

# PPM 2008 偏微分方程式と現象 : PDEs and Phenomena in Miyazaki 2008

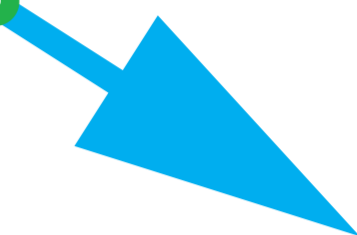
2008年11月14日(金)~11月15日(土)

宮崎大学(木花キャンパス)工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)



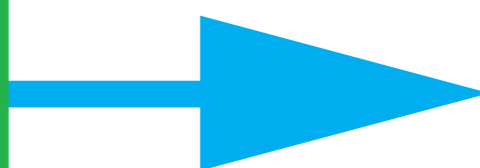
宮崎大学

University of Miyazaki



青島

アブストラクト



## 研究集会 「偏微分方程式と現象 :

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2008 (略称 : PPM2008) 」

日時 : 2008 年 11 月 14 日 ( 金 ) ~ 11 月 15 日 ( 土 )

会場 : 宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内 : <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/research/ppm/ppm2008.html>

### プログラム

#### 11 月 14 日 ( 金 )

##### 午後の部

14:00-15:10 平岡 裕章 ( 広島大学 )

「衝突多様体の渦点問題への応用」

15:25-16:35 鈴木 香奈子 ( 東北大学 )

「ある反応拡散方程式系の解のダイナミクス」

16:50-18:00 若狭 徹 ( 早稲田大学・明治大学 )

「ある双安定型方程式に対する線形化固有値問題の表現公式と漸近公式」

#### 11 月 15 日 ( 土 )

##### 午前の部 << PPM2008 特別実験講座 >>

10:15-12:15 中原 明生 ( 日本大学 )

「ペーストの記憶と乾燥亀裂パターン」

午後の部

14:00-15:10 鈴木 政尋 (東京工業大学)

「半導体モデルの階層構造について」

15:25-16:35 飯間 信 (北海道大)

「昆虫飛翔の数値モデルと理論モデル」

16:50-18:00 柳田 英二 (東北大学)

「主固有値最小化問題と個体群ダイナミクス」

---

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 C)

課題番号	研究代表者	課題名
20540122	辻川 亨	反応拡散方程式の大域的解構造と縮約系についての研究
20540200	飯田雅人	界面を追跡しやすい反応拡散系の構築
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究

の援助を受けています。

---

世話人： 辻川 亨、飯田雅人、矢崎成俊、北 直泰、大塚浩史 (宮崎大学)

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : [tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp](mailto:tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp)

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

# 「衝突多様体の渦点問題への応用」

平岡裕章（広島大学）

本講演では渦点系に現れる衝突特異点の構造について考察する． $N$ 体問題において開発された衝突多様体理論を渦点系に応用することで，衝突特異点の正則化可能性，自己相似（or 非自己相似）解の存在等を議論する．平面3渦問題を中心に解説した後，より一般の問題への拡張についても考察を与える予定である．

# ある反応拡散方程式系の解のダイナミクス

鈴木香奈子 (東北大学国際高等研究教育機構)

## はじめに

生物の形態形成のモデルとして, A. Gierer と H. Meinhardt [1] は次の反応拡散方程式系を提唱した:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^p}{H^q} + \sigma_a(x) & (x \in \Omega, t > 0), \\ \tau \frac{\partial H}{\partial t} = D \Delta H - H + \frac{A^r}{H^s} + \sigma_h(x) & (x \in \Omega, t > 0), \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial H}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 & (t > 0), \\ A(x, 0) = A_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x) & (x \in \Omega). \end{cases} \quad (\text{GM})$$

ただし,  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の有界領域でその境界  $\partial \Omega$  はなめらか,  $\nu$  は  $\partial \Omega$  の外向き単位法線ベクトルとする. 係数  $\varepsilon, \tau, D$  は正定数とし,  $\sigma_a(x)$  と  $\sigma_h(x)$  は非負関数とする. 指数  $p, q, r, s$  は,  $p > 1, q > 0, r > 0, s \geq 0$  かつ

$$0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1} \quad (*)$$

を満たすものとする. さらに初期値  $A_0(x), H_0(x)$  は  $\bar{\Omega}$  上で正とする.

