

PPM 2008 偏微分方程式と現象 : PDEs and Phenomena in Miyazaki 2008

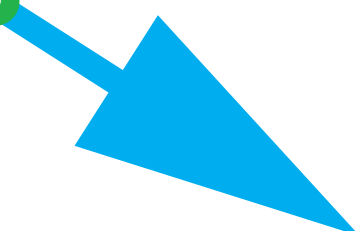
2008 年 11 月 14 日 (金) ~ 11 月 15 日 (土)

宮崎大学 (木花キャンパス) 工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)



宮崎大学

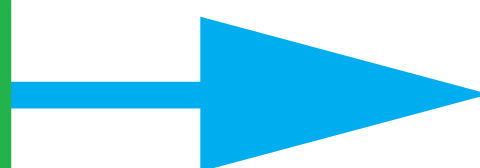
University of Miyazaki



青島



報告集



はじめに

今年度からは、報告集の作成を WEB 掲載のみにして、冊子体の作成をやめようかとも検討していたのですが、紙媒体の方が電子媒体よりも良いという声がちらほら聞こえてきましたので、2008 年度も冊子を作成することにいたしました。講演者の方々には報告集の作成にご協力いただきましたこと、改めてお礼申し上げます。

2003 年度より毎年継続して PPM を開催することができました。お陰様で、過渡的に消え去っていく研究集会にならなかったことは、講演者の方々はもちろんですが、“予期せずに期待していた”参加者の方々が毎年来宮されたことが大きな支えであったと感じております。誠にありがとうございました。今後とも、数学、物理、工学、実験などの「ごったに」研究集会を目指していきたいと思います。

尚、本報告集の PDF ファイルは、

<http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/research/ppm/ppm2008.html>

より入手できます。カラー図版等の閲覧にご利用ください。また、過去の研究集会 PPM2003～PPM2007 の報告集も上記 WEB サイトから辿ることができますので、合わせてご参照いただけますと幸いです。

本研究集会は、いくつかの科学研究費補助金の援助を受けました。補助金番号の一覧は次々ページのプログラムの最後に掲載してあります。最後に、研究集会開催にあたり、ご協力くださった関係者の方々全てに感謝の意を表したいと思います。

2009 年 5 月

もうすぐ暑くなる予感のする宮崎より、世話人を代表して

矢崎成俊

目次

1. **平岡裕章**（広島大学）
衝突多様体の渦点問題への応用 6–14
2. **鈴木香奈子**（東北大学）
ある反応拡散方程式系の解のダイナミクス 16–25
3. **若狭徹**（早稲田大学・明治大学）
ある双安定型方程式に対する線形化固有値問題の表現公式と漸近公式 26–40
4. **中原明生**（日本大学）
PPM2008 特別実験講座：ペーストの記憶と乾燥亀裂パターン 42–43
5. **鈴木政尋**（東京工業大学）
半導体モデルの階層構造について 44–53
6. **飯間信**（北海道大）
昆虫飛翔の数値モデルと理論モデル 54–59
7. **柳田英二**（東北大学）
主固有値最小化問題と個体群ダイナミクス 60–67
- * 過去のプログラム（PPM2003 ～ PPM2007） 68–77

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2008 (略称：PPM2008)」

日時： 2008 年 11 月 14 日（金）～ 11 月 15 日（土）

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内： <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/research/ppm/ppm2008.html>

プログラム

11 月 14 日（金）

午後の部

14:00-15:10 **平岡 裕章**（広島大学）

「衝突多様体の渦点問題への応用」

15:25-16:35 **鈴木 香奈子**（東北大学）

「ある反応拡散方程式系の解のダイナミクス」

16:50-18:00 **若狭 徹**（早稲田大学・明治大学）

「ある双安定型方程式に対する線形化固有値問題の表現公式と漸近公式」

11 月 15 日（土）

午前の部 << PPM2008 特別実験講座 >>

10:15-12:15 **中原 明生**（日本大学）

「ペーストの記憶と乾燥亀裂パターン」

午後の部

14:00-15:10 **鈴木 政尋**（東京工業大学）

「半導体モデルの階層構造について」

15:25-16:35 **飯間 信**（北海道大）

「昆虫飛翔の数値モデルと理論モデル」

16:50-18:00 **柳田 英二**（東北大学）

「主固有値最小化問題と個体群ダイナミクス」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C）

課題番号	研究代表者	課題名
20540122	辻川 亨	反応拡散方程式の大域的解構造と縮約系についての研究
20540200	飯田雅人	界面を追跡しやすい反応拡散系の構築
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、飯田雅人、矢崎成俊、北 直泰、大塚浩史（宮崎大学）
連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)
〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科
E-mail：tujukawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL：0985-58-7381 ／ 0985-58-7288（事務室） & FAX：0985-58-7289

Remarks on collision manifolds and nonexistence of non self-similar collision solutions in the 3-vortex problem

Yasuaki Hiraoka

Graduate School of Science
Hiroshima University

Address
1-7-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739-8521, JAPAN

E-mail
hiraok@hiroshima-u.ac.jp

1 Introduction

The N -vortex problem in $\mathbf{R}^2$ is described in the following differential equations:

$$\dot{z}_j = i \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N \frac{k_m}{\bar{z}_j - \bar{z}_m}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

where $i = \sqrt{-1}$, $\dot{z}_j = dz_j/dt$, $z_j = x_j + iy_j$ represents the position of the j -th vortex, $\bar{z}_j$ expresses the complex conjugate, and k_j denotes the vorticity divided by 2π of the j -th vortex. These ordinary differential equations are derived as a limiting problem of the incompressible Euler equation focusing on delta function type vortices. Due to the importance of understanding motions of vortices and its simplicity rather than the Euler equation, which is a partial differential equation, the N -vortex problem has been studied in many fields with various viewpoints (e.g., [4]).

In the previous paper [2], the author applied the technique so called McGehee's collision manifold [3], which has been developed in the N -body problem, to the 3-vortex problem and discussed the regularizations of the triple collision singularity. The main results there are summarized as follows:

Theorem 1 *Under the necessary condition $k_1^{-1} + k_2^{-1} + k_3^{-1} = 0$ for the existence of triple collision solutions, if $k_1 = k_2$, then the triple collision singularity is topologically regularizable under an certain natural equivalence relation.*

Theorem 2 *Under the necessary condition $k_1^{-1} + k_2^{-1} + k_3^{-1} = 0$ for the existence of triple collision solutions, if $k_1 \neq k_2$, then there exists a small positive constant ϵ such that, for $0 < |k_2 - k_1| < \epsilon$, the triple collision singularity can not be topologically regularizable.*

Namely, in the case of $k_1 = k_2$, a solution ending in the triple collision can be connected to a solution beginning in the triple collision so as to be continuous with respect to nearby solutions. On the other hand, in the case of $k_1 \neq k_2$, a solution ending in the triple collision can not be connected to a solution beginning in the triple collision in such a way that flow results. For the proof of these results, the collision manifold plays a central role.

In this paper, we would like to briefly discuss the nonexistence of non self-similar collision solutions from the view point of the collision manifold. The arguments are quite simple as we will see later, just counting the dimension of stable and unstable manifolds to the collision manifold.

2 Settings

Let us here summarize the equations we treat in this paper. First of all, the original equations of the 3-vortex problem are given by

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = i \left(\frac{k_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} + \frac{k_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3} \right) \\ \dot{z}_2 = i \left(\frac{k_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} + \frac{k_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} \right) \\ \dot{z}_3 = i \left(\frac{k_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1} + \frac{k_2}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \right). \end{cases} \quad (1)$$

As usual, we can derive the differential equations for the lengths R_1, R_2 , and R_3 of the sides of the triangle formed by the vortices (see Figure 1) from (1),

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = \frac{2k_1 A}{R_1} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} \right) \\ \dot{R}_2 = \frac{2k_2 A}{R_2} \left(\frac{1}{R_3^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \\ \dot{R}_3 = \frac{2k_3 A}{R_3} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right). \end{cases} \quad (2)$$

Here A denotes the signed area of the triangle satisfying $A^2 = s(s - R_1)(s - R_2)(s - R_3)$ with $s = (R_1 + R_2 + R_3)/2$. That is, A is positive or negative when the ordering of the vortices 1, 2, 3 is counter-clockwise or clockwise, respectively, and $|A|$ represents the area formed by the triangle.

