(1995).
- [10] Ben-Jacob E. et. al *Nature* 373 , 566-567(1995).
- [11] Ben-Jacob E. et. al *Phys. Rev. Lett* 75 , 1859-1862(1995).
- [12] 本報告では、実験結果を紹介しなかったが、準2次元パターンにおいて、ある条件下で同心円状パターンが存在する。
- [13] Mimura M. , T sujikawa *Physica A* 230 , 499-543(1996).



## 研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2006 (略称 : PPM2006) 」

日時 : 2006年11月17日(金) ~ 11月18日(土)

会場 : 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内 : <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~yazaki/research/ppm/ppm2006.html>

### プログラム

#### 11月17日(金)

##### 午後の部

14:30-15:20 内藤 雄基 (神戸大学)

「Sobolev 臨界指数放物型方程式の解の爆発」

15:40-16:30 野原 勉 (武蔵工業大学)・有本 彰雄 (武蔵工業大学)

「高次摂動項を持った非線形 Schrödinger 方程式の定性的・定量的解析」

16:40-17:30 宮崎 倫子 (静岡大学)

「常微分方程式の解の漸近挙動における時間遅れの影響について」

#### 11月18日(土)

##### 午前の部

10:00-10:50 高橋 太 (大阪市立大学)

「 $p$ -調和関数の特異集合の  $p$ -容量は消失する」

11:00-11:50 関口 昌由 (木更津工業高等専門学校)

「三体問題の近況報告」

午後の部

13:30-14:20 上山 大信 (明治大学)

「ある化学反応沈澱系におけるパターン形成：  
モデリングおよびシミュレーション」

14:30-15:20 佐藤 友彦 (大阪大学)

「2次元有界領域における平均場方程式の解の漸近的非退化性」

15:40-16:30 斎藤 宣一 (富山大学)

「走化性放物型系に対する有限要素近似」

16:40-17:30 福本 康秀 (九州大学)

「Kelvin-Benjamin の変分原理と渦輪の運動速度」

---

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C(2) : 辻川、仙葉 / 若手 B : 大塚、北、矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関わる漸近解析
18540189	仙葉 隆	高次元領域における走化性方程式系の爆発解の挙動に関する研究
16740103	大塚浩史	非線形偏微分方程式の双対構造と補償されたコンパクト性
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

---

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、大塚浩史、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : [tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp](mailto:tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp)

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 ( 事務室 ) & FAX : 0985-58-7289

## 研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005 (略称：PPM2005)」

日時： 2005年11月18日(金)～11月19日(土)

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2005.html>

### プログラム

#### 11月18日(金)

##### 午後の部

14:30-15:20 中原 明生(日本大学)

「ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御」

15:40-16:30 中根 和昭(大阪電気通信大学)

「剥離現象に対するモデリングとその数理解析」

16:40-17:30 野々村 真規子(広島大学)

「ソフトマテリアルにみられる秩序構造について」

#### 11月19日(土)

##### 午前の部

10:00-10:50 友枝 謙二(大阪工業大学)

「吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について」

11:00-11:50 中島 主恵(東京海洋大学)

「競争係数無限大の競争系の界面の形成について」

午後の部

13:30-14:20 宮本 安人 (北海道大学)

「2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が  
不安定になるための一般的な判定法について」

14:30-15:20 小林 孝行 (佐賀大学)

「Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について」

15:40-16:30 宮崎 倫子 (静岡大学)

「Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について」

16:40-17:30 愛木 豊彦 (岐阜大学)

「バネの方程式と自由境界問題」

---

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C(2) : 辻川、仙葉 / 若手 B : 北、矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関する漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

---

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : [tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp](mailto:tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp)

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

## 研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004 (略称：PPM2004)」

日時： 2004年11月19日(金)～11月21日(日)

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2004.html>

### プログラム

#### 11月19日(金)

##### 午後の部

14:30-15:20 満島 正浩(東京大学大学院・数理科学研究科)

「反応拡散方程式系に現れる時間周期解」

15:40-16:30 丸野 健一(九州大学大学院・数理学研究院)

「いろいろな物理系における非線形局在モードについて」

16:40-17:30 和田 健志(熊本大学・工学部)

「Limit problem for the Maxwell-Schrödinger system」

#### 11月20日(土)

##### 午前の部

10:00-10:50 笠井 博則(福島大学・教育学部)

「実演!! 金平糖の実験とその生成過程のモデリングに向けて」

11:00-11:50 大江 貴司(岡山理科大学・総合情報学部)・大中 幸三郎(大阪大学・工学部)

「Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用と数値積分への応用」

午後の部

13:30-14:20 平岡 裕章 (大阪大学大学院・基礎工学研究科)

「無限次元力学系における位相計算理論」

14:30-15:20 谷内 靖 (信州大学・理学部)

「On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data」

15:40-16:30 菱田 俊明 (新潟大学・工学部)

「 $L^q$  estimates for the Stokes equations around a rotating body」

16:40-17:30 小池 茂昭 (埼玉大学・理学部)

「ペロンの方法 -revisited-」

11月21日(日)

午前の部

10:00-10:50 高坂 良史 (室蘭工業大学・工学部)

「表面拡散流方程式による3相境界運動の定常解の線形安定性について」

11:00-11:50 井古田 亮 (九州大学大学院・数理学研究院)

「不変領域を持つ反応拡散系における擾乱の伝播速度の有界性について」

12:00-12:50 梶木屋 龍治 (長崎総合科学大学・工学部)

「Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations」

---

本研究集会は、以下の科学研究費補助金(基盤C(2):辻川、仙葉、壁谷/若手B:北、矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

---

世話人: 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先: 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒889-2192 宮崎市学園木花台西1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail: [tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp](mailto:tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp)

TEL: 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX: 0985-58-7289

# 研究集会「PDEs and Phenomena in Miyazaki 2003」

日時： 2003年10月31日(金)～11月2日(日)

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2003.html>

## プログラム

### 10月31日(金)

#### 午後の部

14:30-15:20 黒木場正城(福岡大理)

「Maximal attractor and inertial sets for Eguchi-Oki-Matsumura equation」

15:40-16:30 三沢正史(熊大理)

「定平均曲率曲面の時間発展に対する初期値境界値問題」

16:40-17:30 村川秀樹・中木達幸(九大数理)

「ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法」

### 11月1日(土)

#### 午前の部

10:00-10:50 竹内慎吾(工学院大)

「空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状」

11:00-11:50 石毛和弘(名大多元数理)

「Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題について」

午後の部

13:30-14:20 石渡通徳 (早大理工)

「Asymptotic behavior of some global solutions for  
nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity」

14:30-15:20 水町徹 (横浜市大理)

「Instability of nonradial bound states for 2D nonlinear Schrödinger equation」

15:40-16:30 飯島健太郎 (茨城大理工)

「Laplace 方程式の Cauchy 問題  
および逆向き熱伝導問題の任意多点差分法を用いた数値解法」

16:40-17:30 櫻井建成 (宇部高専)

「反応拡散モデルの情報処理への応用」

11月2日(日)

午前の部

10:00-10:50 坂上貴之 (北大理)

「極渦のある球面での渦層の運動」

11:00-11:50 長山雅晴 (京大数研)

「反応拡散場での粒子運動の数理解析モデルについて」

12:00-12:50 大崎浩一 (宇部高専)

「反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター」

---

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C(2) : 辻川、仙葉、壁谷 / 若手 B : 矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

---

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、矢崎成俊 (宮崎大学工学部)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : [tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp](mailto:tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp)

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289