$A$  は活性因子 (activator),  $H$  は抑制因子 (inhibitor) と呼ばれる化学物質の濃度を表す.  $\sigma_a(x), \sigma_h(x)$  は基礎生産項で, 単位時間あたりに細胞から生産される活性因子, 抑制因子の量をそれぞれ表す. (GM) は, 次のアイデアに基づいている: 活性因子の拡散は遅く, どんどん自己増殖をする. 一方で抑制因子の拡散は速く, 活性因子の際限のない増加を先回りして阻害する. その結果, 始めに活性因子が増加し始めた場所では, さらに活性因子は増加し, その周囲では抑制因子によって活性因子の生産は抑制され続け, 二つの濃度差はますます増大し, 空間的に非一様なパターンが形成される. 活性因子が多く集まった場所から細胞や組織の変化が始まるとされる. 一方, 数値実験では,  $\sigma_a(x), \sigma_h(x)$  が恒等的に 0 に等しい場合, 抑制因子の反応時定数  $\tau$  が十分大きいと, 一旦は形成されたパターンが最終的にはつぶれてしまう (つまり  $A$  も  $H$  も 0 に収束する) 現象が観察されている. 本講演では, 活性因子の濃度が 0 に収束する現象を「パターンの崩壊」と呼ぶことにする.

初期値 境界値問題 (GM) の解の存在や有界性に関する結果は, [4, 6, 3, 2] などがある. しかし, (GM) は非線形項の分母に未知関数を含むため, 一般に解析が難しく, 詳しい挙動についてはあまり知られていない. 従って, パターンの崩壊を軸に, (GM) の解の挙動を考察する.

## 常微分方程式系の解

まず最も単純な場合として, (GM) から拡散項と基礎生産項を除いた次の常微分方程式系を考察する:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -A + \frac{A^p}{H^q} & (t > 0), \\ \tau \frac{dH}{dt} = -H + \frac{A^r}{H^s} & (t > 0), \\ A(0) = \phi, \quad H(0) = \psi. \end{cases} \quad (\text{K})$$

ここで,  $\phi, \psi$  は正とする. (K) は  $uv$ -平面の第一象限にただ一つの平衡点  $(A, H) = (1, 1)$  を持ち, さらに原点  $(0, 0)$  もある意味で平衡点とみなすことができる. 非線形項が分数のため,  $(0, 0)$  近傍での解軌道の解析は難しいことが予想されるが, (K) の解軌道はすべて解明されており ([5]), 次の補題が成立する:

補題 1 もし  $\tau > q/(p-1)$  ならば, (K) の解  $(A(t), H(t))$  で,  $t \rightarrow +\infty$  のとき  $(0, 0)$  に収束するものが存在する.

## パターンの崩壊

常微分方程式系 (K) が拡散項を含む場合, つまり (GM) に対しては, 次の定理が成り立つ:

定理 2 (GM) で  $\sigma_a(x) \equiv \sigma_h(x) \equiv 0$  とする.  $\tau > q/(p-1)$  とし, さらに初期値に次の関係を仮定する:

$$\left( \min_{x \in \Omega} H_0(x) \right)^q > \frac{p-1}{p-1-\frac{q}{\tau}} \left( \max_{x \in \Omega} A_0(x) \right)^{p-1}. \quad (1)$$

このとき, (GM) の解  $(A(x, t), H(x, t))$  は  $(0, 0)$  に,  $t \rightarrow +\infty$  のとき  $x$  について一様に収束する.

定理 2 の証明は, [6] の手法を用いる.

定理 2 の初期値の関係式 (1) は, 補題 1 を満たす常微分方程式系の解と密接な関係がある. 本講演では, まず補題 1 を満たす常微分方程式系の解の存在を考察する. その後, 定理 2 の主張を常微分方程式系の解との対比において理解する. 最後に, パターンの崩壊は (GM) を少し一般化した反応拡散系に対しても起こりうることなどを紹介する.

## References

- [1] A. Gierer and H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik (Berlin) **12** (1972), 30-39.
- [2] H. Jiang, *Global existence of solutions of an activator-inhibitor system*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **14** (2006), 737-751.
- [3] M. Li, S. Chen and Y. Qin, *Boundedness and blow up for the general activator-inhibitor model*, Acta Math. Appl. Sinica **11** (1995), 59-68.
- [4] K. Masuda and K. Takahashi, *Reaction-diffusion systems in the Gierer-Meinhardt theory of biological pattern formation*, Japan J. Appl. Math. **4** (1987), 47-58.
- [5] W.-M. Ni, K. Suzuki and I. Takagi, *The dynamics of a kinetic activator-inhibitor system*, J. Differential Equations **299** (2006), 426-465.
- [6] J. Wu and Y. Li, *Classical global solutions for the activator-inhibitor model*, Acta Math. Appl. Sinica **13** (1990), 501-505.