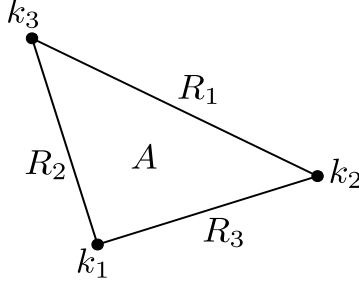


Figure 1: Three vortices

In the 3-vortex problem (2), the triple collision singularity is given by $S_0 = \{(R_1, R_2, R_3) = (0, 0, 0)\}$. A solution of (2) is said to be a collision solution if one of the $R_i, i = 1, 2, 3$, goes to zero in finite time. Let us remark that Corollary 2.6 in [2] states the nonexistence of double collision solutions in the 3-vortex problem. Moreover, it follows by Proposition 2.1 in [2] that there do not exist non collision singularities.

In this paper, we put the assumption

$$k_1^{-1} + k_2^{-1} + k_3^{-1} = 0 \quad (3)$$

on the vorticities, since our main interest is the collision singularities and this condition on the vorticities are necessary to have the triple collision ([1][4][5][6]). Especially, without loss of generality, we assume

$$k_3 < 0 < k_1, k_2.$$

Let us note that $A = 0$ corresponds to a solution whose configuration is collinear. Although $A = 0$ looks to be an equilibrium of (2), it is known that the uniqueness of the solutions fails at $A = 0$. Thus we need an additional condition $\dot{A} = 0$, where

$$\begin{aligned} \dot{A} &= f_4(R) \\ &:= \frac{1}{2} \sum \left\{ \frac{k_1}{R_1} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} \right) \right\} \left[(s - R_1)(s - R_2)(s - R_3) + s \sum \{(s - R_2)(s - R_3)\} \right] \\ &\quad - s \sum \left\{ \frac{k_1}{R_1} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} \right) (s - R_2)(s - R_3) \right\}, \end{aligned}$$

in order to guarantee that a collinear configuration remains fixed for all time. Here, $R = (R_1, R_2, R_3)$ and $\Sigma \{ \cdot \}$ indicates summation over a cyclic permutation of subscripts appearing in the brace. On the previous works (e.g., [1][4][5][6]), this condition was treated separately from (2). However, our approach in this paper is based on the theory of dynamical systems and for this purpose, we need the uniqueness

of the solutions. Therefore, instead of dealing with (2), we consider the following system of ordinary differential equations:

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = f_1(R, A) = \frac{2k_1 A}{R_1} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} \right) \\ \dot{R}_2 = f_2(R, A) = \frac{2k_2 A}{R_2} \left(\frac{1}{R_3^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \\ \dot{R}_3 = f_3(R, A) = \frac{2k_3 A}{R_3} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \\ \dot{A} = f_4(R) \end{cases} \quad (4)$$

on

$$(R, A) \in \mathbf{R}_+^3 \times \mathbf{R}, \quad \text{where } \mathbf{R}_+ := (0, \infty).$$

On this setting, the uniqueness of the solutions of (4) is guaranteed even if $A = 0$.

From this extension, the solutions of the original problem (2) correspond to those which satisfy the relationship $A^2 = s(s - R_1)(s - R_2)(s - R_3)$ for all defined time. In particular, we can easily show the following lemma:

Lemma 2.1 $\alpha := A^2 - s(s - R_1)(s - R_2)(s - R_3)$ is a first integral of (4).

From this lemma, the system of differential equations (4) on the invariant set determined by $\alpha = 0$ represents the 3-vortex problem (2). Moreover, this first integral α plays an important role for the construction of the collision manifold.

Now let us introduce a new coordinate called the trilinear coordinate $x = (x_1, x_2, x_3)$ ([5][6])

$$\mathbf{R}_+^3 \times \mathbf{R} \ni (R, A) \mapsto (x, A, s) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \quad (5)$$

with $x_i = R_i/2s$ and $s = (R_1 + R_2 + R_3)/2$, where

$$T := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}_+^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$

The system of the differential equations (4) is expressed by

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = K(x, A, s)H_1(x) \\ \dot{x}_2 = K(x, A, s)H_2(x) \\ \dot{x}_3 = K(x, A, s)H_3(x) \\ \dot{A} = \bar{f}_4(x) \\ \dot{s} = f_s(x, A, s), \end{cases} \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= -k_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + x_1 \sum \{k_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2)\}, \\
H_2(x) &= -k_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2) + x_2 \sum \{k_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2)\}, \\
H_3(x) &= -k_3 x_3 (x_1^2 - x_2^2) + x_3 \sum \{k_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2)\}, \\
K(x, A, s) &= \frac{A}{8x_1^2 x_2^2 x_3^2 s^4}, \\
\bar{f}_4(x) &= f_4(2sx) \\
&= \frac{1}{16} \sum \left\{ \frac{k_1}{x_1} \left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_3^2} \right) \right\} \left[(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3) + \sum \{(1-2x_2)(1-2x_3)\} \right] \\
&\quad - \frac{1}{8} \sum \left\{ \frac{k_1}{x_1} \left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_3^2} \right) (1-2x_2)(1-2x_3) \right\}, \\
f_s(x, A, s) &= \frac{A}{8s^3} \sum \left\{ \frac{k_1}{x_1} \left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_3^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

In this coordinate, $s = 0$ corresponds to the triple collision. Here, the first integral becomes $\alpha = A^2 - s^4(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)$. Let us note that if $\alpha = 0$, then $0 < x_1, x_2, x_3 \leq 1/2$ must be satisfied, which correspond that the variables (R_1, R_2, R_3) satisfy the triangle inequalities. Hereafter, we fix $\alpha = 0$.

Let us recall from Synge [5] that

$$l := \{x \in T \mid \psi(x) := k_1^{-1}x_1^2 + k_2^{-1}x_2^2 + k_3^{-1}x_3^2 = 0\} \quad (7)$$

gives a hyperbolic curve (see Figure 2). Under the condition (3), the point

$$E := (1/3, 1/3, 1/3),$$

which determines the equilateral triangles, stays on the hyperbolic curve l . Let us denote the points expressing the double collision configurations by

$$P_1 = (0, 1/2, 1/2), \quad P_2 = (1/2, 0, 1/2), \quad P_3 = (1/2, 1/2, 0),$$

respectively. In addition, the hyperbolic curve l intersects the edges P_2P_3 and P_1P_3 at

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{k_1 + k_2 - \sqrt{K}}{2k_2}, \frac{\sqrt{K} - k_1}{2k_2} \right), \\
Q_2 &= \left(\frac{k_1 + k_2 - \sqrt{K}}{2k_1}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{K} - k_2}{2k_1} \right),
\end{aligned} \quad (8)$$

respectively, where $K = k_1^2 + k_2^2 + k_1k_2$. These correspond to the collinear configurations (see Figure 2). For later use, let us also define the point $Q_3 := (1/4, 1/4, 1/2)$, which is the middle point of the edge P_1P_2 .

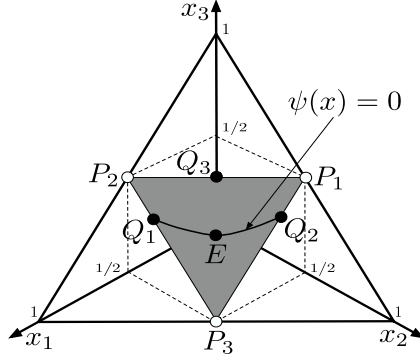


Figure 2: Trilinear coordinate

We here introduce several notations in order to describe the next lemma. Let us denote by L_{Q_1E} the interval without the end points Q_1 and E on l and by L_{Q_2E} the interval without the end points Q_2 and E on l , respectively. Moreover, we introduce the following subsets in $T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ with $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}\hat{L}_{Q_1E} &:= \{(x, A, s) \mid x \in L_{Q_1E}, s \in \mathbf{R}_+, A > 0\}, \\ \hat{L}_{Q_1E^*} &:= \{(x, A, s) \mid x \in L_{Q_1E}, s \in \mathbf{R}_+, A < 0\}, \\ \hat{L}_{Q_2E} &:= \{(x, A, s) \mid x \in L_{Q_2E}, s \in \mathbf{R}_+, A > 0\}, \\ \hat{L}_{Q_2E^*} &:= \{(x, A, s) \mid x \in L_{Q_2E}, s \in \mathbf{R}_+, A < 0\},\end{aligned}$$

Then, we summarize the arguments for the solutions of (6) in [5][6] as follows:

Lemma 2.2 *Suppose $\alpha = 0$. On the hyperbolic curve (7), $H_1(x) = H_2(x) = H_3(x) = 0$, which mean that the solutions whose initial conditions for x lie on (7) are self-similar. (E, A, s) , $(E, -A, s)$, $(Q_1, 0, s)$, and $(Q_2, 0, s)$ are one-parameter families of equilibria parametrized by $s \in \mathbf{R}_+$. For the initial conditions located in $\hat{L}_{Q_1E^*}$ and $\hat{L}_{Q_2E}$, these solutions self-similarly converge to the triple collision in positive finite time. In the negative time direction, these solutions grow up to be unbounded in infinite time. On the other hand, for the initial conditions located in $\hat{L}_{Q_1E}$ and $\hat{L}_{Q_2E^*}$, these solutions self-similarly converge to the triple collision in negative finite time. In the positive time direction, these solutions grow up to be unbounded in infinite time.*

3 Nonexistence of non self-similar collision solutions

It was explained in the previous section that the triple collision solutions are the only singular solutions. Next, we consider to blow up the triple collision singularity

in (6) and derive an appropriate dynamical system by pasting an invariant manifold onto the singularity.