# ある双安定型方程式に対する線形化固有値問題の 表現公式と漸近公式

若狭 徹 (早稲田大学/明治大学)  
四ツ谷 晶二 (龍谷大学)

本講演では非線形境界値問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0, & \text{in } (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

及びその任意の (非定数) 解に対する線形化固有値問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u(x))\varphi(x) + \mu\varphi(x) = 0 & x \in (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

について考察する. ここで  $\varepsilon > 0$  はパラメータとし,  $f$  は均衡 (balanced) 双安定型非線形項, すなわち (適当な範囲において)  $f$  の零点は 3 点  $u = 0, u_{\pm}$  からなり, さらに条件  $f_u(0) > 0$ ,  $f_u(u_{\pm}) < 0$ ,  $F(u_+) = F(u_-)$  を満たすものとする. ただし

$$F(u) := \int_0^u f(s) ds$$

である. 問題 (1) はスカラー反応拡散方程式

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t(x, t) = \varepsilon^2 u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = g(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3)$$

の定常問題であり, (3) のダイナミクスの研究に重要な役割を果たす. また (2) は定常解  $u(x)$  の安定性をはじめ, (3) の定常解近傍における局所的ダイナミクスを決定する. これら一連の問題に関しては 1970 年代より盛んに研究が行われており, 既に多くの研究成果が挙げられている.

特にパターンダイナミクスの立場からは, パラメータ  $\varepsilon$  が十分小さい場合に関心が持たれる. 定常問題 (1) においては  $\varepsilon = f_u(0)/(n\pi)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) において,  $n$  モード定常解  $u_{n,\varepsilon}$  が (1) の不安定定常解  $u = 0$  より分岐し, さらに  $\varepsilon \rightarrow 0$  に伴い各  $n$  モード解の零点近傍において遷移層が形成される. また (3) の非定常解  $u(x, t)$  についても時間発展に伴い遷移層が形成され, そのダイナミクスは遷移層の運動により特徴づけられる. 遷移層の運動は非常に遅い時間スケールで進行し (Carr-Pego [2]), その衝突や消滅などのプロセスを経て  $u(x, t)$  は最終的にある定常解に収束する.

こうした背景を 1 つの動機付けとして, 講演者は線形化問題 (2) の詳細な構造を調べる研究を行ってきた.  $n$  モード解  $u_{n,\varepsilon}$  に対する線形化固有値問題を次の形に書き表す:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (\varphi_j^n)_{xx}(x; \varepsilon) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi_j^n(x; \varepsilon) + \mu_j^n(\varepsilon)\varphi_j^n(x; \varepsilon) = 0 & x \in (0, 1), \\ (\varphi_j^n)_x(0; \varepsilon) = (\varphi_j^n)_x(1; \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

ただし,  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  であり,  $\mu_j^n(\varepsilon)$  及び  $\varphi_j^n(x; \varepsilon)$  は  $j+1$  番目の固有値及び固有関数を表すものとする. 上で述べた  $n$  モード解の安定性や遷移層の運動などに関連して以下が既知の事実として知られている (Brunovský-Fiedler [1], [2] など).

- (i) 安定性・不安定指数 :  $\mu_0^n(\varepsilon) < \dots < \mu_{n-1}^n(\varepsilon) < 0 < \mu_n^n(\varepsilon) < \dots \leq +\infty$ .
- (ii) 固有値の評価 :  $0 < j < n$  ならばある  $\varepsilon_1 > 0, d > 0, C_1 > 0$  が存在して

$$|\mu_j^n(\varepsilon)| \leq C_1 e^{\frac{d}{n\varepsilon}} \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_1),$$

$j > n$  ならばある  $\varepsilon_2 > 0, C_2 > 0$  が存在して

$$\mu_j^n(\varepsilon) > C_2 \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_2).$$

また Fusco-Hale [3] では形式的な議論に基づき負の固有値や固有関数の漸近公式が示唆されている。

本講演では  $f(u) = \sin u$  や  $f(u) = u - u^3$  などの具体的な非線形項に対して

- (i) 全ての固有関数の表現公式
- (ii) 全ての固有値の  $\varepsilon \rightarrow 0$  における詳細な漸近公式
- (iii) 全ての固有関数の  $\varepsilon \rightarrow 0$  における漸近形状

を与えることを目的とする。これらの非線形項の場合、ある3階の線形常微分方程式の特解を用いて固有関数の表示式を直接構成することが可能である。また境界条件を通して固有値が第3種完全楕円積分を含む方程式により決定されることがわかる。さらに表現公式と楕円積分の解析に基づき固有値・固有関数の漸近公式を得ることができる。図1及び2において  $f(u) = \sin u$  の場合における3モード解  $u_{3,\varepsilon}$ , (4) のポテンシャル  $f_u(u_{3,\varepsilon}(x))$ , 及びいくつかの固有関数のグラフを与える。これらの主結果に関しては講演時に紹介するが、一連の結果を通して固有関数全体がいくつかの特別な固有関数によって分類されることが特筆すべき点である。

講演の終わりにはこれらの線形化問題と Lamé 方程式

$$w_{zz}(z) + [n(n+1)\text{sn}(z, k)^2 + \mu]w(z) = 0, \quad n \in \mathbf{N}, k \in (0, 1),$$

との関係を明らかにする。実は  $f(u) = \sin u, f(u) = u - u^3$  における線形化方程式は  $n = 1, 2$  の場合に相当する。Lamé 方程式は19世紀をその研究起源とする長い歴史を持ち現在もなお可積分系理論などにおいて盛んに議論されている。可積分系における諸結果を紹介し、今後の研究との関連性などについて言及したい。