Let us introduce a new variable $B = \frac{A}{s^2}$:

$$T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \ni (x, A, s) \mapsto (x, B, s) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \quad (9)$$

and a new time variable by $t = s^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \tau$. For our purpose to blow up the triple collision singularity, we do not need to add the term $x_1^2 x_2^2 x_3^2$ in the time scaling. However, for the simplicity of the expression of transformed differential equations, we here adopt this time scaling. Essentially, this time transformation acts to slow down the orbits for small s so that a solution ending in the triple collision takes infinite time to reach it. Then the differential equations (6) take the following form:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{k_1 x_1 B}{8} (k_3 x_3 - k_2 x_2) \psi(x) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{k_2 x_2 B}{8} (k_1 x_1 - k_3 x_3) \psi(x) \\ \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{k_3 x_3 B}{8} (k_2 x_2 - k_1 x_1) \psi(x) \\ \frac{dB}{d\tau} = g(x) - \frac{k_3 B^2}{4} \{x_2^2 - x_1^2 + (k_1 x_1 - k_2 x_2) \psi(x)\} \\ \frac{ds}{d\tau} = \frac{k_3 s B}{8} \{x_2^2 - x_1^2 + (k_1 x_1 - k_2 x_2) \psi(x)\}, \end{cases} \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} g(x) = & \frac{k_3}{16} (x_2^2 - x_1^2 + (k_1 x_1 - k_2 x_2) \psi(x)) \left[(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) + \sum \{(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)\} \right] \\ & - \frac{1}{8} \sum \{k_1 x_1 (x_3^2 - x_2^2) (1 - 2x_2)(1 - 2x_3)\}, \end{aligned}$$

and we used the condition (3) for the derivation.

Note that the differential equations (10) do not have singularities at $s = 0$ and define a vector field on $\{(x, B, s) \in T \times \mathbf{R} \times [0, \infty)\}$. Thus, we have extended the differential equations (6) to include the triple collision of vortices. Let us also note that the set determined by $s = 0$ is an invariant set. It means that the set of orbits ending in the triple collision is now the set of orbits asymptotic to the invariant set.

From the restriction $\alpha = s^4 \{B^2 - (1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)\} = 0$ and the differential equations for x and B , which are independent of s , the set

$$\{(x, B, s) \mid x \in T, B^2 = (1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)\}$$

becomes an invariant set, especially

$$\mathcal{C} := \{(x, B, 0) \mid x \in T, B^2 = (1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)\}$$

is an invariant set. We call $\mathcal{C}$ the collision manifold in this paper, which plays a similar role for the analysis of the regularization problems in [3].

Let us investigate the shape of $\mathcal{C}$. Recall that, due to $B^2 = (1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)$, we have $0 < x_1, x_2, x_3 \leq 1/2$. On each line given by $x_1 = 1/2, x_2 = 1/2$, or $x_3 = 1/2$, we have $B = 0$. In addition, $E = (1/3, 1/3, 1/3)$ gives the unique maximum ($B = \frac{1}{3\sqrt{3}}$) and minimum ($B = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$) points. Therefore $\mathcal{C}$ is homeomorphic to a two dimensional sphere minus three points.

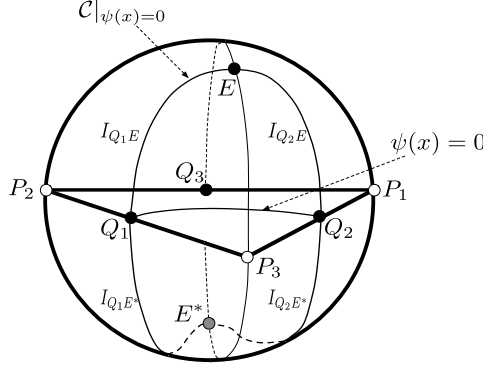


Figure 3: Collision manifold

Taking the variable changes (5) and (9) into account, we use the same symbols $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ for the points on $\bar{\mathcal{C}}$ as those for the corresponding points on $\bar{T}$. Here, $\bar{\mathcal{C}}$ and $\bar{T}$ represent these closures. In addition, we denote by E and E^* the maximum and minimum points of B on $\mathcal{C}$, respectively (see Figure 3).

Let us investigate the flow on $\mathcal{C}$. At first, we can easily show the following lemma:

Lemma 3.1 *Under the condition (3), all points on the closed curve determined by $\{(x, B, 0) \in \mathcal{C} \mid \psi(x) = 0\}$ are equilibria.*

Obviously, this property on $\mathcal{C}$ is induced by Lemma 2.2.

Next, we study the stabilities of these equilibria. Let us denote by I_{Q_1E} the interval without the end points Q_1 and E on $\{(x, B, 0) \in \mathcal{C} \mid \psi(x) = 0, B > 0\}$. The interval without the endpoints Q_2 and E on $\{(x, B, 0) \in \mathcal{C} \mid \psi(x) = 0, B > 0\}$ is denoted by I_{Q_2E} . Similarly, $I_{Q_1E^*}$ and $I_{Q_2E^*}$ are defined for the case of $B < 0$ (see Figure 3).

Lemma 3.2 *Each point $(q, 0) \in I_{Q_2E}$ and $(r^*, 0) \in I_{Q_1E^*}$ has the one dimensional unstable manifold on $\mathcal{C}$. Similarly, each point $(q^*, 0) \in I_{Q_2E^*}$ and $(r, 0) \in I_{Q_1E}$ has the one dimensional stable manifold on $\mathcal{C}$. In addition, these stable and unstable manifolds are transverse to the curve $\{(x, B, 0) \in \mathcal{C} \mid \psi(x) = 0\}$.*

Now, we are in the position to explain the nonexistence of non self-similar collision solutions. From the fact that there do not exist double collision solutions, we can

show that all triple collision solutions converge to the hyperbolic curve $\psi(x) = 0$ on the collision manifold $\mathcal{C}$. Namely, the triple collision solutions asymptotically converge to equilibria, whose energy levels are determined by the initial conditions. However all equilibria which correspond to triple collision ending have one dimensional unstable manifolds on $\mathcal{C}$. Therefore, they do not have another directions for converging to $\mathcal{C}$ except for self-similar collision solutions, whose initial states themselves start from $\psi(x) = 0$. This is the geometrical reasoning of the nonexistence of non self-similar collision solutions.

From this argument, it follows that if some equilibria of the collision ending type have stable manifolds on $\mathcal{C}$, non self-similar collision solutions can exist. This suggests a promising method to a challenging question in the N -vortex problem with $N \geq 4$ about existence of non self-similar collision solutions. Namely, we first construct a collision manifold by a similar manner in [2]. Then, counting the dimension of stable manifold implies the existence of such solutions.

Acknowledgment

The author thanks the organizers of PPM 2008, especially Hiroshi Ohtsuka, for giving me an opportunity of the presentation.