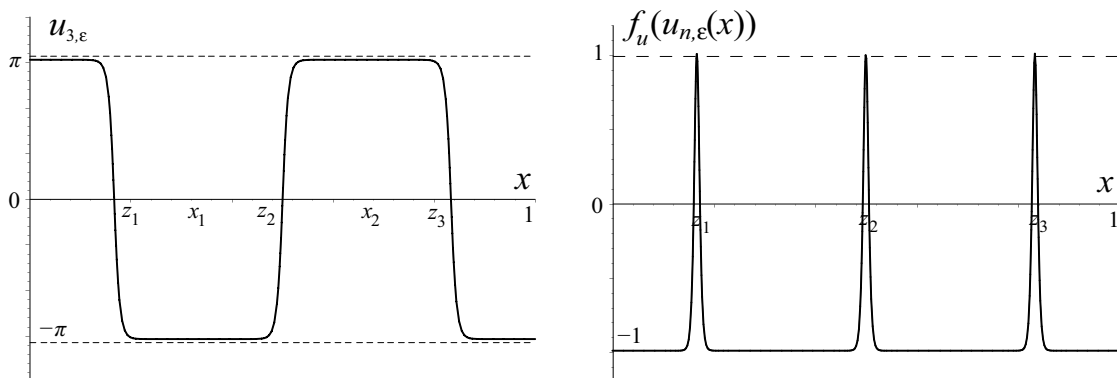


図 1:  $u_{3,\varepsilon}, f_u(u_{3,\varepsilon}(x))$  のグラフ。



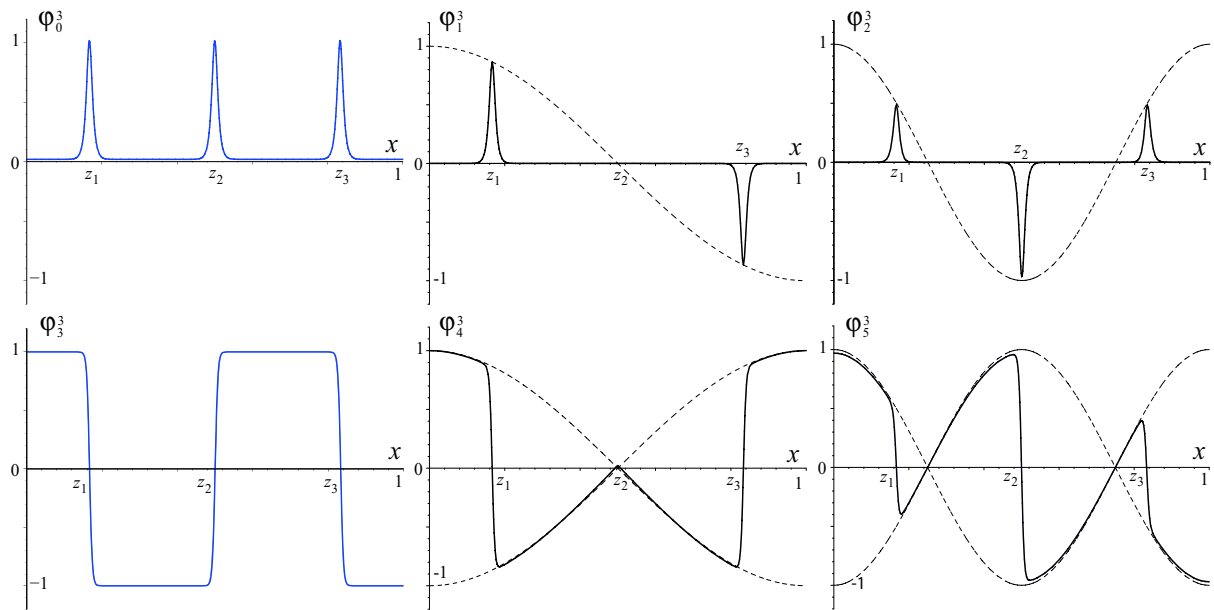


図 2: 固有関数  $\varphi_j^3$  ( $j = 0, \dots, 5$ ) のグラフ.

## 参考文献

- [1] Brunovský-Fiedler, J. *Differential Equations*, **81** (1989), 106-135.
- [2] Carr-Pego, *Commun. Pure Appl. Math.* **42** (1989), 523-576.
- [3] Fusco-Hale, J. *Dynam. Differential Equations*, **1**, (1989), 75-94.
- [4] D. Henry, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.
- [5] Kosugi-Morita-Yotsutani, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **3** (2005), 665-682.
- [6] K. Takemura, *Commun. Math. Phys.* **235** (2003), 467-494.
- [7] T. Wakasa, *Funkcialaj Ekvacioj*, **49** (2006), 321-336.
- [8] T. Wakasa, dissertation, March, 2007, Waseda University.
- [9] Wakasa-Yotsutani, *Commun. Pure Appl. Anal.* **7** (2008), 745-763.
- [10] Wakasa-Yotsutani, Preprint.