References

- [1] H. Aref, Motion of Three Vortices, *Phys. Fluids* 22 (1979), 393-400.
- [2] Y. Hiraoka, Topological regularizations of the triple collision singularity in the 3-vortex problem, *Nonlinearity* Vol.21 (2008), 361-379.
- [3] R. McGehee, Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem, *Inventions math.* 27 (1974), 191-227.
- [4] P. Newton, *The N -Vortex Problem. Analytical Techniques*, Applied Mathematical Sciences 145, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [5] J. L. Synge, On the Motion of Three Vortices, *Canadian J. Math.* 1 (1949), 257-270.
- [6] J. Tavantzis and L. Ting, The Dynamics of Three Vortices Revisited, *Phys. Fluids* 31 (1988), 1392-1409.

ある反応拡散方程式系の解のダイナミクス

鈴木香奈子

東北大学国際高等研究教育機構

はじめに

生物の形態形成のモデルとして、A. Gierer と H. Meinhardt [1] は次の反応拡散方程式系を提唱した：

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^p}{H^q} + \sigma_a(x) & (x \in \Omega, t > 0), \\ \tau \frac{\partial H}{\partial t} = D \Delta H - H + \frac{A^r}{H^s} + \sigma_h(x) & (x \in \Omega, t > 0), \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial H}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 & (t > 0), \\ A(x, 0) = A_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x) & (x \in \Omega). \end{cases} \quad (\text{GM})$$

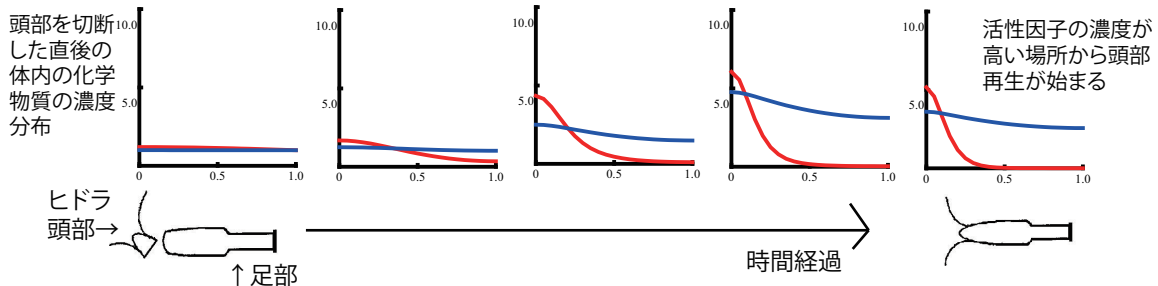
ただし、 Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域でその境界 $\partial\Omega$ はなめらか、 ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとする。係数 ε, τ, D は正定数とし、 $\sigma_a(x)$ と $\sigma_h(x)$ は非負関数とする。指数 p, q, r, s は、 $p > 1, q > 0, r > 0, s \geq 0$ かつ

$$0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1} \quad (*)$$

を満たすものとする。さらに初期値 $A_0(x), H_0(x)$ は $\bar{\Omega}$ 上で正とする。

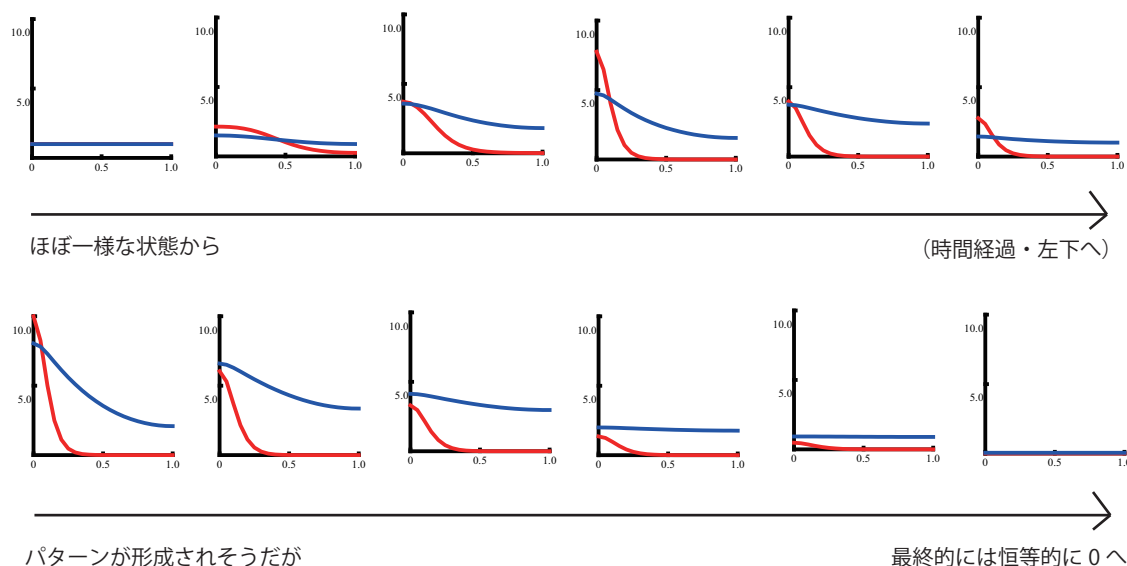
A は活性因子 (activator), H は抑制因子 (inhibitor) と呼ばれる化学物質の濃度を表す。 $\sigma_a(x), \sigma_h(x)$ は基礎生産項で、単位時間あたりに細胞から生産される活性因子、抑制因子の量をそれぞれ表す。(GM) は、次のアイデアに基づいている：活性因子の拡散は遅く、どんどん自己増殖をする。一方で抑制因子の拡散は速く、活性因子の際限のない増加を先回りして阻害する。その結果、始めに活性因子が増加し始めた場所では、さらに活性因子は増加し、その周囲では抑制因子によって活性因子の生産は抑制され続け、二つの濃度差はますます増大し、空間的に非一様なパターンが形成される。活性因子が多く集まった場所から細胞や組織の変化が始まるとされる。下図は、(GM) の数値実験を用いたヒドラの頭部再生実験の説明である ($\Omega = (0, 1)$)。ヒドラは体長数ミリの生物で、頭部を切断すると、その場に頭部が再生される。

例) 縦軸は濃度 (赤は活性因子、青は抑制因子)、横軸はヒドラの胴体とみなす。



一方、数値実験では、 $\sigma_a(x), \sigma_h(x)$ が恒等的に 0 に等しい場合、抑制因子の反応時定数 τ が十分大きいと、一旦は形成されたパターンが最終的にはつぶれてしまう（つまり A も H も 0 に収束する）現象が観察されている。このような現象は、生物の形態形成のような空間的組織構造のパターン形成のモデルとしては期待されていない。

例）空間一次元におけるパターンの崩壊（縦軸が濃度で、赤が活性因子、青が抑制因子を表す）



これ以降の節では、いつ $A \equiv 0$ となる現象は起こるのか、どのようにこれを防ぐことができるのか、について考察したい。ここで、最終的に $A \equiv 0$ となる現象を「パターンの崩壊」と呼ぶことにする。

また次節からも分かるように、 $\sigma_a(x) \equiv 0$ の場合、解の下からの一様な評価が得られないため、(GM) の解析は一般に困難が予想される。従って第 2 節では、パターンの崩壊のメカニズムを理解するためにも、(GM) を最も単純にした場合、つまり常微分方程式系を考察し、 $(A, H) = (0, 0)$ に収束する解について、その存在と証明の困難な点やアイデアをまとめておく。第 3 節では、拡散のある本来の (GM) についてパターンの崩壊を考察し、また今後の問題についてまとめたいと思う。パターンの崩壊に関する結果は、高木泉氏（東北大学理学研究科）との共同研究である。

1 解の存在と有界性

始めに、(GM) の解の存在と有界性について既知の結果をまとめると次のようになる：

	$p - 1 < r$	$p - 1 = r$	$p - 1 > r$
$\sigma_a \geq 0$	解はすべての $t > 0$ で存在する。さらに吸引領域が存在する。[5, 7, 3, 2]		有限時間で爆発する解が存在する。[3, 6]
$\sigma_a \equiv 0$	解はすべての $t > 0$ で存在する。しかし、非有界な解が存在する。[7, 2, 6]		有限時間で爆発する解が存在する。[6]
	さらに $\sigma_h \equiv 0$ ならば、 $t \rightarrow +\infty$ のとき $\bar{\Omega}$ 上一様に $(A, H) \equiv (0, 0)$ となる解が存在する。[7, 6]		

ここで吸引領域とは、 AH -平面上に初期値とは無関係な長方形領域が存在し、解 $(A(t), H(t))$ は十分時間が経った後に必ずその領域内に含まれている、このような領域を意味している。