# ペーストの記憶と乾燥亀裂パターン

日本大学理工学部 中原明生、篠原雄、星野健太郎、勝木厚成、松尾洋介

**要旨** ペーストは揺れや流れを記憶する。記憶の形成にはペーストの持つ塑性が重要な役割を果たしている。ペースト内に蓄えられたこれらの記憶は肉眼で見てもわからないが、ペーストを乾燥破壊させることにより生じる亀裂パターンとして視覚化できることが実験によってわかった。この現象を応用することにより、ペースト内の記憶を操作して乾燥破壊時に現れる亀裂パターンの形状をコントロールできるようにもなった。

## 乾燥破壊

我々の扱うペーストは粉と水の混合液のことであり、粉の比率の高いコロイド・サスペンションに該当する。粉の比率が高いために塑性流動をし、ペーストに加えた外力の大きさが降伏応力よりも小さい場合は流動化しない。粒子の形状が板状で大きさがミクロン・サイズの際は粘土とも呼ばれる。このペーストを温度・湿度一定の条件下で乾燥させると、干上がった湖で見られるようなセル状の等方的な亀裂パターンが出現する。我々は乾燥前のペーストに揺れや流れを加えることによって、乾燥後に現れる亀裂パターンが変化することを見出したので、その現象について説明したい [1]。

### 揺れの記憶

授業で使うチョークの材料である炭酸カルシウムの粉と水を質量比 2:1 で混ぜてペーストを用意しよう。このペーストを円形容器に流し込んで数日乾燥させると、通常は等方的なセル状亀裂パターンが発生する。ところが、このペーストを容器に流し込んだ直後に 1 分ほど容器に微小な振動を加えてからその後静止状態で乾燥させると、揺すった方向に依存した異方的な亀裂パターンが形成されることを見出された。図 1 に示すが、ペーストを乾燥前に回転方向に揺すっておくと乾燥後に放射状の亀裂パターンが、一方向に揺すっておくと縞状亀裂パターンが発生する。すなわち、ペーストは初期振動の方向を覚えることができ、その後の数日間にわたる乾燥過程においてもその記憶は持続され、最終的に発生する亀裂パターンを決定するほどの効果があるのである。また、揺れの記憶による亀裂パターンの方向は初期振動の方向に常に垂直なものとなることに注目しよう [1]。ペーストが記憶するという現象は非常に興味深いものであり、その後塑性を考慮した弾性体の理論により揺れの記憶の形成メカニズムはある程度説明できるようになった [2-4]。

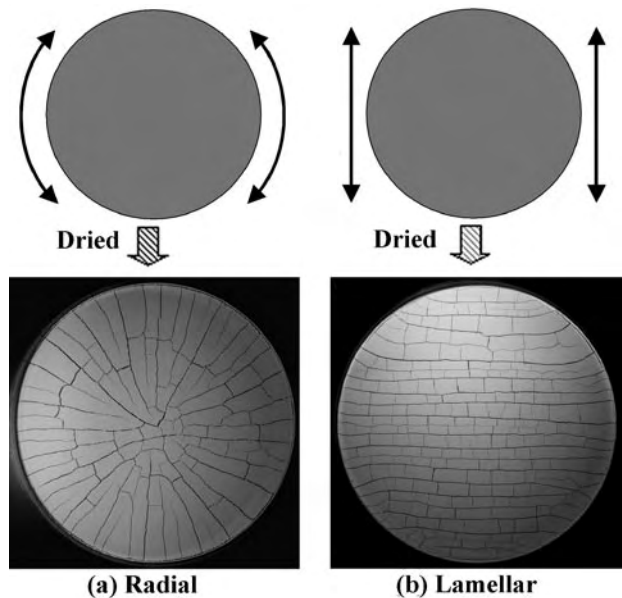


図 1：揺れの記憶による亀裂パターン。円形容器の直径は 50cm、炭酸カルシウム・ペーストの厚みは 1cm。  
(a) 放射状亀裂、(b) 縞状亀裂 [1]。

### 流れの記憶

他の粉を用いて作成したペーストも揺れを記憶するのだろうか？その疑問に答えるために板状の炭酸水酸化マグネシウムの粉を水と混ぜてペースト（粘土ペースト）を作成し揺すったところ、粉の比率が高い時は炭酸カルシウム・ペーストと同様に揺れを記憶し揺すった方向に垂直に割れるが、粉の比率が低い場合は揺することによってペーストが流れ、しかもその流れの方向を記憶することがわかった。ここで、流れの記憶による亀裂パターンは初期振動の方向に平行というよりも、初期振動によって流れた方向に平行であることに注意しよう [5]。