いくつか注意をする。(1) $\sigma_a \neq 0$ ならば、パターンの崩壊は起こらない。一方、 $\sigma_a \equiv 0$ の場合は、 A の下からの一様な評価が得られないためパターンの崩壊が起こる。さらに [6] から、 $p-1 \leq r$ かつ $q \geq s+1$ ならば、 $\sigma_a(x) \equiv \sigma_h(x) \equiv 0$ とした (GM) の解で、非有界なものが存在することが分っている。(2) $p-1 = r$ の場合、(GM) で拡散が無い常微分方程式については、爆発する解は存在しない。拡散がある場合の詳細な解の挙動については、今の課題である。

2 常微分方程式系の解

ここでは最も単純な場合として、(GM) から拡散項と基礎生産項を除いた次の常微分方程式系 (K) を考察する。この方程式系の解軌道の振舞いについては、すべて分かっている ([6])。 (K) が $\sigma_a > 0$ を含む場合は、いま取り組んでいる課題である。

次の常微分方程式系を考える：

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -A + \frac{A^p}{H^q} & (t > 0), \\ \tau \frac{dH}{dt} = -H + \frac{A^r}{H^s} & (t > 0), \\ A(0) = \phi, \quad H(0) = \psi. \end{cases} \quad (\text{K})$$

ここで、 ϕ, ψ は正とする。さらに、指数については次を仮定する：

$$p > 1, q > 0, r > 0, s > -1 \quad \text{かつ} \quad \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}. \quad (\text{C})$$

二つの曲線 $H = A^{(p-1)/q}$ ($A_t = 0$) と $H = A^{r/(s+1)}$ ($H_t = 0$) は、 AH -平面の第一象限においてただ一点 $E = (1, 1)$ で交わり、これは第一象限での (K) のただ一つの平衡点である。また、第一象限はこれら二つの曲線によって4つの領域に分割されるので、それぞれに名前をつけておく：

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(A, H) \mid 0 < A < +\infty, H < \min \{A^{(p-1)/q}, A^{r/(s+1)}\}\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(A, H) \mid 1 < A < +\infty, A^{(p-1)/q} < H < A^{r/(s+1)}\}, \\ \mathcal{R}_3 &= \{(A, H) \mid 0 < A < +\infty, H > \max \{A^{(p-1)/q}, A^{r/(s+1)}\}\}, \\ \mathcal{R}_4 &= \{(A, H) \mid 0 < A < 1, A^{r/(s+1)} < H < A^{(p-1)/q}\}. \end{aligned}$$

平衡点 E の安定性については、簡単に次が分かる：

補題 1 平衡点 E は、 $\tau < (s+1)/(p-1)$ のとき漸近安定であり、 $\tau > (s+1)/(p-1)$ のとき不安定である。

この節では (K) の解 $(A(t), H(t))$ で、 $t \rightarrow +\infty$ のとき $(A, H) = (0, 0)$ に収束する解について考察する。ひとつ注意を述べておくと、最大値の原理から $A(t) \geq e^{-t}\phi$, $H(t) \geq e^{-t/\tau}\psi$ はすぐに分かる。初期値 ϕ, ψ は正なので、従って有限時間で $(A, H) = (0, 0)$ に収束することはない。

原点に収束する解の存在について、次の補題が成立する：

補題 2 (K) の解 $(A(t), H(t))$ が $t \rightarrow +\infty$ のとき $(0, 0)$ に収束するならば, $\tau > q/(p-1)$ である.

補題 3 $\tau > q/(p-1)$ とする. もし $(\phi, \psi) \in \overline{\mathcal{R}}_3$ かつ $\psi = \frac{1}{\varepsilon} \phi^{(p-1)/q}$ を満たすならば, これを初期値とする (K) の解 $(A(t), H(t))$ は $t \rightarrow +\infty$ で $(0, 0)$ に単調に収束する. ここで, ε は $[q/\tau - (p-1)] + (p-1)\varepsilon^q < 0$ を満たす正数である.

補題 3 の証明. 次の計算により, すぐに従う:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A^{p-1}}{H^q} \right) < \frac{A^{p-1}}{H^q} \left\{ \left[\frac{q}{\tau} - (p-1) \right] + (p-1) \frac{A^{p-1}}{H^q} \right\}. \quad (1)$$

ここで初期値の取り方から, $\frac{A^{p-1}}{H^q}(0) = \varepsilon^q$ だから, $\frac{A^{p-1}}{H^q}$ は $t > 0$ で減少する. ゆえにすべての $t > 0$ に対して $(A(t), H(t)) \in \mathcal{R}_3$ となり, これにより $t \rightarrow +\infty$ のとき $(A(t), H(t)) \rightarrow (0, 0)$ が分かる. $\square$

補題 2 の証明は少し難しい. なぜなら, 指数の大小関係によって証明が異なるからである. 実際, (C) を満たす指数の組み合わせは, 次の 3 つの場合に分けられる:

Case I : $p-1 < r, \quad q < s+1$ (例: $(p, q, r, s) = (2, 4, 2, 4)$),

Case II : $p-1 \leq r, \quad q \geq s+1$ (例: $(p, q, r, s) = (2, 2, 2, 0), (2, 1, 2, 0)$),

Case III : $p-1 > r, \quad q > s+1$ (例: $(p, q, r, s) = (4, 2, 2, 0)$).

例えば Case I では, $q/(p-1) < (s+1)/(p-1)$ だから, 補題 1 と補題 3 より, $q/(p-1) < \tau < (s+1)/(p-1)$ のとき平衡点 E に収束する解と原点に収束する解が併存する. 一方, Case II と Case III では $\tau > q/(p-1)$ ならば E は不安定である. そして, Case II では $\tau > q/(p-1)$ ならばすべての解軌道は原点に収束し, Case III では, $\tau > q/(p-1)$ のとき実は, 有限時間で爆発する解と原点に収束する解が併存する. ここで, 爆発する解とは, $A = +\infty$ に収束する解のことを表す. このように, 実際は Case I, Case II, Case III で解の構造は大きく異なる. 補題 2 の証明が最も困難な場合は Case III である.

補題 2 の証明の概略. まず, 解 $(A(t), H(t))$ は $t \rightarrow +\infty$ のとき $(A(t), H(t)) \rightarrow (0, 0)$ と仮定する. このとき, t が十分大きければ $(A(t), H(t)) \in \mathcal{R}_3$ であるから, 一般性を失うことなく, すべての $t \geq 0$ に対して $(A(t), H(t)) \in \mathcal{R}_3$ と仮定する. このとき $A < H^{q/(p-1)}$ だから, (K) の第 2 式より, ある $T > 0$ が存在して

$$-1 < \tau \frac{H_t}{H} < -1 + H^\alpha < -1 + \delta \quad (t > T),$$

ここで $\alpha = qr/(p-1) - (s+1)$, $\delta > 0$ は小さい数である. この両辺を T から t まで積分すると

$$H(T)e^{-(t-T)/\tau} < H(t) < H(T)e^{-(1-\delta)(t-T)/\tau}.$$

$H(t)$ の上からの評価を $A < H^{q/(p-1)}$ に代入すると,

$$A(t) < H(T)^{q/(p-1)} \exp \left(-\frac{q}{p-1} \frac{1-\delta}{\tau} (t-T) \right)$$

が得られる.

一方, $A_t > -A$ だから $A(t) > A(T)e^{-(t-T)}$ より, 上からの評価とあわせると

$$\frac{q}{p-1} \frac{1-\delta}{\tau} \leq 1$$

でなければならない. これは $\tau \geq q/(p-1)$ を示している.

次に, $\tau = q/(p-1)$ のときに $(A(t), H(t)) \rightarrow (0, 0)$ となる解は存在しないことを示す.

指数による場合分け Case I と Case II の場合は, $\frac{d}{dt} \left(\frac{A^{p-1}}{H^q} \right)$ を計算して, もし $(A(t), H(t))$ が $(0, 0)$ に収束するならば矛盾であることを示せば主張が得られる. ここでは, Case I の場合の証明のみ述べておく.