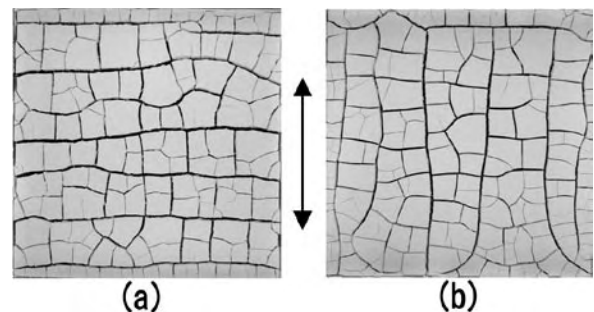


図 2：亀裂パターンの転移。矢印は初期振動方向。  
(a) 揺れの記憶による垂直縞状亀裂パターン。  
(b) 流れの記憶による平行縞状亀裂パターン。 [5]

## 亀裂パターンの形態相図

記憶の形成メカニズムを調べるために、ペースト内の粉の体積比率  $\rho$  と初期外力の加速度をパラメーターとして、乾燥後の粘土ペーストの亀裂パターンの形態相図を作成した (図3)。ペーストが塑性流動をして揺れや流れを記憶できる領域は液性限界と塑性限界の間である。ここで液性限界とは、これ以下だと塑性がなく粘性のみなので記憶できないラインを言い、図では  $\rho = 4\%$  の点線に対応する。塑性限界とは、これ以下では塑性流動できるが、これ以上では半固体状態で流動化できないラインを言い、図では  $\rho = 18\%$  の一点破線に対応する。実線は初期振動によるせん断応力とペーストの降伏応力が等しいラインであり、初期振動の強さが降伏応力ラインよりも上だとペーストは動けるが、それ以下だとペーストは動けない。○印はセル状亀裂、■印は揺れの記憶による垂直縞、田印は流れの記憶による平行縞、を表している。

液性限界と塑性限界の間の領域を見ると、領域 A (セル)、B (揺れの記憶・垂直縞)、C (流れの記憶・平行縞)、D (セル) に分けられる。降伏応力ラインよりも適度に強い力で揺すった領域 B では、ペーストが揺れを記憶しているのがわかる。

領域 C は、領域 B よりも強い力で揺するか、粉の比率が少ない状態で揺すった状況に該当する。そのためペーストは揺れるのではなく流れ、その流れの方向を記憶するのである。領域 C は板状の粒子で構成される粘土ペーストでは形態相図内に存在するが、炭酸カルシウム・ペーストのような粒状の粉でできたペーストでは存在しない。このことから、粒子の形状が流れの記憶に関与していることがわかる。

領域 A と D はともにセル状亀裂ではあるが、領域 A では降伏応力ラインの下であることからペーストは揺れていないので揺れも流れも記憶がないのに対し、領域 D では揺れすぎてペーストが乱流状態にあるために方向性が記憶できていないという違いがある。

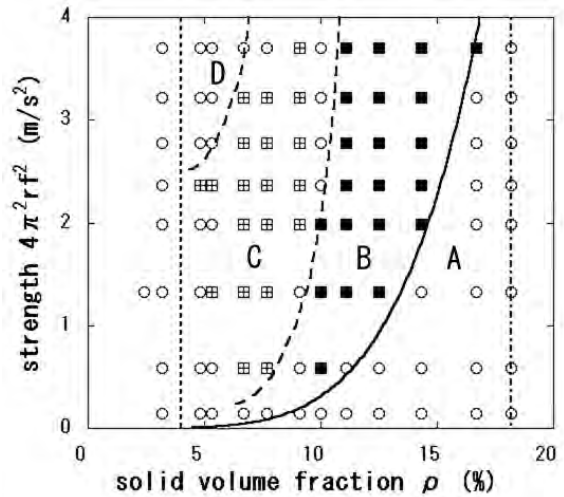


図3：粘土ペーストの亀裂パターンの形態相図。○：セル状、■：揺れによる垂直縞、田：流れによる平行縞。実線：降伏応力ライン、点線：液性限界、一点破線：塑性限界、破線：亀裂パターンから引いた境界線 [5]。

## 結論

ペーストが揺れや流れの方向を記憶することを実験的に見出した。この記憶は乾燥破壊時に現れる亀裂パターンとして視覚化できる。ペーストのメモリー効果を利用すると、ペーストに割れるべき形状を覚えさせることができ、実際にセル状、縞状、螺旋、リングなどの亀裂パターンを自由自在に作成できるようになった [6]。

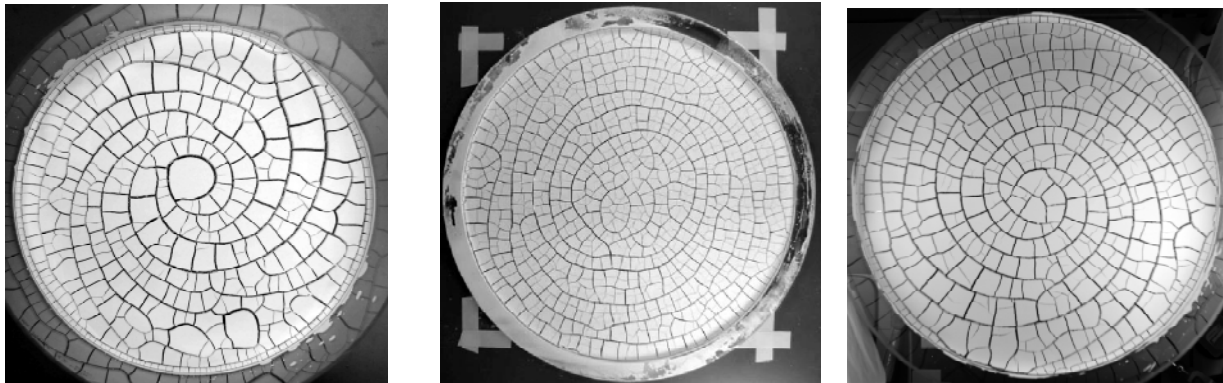


図4：記憶効果を利用した様々な亀裂パターン。左から、螺旋、リング、螺旋（反対回り）

## 参考文献

- [1] Nakahara A., Matsuo Y.: Imprinting Memory into Paste and Its Visualization as Crack Patterns in Drying Process. *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**:1362-1365, 2005.
- [2] T. Ooshida, Sekimoto K : Internal stress in model elasto-plastic fluids. *Phys. Rev. Lett.* **95**:108301, 2005.
- [3] Otsuki M : Memory effect on the formation of drying cracks. *Phys. Rev. E* **72**:046115, 2005.
- [4] T. Ooshida: Continuum theory of memory effect in crack patterns of drying pastes. *Phys. Rev. E* **77**:061501, 2008.
- [5] Nakahara A., Matsuo Y.: Transition in the pattern of cracks resulting from memory effects in paste. *Phys.Rev. E* **74**:045102(R), 2006.
- [6] *Physics Today* **60**: no. 9, p. 116, 2007

# 半導体モデルの階層構造について\*

鈴木 政尋 (東京工業大学)

e-mail: Masahiro.Suzuki@is.titech.ac.jp

半導体中の電子流を記述するモデル方程式として, Hydrodynamic model (HHD モデル), Energy-transport model (ET モデル), Drift-diffusion model (DD モデル) 等の方程式系が提案され, デバイスの使用用途に応じて, 設計の際のシミュレーションに利用されている. 従って, これらのモデル方程式間の関係 (階層構造) の解析は, 数学的に興味深いだけでなく, 工学的にも重要な問題である. この関係は, モデル方程式に含まれる物理係数である緩和時間を形式的に 0 に近づける極限操作 (緩和極限) によって, 説明できる. 本講演では, HHD モデルの解の安定性及び緩和極限について議論し, モデルの階層構造を解明する.

HHD モデル は次の方程式系で与えられる.

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (1a)$$

$$j_t + \left( \frac{j^2}{\rho} + \theta \rho \right)_x = \rho \phi_x - \frac{j}{\tau_m}, \quad (1b)$$

$$\rho \theta_t + j \theta_x + \frac{2}{3} \left( \frac{j}{\rho} \right)_x \rho \theta - \frac{2}{3} \kappa \theta_{xx} = \frac{2\tau_e - \tau_m}{3\tau_m \tau_e} \frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\tau_e} (\theta - \bar{\theta}), \quad (1c)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (1d)$$

ここで,  $\rho, j, \theta, \phi$  はそれぞれ, 電子密度, 電流密度, 絶対温度, 電位を表す未知関数である. また,  $\bar{\theta}, \kappa, \tau_m, \tau_e$  は, 室温, 熱伝導係数, モーメントの緩和時間, エネルギーの緩和時間を表す正定数とする. ドーピング・プロファイル  $D(x)$  は半導体中に固定されている正イオンの分布を表す関数であり, ここでは有界連続性と正値性を仮定する:  $0 < c \leq D(x) \in \mathcal{B}^0(\bar{\Omega})$ . この方程式系に対する初期値と境界値を

$$(\rho, j, \theta)(0, x) = (\rho_0, j_0, \theta_0)(x), \quad (2)$$

$$\rho(t, 0) = \rho_l, \quad \rho(t, 1) = \rho_r, \quad \theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0, \quad \phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = \phi_r \quad (3)$$

とおく. ここで,  $\rho_l, \rho_r, \phi_r$  は正定数である.