Case I の場合, もし $\tau = q/(p-1)$ ならば,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A^{p-1}}{H^q} \right) = (p-1) \left(\frac{A^{p-1}}{H^q} \right)^2 \left[1 - \frac{A^{r-p+1}}{H^{s+1-q}} \right]$$

が成り立つ. 解 $(A(t), H(t))$ が $t \rightarrow +\infty$ で $(0, 0)$ に収束するならば, ある $T > 0$ が存在して, $t > T$ のとき $(A(t), H(t)) \in \mathcal{R}_3$ であり, かつ $A(t)$ も $H(t)$ も十分小さい. このとき, $\mathcal{R}_3$ では $A^{(p-1)/q}/H \leq 1$ であることと, (C) から

$$\frac{r-p+1}{s+1-q} > \frac{p-1}{q}$$

であることをあわせると,

$$\frac{A^{r-p+1}}{H^{s+1-q}} = \left[\frac{A^{(p-1)/q}}{H} A^{\frac{r-p+1}{s+1-q} - \frac{p-1}{q}} \right] = o(1)$$

が分かる. 従って, $w = A^{p-1}/H^q$ とおくと, $t > T$ のとき

$$w' = (p-1)(1 - o(1))w^2$$

となる. この両辺を w^2 で割って T から t まで積分すると, ある $C > 0$ が存在して

$$\frac{1}{w(T)} - \frac{1}{w(t)} \geq C(t - T)$$

が成立する. ここで $t \rightarrow +\infty$ とすると矛盾. ゆえに原点に収束する解は存在しない.

Case III のときを考える. Case I と Case II の場合のように $\frac{d}{dt} \left(\frac{A^{p-1}}{H^q} \right)$ を扱いたいが, いま $p-1 > r$ なので, これだけを扱っては不十分である. ゆえに, Case III では $a = p-1-r$, $b = q-(s+1)$ として, $w = A^{p-1}/H^q$, $z = H^b/A^a$ とおき, これらが満たす次の方程式系を考える:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = (p-1)(1-z)w^2, \\ \frac{dz}{dt} = z[-\delta + w(-a + \beta z)], \end{cases} \quad (2)$$

ここで, $\beta = b(p-1)/q$, $\delta = [qr - (p-1)(s+1)]/q$ とおいた.

命題 4 もし $t \rightarrow +\infty$ のとき $(A(t), H(t)) \rightarrow (0, 0)$ ならば,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0 \quad \text{または} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

この命題の証明は省略するが、 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} w(t) > 0$ かつ $\liminf_{t \rightarrow +\infty} z(t) > 0$ と仮定して矛盾を導く。

次に、実際は $\liminf_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0$ も $\liminf_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$ も起こりえないことを示す。これにより、Case III の場合で $\tau = q/(p-1)$ のときは、 $(A(t), H(t)) \rightarrow (0, 0)$ となる解が存在しないことが分かる。

まず、ある t_0 が存在して、 $t_0 < T_+$ に対して $z(t_0) < a/\beta$ ならば、 $T_+ < +\infty$ かつ $t \rightarrow T_+$ のとき $w(t) \rightarrow +\infty$ であることを示す。

もし $z(t_0) \leq a/\beta$ ならば、 $t_0 < t < T_+$ に対して $w'(t) > 0$ かつ $z'(t) < 0$ であることはベクトル場から分かる。(2) の第一式の両辺を w^2 で割り、 t_0 から t まで積分すると、 $t_0 < t < T_+$ のとき

$$\frac{1}{w(t_0)} > (p-1) \left(1 - \frac{a}{\beta}\right) (t - t_0)$$

が分かる。 $1 - a/\beta > 0$ だから、これは $T_+ < +\infty$ を意味している。すべての $t < T_+$ に対して $0 < z(t) \leq z(t_0)$ だから、ベクトル場の構造より $t \rightarrow T_+$ のとき $w(t) \rightarrow +\infty$ が成立する。一方、すべての $t < T_+$ に対して $(A(t), H(t)) \in \mathcal{R}_3$ ならば $w(t) < 1$ だから、これは矛盾である。従って、 $\liminf_{t \rightarrow T_+} z(t) = 0$ は起こりえない。

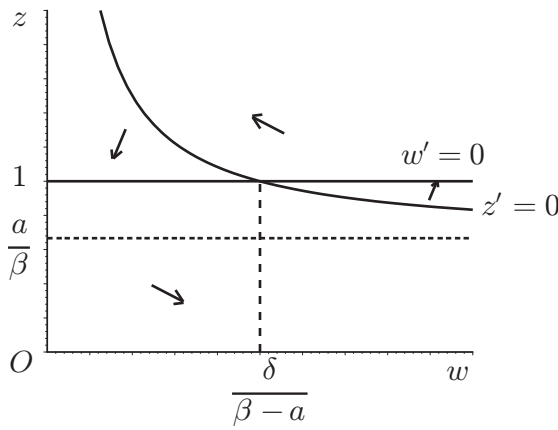


Figure 1: (2) のベクトル場

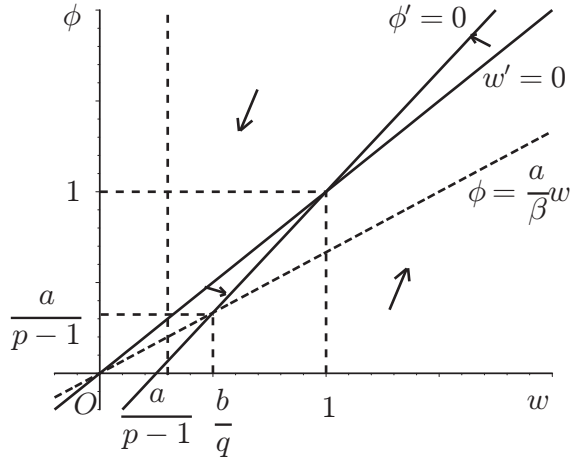


Figure 2: (3) のベクトル場

次に $\liminf_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0$ が起こらないことを示す。直前の議論から、すべての $t > 0$ に対して $z(t) > a/\beta$ と仮定してよい。もし、 $t_j \uparrow +\infty$ なる列が存在して、 $w(t_j) \rightarrow 0$ と仮定する。このとき十分大きい $j > T$ に対して、 $w(t_j) < a/(p-1)$ が成立しているとす。 $\varphi(t) = w(t)z(t)$ とおくと、 w, φ が満たす方程式は

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \left(-\delta + rw - \frac{(s+1)(p-1)}{q} \varphi \right) \varphi, \\ \frac{dw}{dt} = (p-1)(w - \varphi)w \end{cases} \quad (3)$$

となる。さらに $\varphi(t) > (a/\beta)w(t)$ である。(3) の右辺によって定義されるベクトル場から、もし $\varphi(t)$ が $t \rightarrow +\infty$ で 0 に行かないとすると、解軌道 $(\varphi(t), w(t))$ は $t > t_j$ で直線 $\varphi = (a/\beta)w$ と交わらなければならず、これは仮定に矛盾する。従って、 φ は 0 に収束する。ゆえに $t \geq T$ のとき $\varphi(t) < \delta/\beta$ となり、これは $t \geq T$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = (-\delta - aw(t) + \beta\varphi(t))z(t) < (-\delta + \beta\varphi(t))z(t) < 0$$

を意味している．これは $t \rightarrow +\infty$ のとき $z(t) \rightarrow 0$ を示しており，矛盾である．従って $\liminf_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0$ は起こらない．

これにより，補題 2 が証明された． $\square$

3 パターンの崩壊

拡散項を含む本来の (GM) に対して，次の定理が成り立つ：

定理 5 $\sigma_a(x) \equiv 0, \sigma_h(x) \geq 0$ とする． $\tau > q/(p-1)$ とし，さらに初期値に次を仮定する：

$$\left(\min_{x \in \bar{\Omega}} H_0(x) \right)^q > \frac{p-1}{p-1-\frac{q}{\tau}} \left(\max_{x \in \bar{\Omega}} A_0(x) \right)^{p-1}. \quad (4)$$

このとき，(GM) の解 $(A(x, t), H(x, t))$ は

$$0 < \max_{x \in \bar{\Omega}} A(x, t) \leq C e^{-t}, \quad \max_{x \in \bar{\Omega}} |H(x, t) - z(x)| \leq C e^{-t/\tau}$$

を満たす．ここで $C > 0$ ，関数 z は境界値問題

$$D\Delta z - z + \sigma_h(x) = 0 \quad (x \in \Omega), \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \quad (x \in \partial\Omega)$$

の解である．(従って， $(0, z(x))$ は (GM) の定常解である．)