ET モデル及び DD モデルは, 形式的な極限操作により方程式系 (1) から導出される. まず, 方程式系 (1) でスケール変換

$$s := \frac{t}{\tau_m}, \quad J := \frac{j}{\tau_m}, \quad \varepsilon := \tau_m^2, \quad \lambda := \tau_m \tau_e, \quad \kappa_0 := \frac{\kappa}{\tau_m}$$

を行うと, 次の方程式系が得られる.

$$\rho_s + J_x = 0, \quad (4a)$$

$$\varepsilon J_s + \left( \varepsilon \frac{J^2}{\rho} + \rho \theta \right)_x = \rho \phi_x - J, \quad (4b)$$

$$\rho \theta_s + J \theta_x + \frac{2}{3} \left( \frac{J}{\rho} \right)_x \rho \theta - \frac{2}{3} \kappa_0 \theta_{xx} = \left( \frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\lambda} \right) \frac{J^2}{\rho} - \frac{\rho}{\lambda} (\theta - \bar{\theta}), \quad (4c)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (4d)$$

\*本研究は西畑伸也先生 (東京工業大学) との共同研究による.

方程式系 (4) で，形式的にパラメーター  $\varepsilon$  を 0 として，ET モデルが得られる．

$$\rho_s + J_x = 0, \quad (5a)$$

$$\rho\theta_s + J\theta_x + \frac{2}{3} \left( \frac{J}{\rho} \right)_x \rho\theta - \frac{2}{3} \kappa_0 \theta_{xx} = \frac{2}{3} \frac{J^2}{\rho} - \frac{\rho}{\lambda} (\theta - \bar{\theta}), \quad (5b)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (5c)$$

このとき，電流密度は  $J = \rho\phi_x - (\theta\rho)_x$  で与えられる．さらに，方程式系 (5b) を  $\lambda$  倍したのち， $\lambda = 0$  を代入して，DD モデルが得られる．

$$\rho_s + J_x = 0, \quad (6a)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (6b)$$

ここで，電流密度は  $J = \rho\phi_x - (\bar{\theta}\rho)_x$  である．

**主結果** 本研究では，方程式系 (4), (5) に境界条件 (3) を満たす定常解と時間大域解が一意的に存在することを証明した．加えて，時間大域解の漸近状態が定常解で与えられること及び，収束の速さが指数関数的であることも併せて示した．

さらに，緩和極限の数学的正当化を行い，モデルの階層構造を研究した．主要結果として，パラメーター  $\varepsilon$  を 0 に近づけたとき，初期値境界値問題 (2)–(4) の解が方程式系 (5) の解に収束することを示した．また，パラメーター  $\varepsilon, \lambda$  をともに 0 に近づけたとき，方程式系 (4), (5) の解が方程式系 (6) の解に収束することも証明した．これらの定理では，初期値 (2) が方程式系 (5), (6) の平衡状態，すなわち

$$J_0(x) := j_0/\tau_m(x) = \{\rho\phi_x - (\theta\rho)_x\}(0, x), \quad \theta_0(x) = \bar{\theta}$$

とは限らない為，初期層が現れる．この初期層が時間  $t$  とパラメーター  $\varepsilon, \lambda$  に対して指数関数的に減衰することも示している．

なお，これらの安定性と緩和極限の定理では緩和時間が十分小さいことを仮定しているが，初期値の大きさには如何なる制限も課す必要はない．

## 参考文献

- [1] A. JÜNGEL, Quasi-hydrodynamic semiconductor equations, *Birkhäuser Verlag, Basel* 2001.
- [2] P. A. MARKOWICH, C. A. RINGHOFER AND C. SCHMEISER, Semiconductor equations, *Springer-Verlag, Vienna* 1990.
- [3] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Initial boundary value problems for a quantum hydrodynamic model of semiconductors: asymptotic behaviors and classical limits, *J. Differ. Equ.* **244** (2008), 836-874.
- [4] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Asymptotic stability of a stationary solution to a thermal hydrodynamic model for semiconductors, to appear in *Arch. Ration. Mech. Anal.*.
- [5] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Relaxation limit and initial layer to hydrodynamic models for semiconductors, to appear.

# 「昆虫飛翔の数値モデルと理論モデル」

飯間信（北海道大）

昆虫飛翔でははばたき運動により作られた渦が重要な役割をはたす。しかし渦の生成と粘性散逸を伴うこと、渦自身も翼と相互作用して運動することなど通常の飛行機とは周囲の流れの性質が異なる。講演では数値モデルの結果を紹介し、その後2次元空間の飛翔理論についてお話しする予定である。

# 「主固有値最小化問題と個体群ダイナミクス」

柳田英二（東北大学）

この講演では、不定符号の重みを持つ固有値問題の主固有値最小化問題について論じる。これはある制約条件下において主固有値を最小化するような重み関数を求める問題で、絶滅危惧種を保護するための最適なリソース分配方策と関連している、ここではまず、主固有値の変分原理による特徴付けを用い、最小化解が満たすべき一般的性質を明らかにする。次に、1次元問題に対する完全な解答と与えたのち、空間的な非一様性を導入した場合について論じる。2次元領域については、長方形領域に対して数学的に厳密な議論をするとともに、射影勾配法を用いた数値計算の結果について紹介する。