いくつか注意を述べる．

(1) 第 1 節の表を思い出すと， $p-1 < r$ ならば，すべての $t > 0$ で解は存在することが分かっている．定理 5 は，指数について (*) 以外に条件を課さずに，初期値を制限することによって，すべての $t \geq 0$ で有界な解が存在することを示している．

(2) 定理 5 は， $\sigma_h(x) > 0$ でもパターンの崩壊 $(A(x, t))$ が $t \rightarrow +\infty$ のとき 0 に収束) が起こることを示しており，もし $\sigma_h(x) \equiv 0$ かつ初期値が (4) を満たせば，解 $(A(x, t), H(x, t))$ は $(0, 0)$ に収束することはすぐに分かる．前節の補題 3 では，常微分方程式系の解が $(0, 0)$ に収束するための初期値の十分条件を得たが，(4) はそれとほぼ同じ形をしている．

(3) 定理 5 は， τ が大きいとパターンの崩壊が起きることを示しているが，(GM) の第二式の両辺を τ で割ると， τ が大きいことは抑制因子の拡散が遅いことを意味している．仮定 (4) は，初期状態で活性因子が最も多く集まっている場所に，すでに抑制因子が充分多く存在していることを意味しており，従って，抑制因子の拡散が遅い方が，そのままの状態で活性因子の増加を抑え続けられると考えられる．

定理 5 の証明は，[7] の手法を用いる．次の二つの補題を用意する．

補題 6 $A(x, t) \geq e^{-t} \min_{x \in \bar{\Omega}} A_0(x), \quad H(x, t) \geq e^{-t/\tau} \min_{x \in \bar{\Omega}} H_0(x).$

補題 7 $\underline{v}(t) = e^{-t/\tau} \min_{x \in \bar{\Omega}} H_0(x)$ とおく．いま $\tau > q/(p-1)$ かつ (4) が満たされているとする．このとき

$$\frac{dm}{dt} = -m + \frac{m^p}{\underline{v}^q}, \quad m(0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} A_0(x)$$

の解 $m(t)$ はすべての $t > 0$ で唯一存在し，ある $C > 0$ が存在して， $m(t) \leq C e^{-t}$ を満たす．

補題 6 は最大値の原理からすぐに従う．また、補題 7 の $m(t)$ が $A(x, t) \leq m(t)$ を満たすことも簡単に分かる． $A(x, t)$ の上からの評価と $H(x, t)$ の下からの評価をあわせれば、 $H(x, t)$ の上からの評価は得られる．従って、これらの評価を用いれば、収束に関する主張も最大値の原理を使って得られる．

実は、もし $\sigma_a(x) \equiv 0$ かつ $\max_{x \in \bar{\Omega}} \sigma_h(x) > 0$ ならば、 τ によらずにパターンの崩壊が起こる．実際、 $\max_{x \in \bar{\Omega}} \sigma_h(x) > 0$ のとき、 $0 < \eta < 1$ を満たす任意の η に対して、ある正数 δ が存在して

$$H(x, t) \geq \eta(\min_{x \in \bar{\Omega}} H_0(x) + \delta) \quad (x \in \bar{\Omega}, t > 0)$$

が成立する．ここで $\gamma = [\eta(\min_{x \in \bar{\Omega}} H_0(x) + \delta)]^{-q}$ とおく．このとき、初期値問題

$$\frac{dU}{dt} = -U + \gamma U^p, \quad U(0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} A_0(x)$$

の解 $U(t)$ は、 $\gamma U(0)^{p-1} < 1$ ならば単調に減少し、さらにすべての $t > 0$ に対して

$$U(t) < Ce^{-t}$$

を満たす．ここで C は $\gamma, U(0)$ によらない正数である．ゆえにすべての $t > 0$ に対して

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |H(x, t) - z(x)| \leq Ce^{-t/\tau}$$

も従う．条件 $\gamma U(0)^{p-1} < 1$ は

$$\left(\max_{x \in \bar{\Omega}} A_0(x) \right)^{p-1} < \eta^q \left(\min_{x \in \bar{\Omega}} H_0(x) + \delta \right)^q$$

を意味しており、 τ を含んでいない．

反応時定数 τ によらずパターンの崩壊が起こることは、定常解 $(A(x), H(x)) = (0, z(x))$ が漸近安定であることから従う．これは、定常解 $(0, z(x))$ の周りでの線形化作用素の固有値を調べれば分かる．

最後にもう一つ注意しておく． $\varepsilon^2 = D/\tau$, $\tau > q/(p-1)$ かつ $p-1 \geq q$ の場合は、定理 5 の初期値の条件 (4) を緩めることができる：

$$H_0(x)^q > \frac{p-1}{p-1-\frac{q}{\tau}} A_0(x)^{p-1} \quad (x \in \bar{\Omega}).$$

3.1 より一般の反応拡散系の場合

定理 5 の主張は、より一般の反応拡散系についても成立する．実際、次の方程式系を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta u - u + f(x, u, v) + \sigma_a(x), \\ \tau \frac{\partial v}{\partial t} = D \Delta v - v + g(x, u, v) + \sigma_h(x), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (5)$$

ここで, $f(x, u, v)$ と $g(x, u, v)$ は $x \in \bar{\Omega}$, $0 \leq u < +\infty$, $0 < v < +\infty$ 上連続で, u, v について (x について一様に) 局所 Lipschitz 連続であるとする. さらに次の関係を満たすものとする:

$$0 \leq f(x, u, v) \leq C_1 \frac{u^p}{v^q}, \quad 0 \leq g(x, u, v) \leq C_2 \frac{u^r}{v^s} \quad (x \in \bar{\Omega}, u > 0, v > 0).$$

ここで C_1 と C_2 は (x, u, v) には依らない正定数である. このとき, 定理 5 の主張は, (4) を

$$\left(\min_{x \in \bar{\Omega}} v_0(x) \right)^q > \frac{C_1(p-1)}{p-1-\frac{q}{\tau}} \left(\max_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x) \right)^{p-1}$$

で置き換えて成立する.

関数 f と g の例としては (GM) の他に次のようなものがある.

(1) 活性因子の反応項が飽和するギーラー・マインハルト系 ($\kappa > 0$):

$$f(x, u, v) = \frac{u^p}{v^q(1 + \kappa u^p)}, \quad g(x, u, v) = \frac{u^r}{v^s},$$

(2) MacWilliams によるヒドラの頭部形成モデル ([4]) ($\alpha, \beta > 0$):

$$f(x, u, v) = \frac{u^p}{u^p + v^q}, \quad g(x, u, v) = \frac{\alpha u^r}{u^r + \beta}.$$

4 まとめ

方程式系 (GM) について, パターンの崩壊が起こる条件をまとめる. パターンの崩壊とは, 活性因子の濃度が自明な状態 $A \equiv 0$ に収束することであった.

定理 5 は, $\tau > q/(p-1)$ かつ初期値が (4) を満たせば, パターンの崩壊が起こることを示している. さらに, もし $\max_{x \in \bar{\Omega}} \sigma_h(x) > 0$ を仮定すれば, それは τ によらず起こることを示した. ゆえに次のようにまとめられる:

基礎生産項	パターンの崩壊
$\sigma_a(x) \not\equiv 0$	起きない.
$\sigma_a(x) \equiv 0, \sigma_h(x) \not\equiv 0$	起こる.
$\sigma_a(x) \equiv 0, \sigma_h(x) \equiv 0$	$\tau > q/(p-1)$ のとき起きる.

定理 5 は, パターンの崩壊の最終段階, つまり活性因子の濃度が一様に 0 に収束する部分を述べている. 今後は, 最初の節で図示したような, 崩壊するまでの解の挙動を記述することを目標として研究を進めていきたい.

References

- [1] A. Gierer and H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik (Berlin) **12** (1972), 30-39.
- [2] H. Jiang, *Global existence of solutions of an activator-inhibitor system*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **14** (2006), 737-751.

- [3] M. Li, S. Chen and Y. Qin, *Boundedness and blow up for the general activator-inhibitor model*, Acta Math. Appl. Sinica **11** (1995), 59-68.
- [4] H. K. MacWilliams, *Numerical simulations of Hydra head regeneration using a proportional-regulating version of the Gierer-Meinhardt model*, J. Theor. Biol. **99** (1982), 681-703.
- [5] K. Masuda and K. Takahashi, *Reaction-diffusion systems in the Gierer-Meinhardt theory of biological pattern formation*, Japan J. Appl. Math. **4** (1987), 47-58.
- [6] W.-M. Ni, K. Suzuki and I. Takagi, *The dynamics of a kinetic activator-inhibitor system*, J. Differential Equations **299** (2006), 426-465.
- [7] J. Wu and Y. Li, *Classical global solutions for the activator-inhibitor model*, Acta Math. Appl. Sinica **13** (1990), 501-505.

ある双安定型方程式に対する線形化固有値問題の 表現公式と漸近公式

若狭 徹 (早稲田大学/明治大学)

四ツ谷 晶二 (龍谷大学)

1 Introduction

本報告集では非線形境界値問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{xx}(x) + f(u(x)) = 0, & \text{in } (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

及びその任意の (非定数) 解に対する線形化固有値問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u(x))\varphi(x) + \mu\varphi(x) = 0 & x \in (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

について考察する. ここで $\varepsilon > 0$ はパラメータとし, f は均衡 (balanced) 双安定型非線形項, すなわち (適当な範囲において) f の零点は 3 点 $u = 0, u_{\pm}$ からなり, さらに条件 $f_u(0) > 0, f_u(u_{\pm}) < 0, F(u_+) = F(u_-)$ を満たすものとする. ただし

$$F(u) := \int_0^u f(s) ds$$

である. 問題 (1) はスカラー反応拡散方程式

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t(x, t) = \varepsilon^2 u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = g(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3)$$

の定常問題であり, (3) のダイナミクスの研究に重要な役割を果たす. また (2) は定常解 $u(x)$ の安定性をはじめ, (3) の定常解近傍における局所的ダイナミクスを決定する. これら一連の問題に関しては 1970 年代より盛んに研究が行われており, 既に多くの研究成果が挙げられている.

特にパターンダイナミクスの立場からは, パラメータ ε が十分小さい場合に関心が持たれる. 定常問題 (1) においては $\varepsilon = f_u(0)/(n\pi)$ ($n \in \mathbf{N}$) において, n モード定常解 $u_{n,\varepsilon}$ が (1) の不安定定常解 $u = 0$ より分岐し, さらに $\varepsilon \rightarrow 0$ に伴い各 n モード解の零点近傍において遷移層が形成される. また (3) の非定常解 $u(x, t)$ についても時間発展に伴い遷移層が形成され, そのダイナミクスは遷移層の運動により特徴づけられる. 遷移層の運動は非常に遅い時間スケールで進行し (Carr-Pego [2]), その衝突や消滅などのプロセスを経て $u(x, t)$ は最終的にある定常解に収束する.

反応拡散方程式のパターン形成への応用を 1 つの動機付けとして, 線形化問題 (2) の構造を詳細に調べたい. n モード解 $u_{n,\varepsilon}$ に対する線形化固有値問題を次の形に書

き表す:

$$\begin{cases} \varepsilon^2(\varphi_j^n)_{xx}(x; \varepsilon) + f_u(u_{n,\varepsilon}(x))\varphi_j^n(x; \varepsilon) + \mu_j^n(\varepsilon)\varphi_j^n(x; \varepsilon) = 0 & x \in (0, 1), \\ (\varphi_j^n)_x(0; \varepsilon) = (\varphi_j^n)_x(1; \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

ただし, $j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ であり, $\mu_j^n(\varepsilon)$ 及び $\varphi_j^n(x; \varepsilon)$ は $j+1$ 番目の固有値及び固有関数を表すものとする. 上で述べた n モード解の安定性や遷移層の運動などに関連して以下が既知の事実として知られている (Brunovský-Fiedler [1], Carr-Pego [2] など).

- 安定性・不安定指数: $\mu_0^n(\varepsilon) < \cdots < \mu_{n-1}^n(\varepsilon) < 0 < \mu_n^n(\varepsilon) < \cdots \leq +\infty$.
- 固有値の評価: $0 < j < n$ ならばある $\varepsilon_1 > 0$, $d > 0$, $C_1 > 0$ が存在して

$$|\mu_j^n(\varepsilon)| \leq C_1 e^{-\frac{d}{n\varepsilon}} \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_1),$$

 $j > n$ ならばある $\varepsilon_2 > 0$, $C_2 > 0$ が存在して

$$\mu_j^n(\varepsilon) > C_2 \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_2).$$

Fusco-Hale [4] では負の固有値や固有関数のより詳細について, (3) のダイナミクスに対応する不変多様体の理論から論じている. 双安定型とは限らないより一般的な非線形項の場合においても, 小さい j に対する固有関数の形状について東北大学の柳田教授が予想を与えている. これらによれば, n モード解 $u_{n,\varepsilon}$ の零点を z_ℓ ($\ell = 1, \dots, n$) とおくと, j が小さい場合において φ_j^n は z_j^n 近傍にてスパイクを持ち, そのスパイクの高さが $\cos j\pi z_j^n$ に比例することが期待されるが, その厳密な証明は与えられていないように思われる. また j が大きい場合についても何も知られていない.

本報告集では $f(u) = \sin u$ の場合を例に取り,

- (i) 全ての固有関数の表現公式
- (ii) 全ての固有値の $\varepsilon \rightarrow 0$ における詳細な漸近公式
- (iii) 全ての固有関数の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近形状

を明らかにすることを目的とする.

まず (i) については (4) から 3 階の線形常微分方程式を導き, その特解を用いて固有関数の表示式を構成する. このとき対応する固有値は境界条件から得られる第 3 種完全楕円積分を含むある超越方程式の一意解として与えられる. さらに表現公式及び固有値の特性方程式を利用することにより (ii), (iii) の結果が得られる. なお筆者は $f(u) = u - u^3$ などのいくつかの典型的な非線形項に対して具体的な計算結果を得ているが, 本稿では割愛する ([8], [9], [11] など).

表現公式は固有関数には 2 種類, いくつかの**特別な固有関数**, 及び残りの一般の固有関数からなることを示唆する. 特別な固有関数はスケーリングの議論を通して $\mathbf{R}^1$ 上の (4) に対応するスペクトル問題と結びついており, また漸近形状などにおいて固有関数の全体像を理解する上で重要な役割を果たす.

またこれは多くの線形常微分方程式の古典的理論と密接な関係を持つ. まず 19 世紀における Lamé 方程式の理論, これと関連する Heun の方程式 (や KdV 方程式) などの可積分系理論が挙げられる (Whittaker-Watson [13], Takemura [7]). 周期性の観点からは, (4) の線形化方程式は周期ポテンシャル $f_u(u_{n,\varepsilon}(x))$ を持つ Schrödinger 方

程式と見なすこともできる．このとき特別な固有値は対応する Schrödinger 方程式のスペクトルギャップと明確な対応を持つ．

なお本報告集における成果は従来の理論といくらか重複する部分もあるが，従来との違いは境界条件を厳密に調べていること，及び特異極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ における全ての固有値・固有関数の漸近公式を考察していることの2点である．

本報告集の構成は以下で与えられる．第2節では上記の $f(u) = \sin u$ の場合の結果を挙げる．第3節では，表現公式を中心に，証明のアウトラインを述べるがその厳密な証明についてはここでは詳しく述べない ([10], [12] などを参照)．最後に第4節では，表現公式の導出に関して簡単な考察を与える．

2 Main Results

本節では $f(u) = \sin u$ の場合における (4) の固有関数の表現公式，固有値・固有関数の漸近公式について述べる．

まず初めに (1) の n モード解 $u_{n,\varepsilon}$ を Jacobi の楕円関数を用いて与えるところから始めたい． $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ を固定し， $k \in (0, 1)$ に対する方程式

$$K(k) = \frac{1}{2n\varepsilon},$$

を考える．ただし K は第1種完全楕円積分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} ds$$

とする．楕円積分 K の性質から上の方程式が解を持つための必要十分条件は $\varepsilon \in (0, 1/(n\pi))$ であり，このとき解 $k = k_n(\varepsilon)$ は一意である．さらに $k_n(\varepsilon)$ は ε の減少関数であり特に $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k(\varepsilon) = 1$ を満たす．

このとき $u_{n,\varepsilon}(0) > 0$ を満たす n -mode 解 $u_{n,\varepsilon}$ は次で与えられる：

$$u_{n,\varepsilon}(x) = 2 \sin^{-1} \left[k_n(\varepsilon) \operatorname{sn} \left(\frac{1+2nx}{2n\varepsilon}, k_n(\varepsilon) \right) \right], \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{n\pi} \right).$$

なお定常問題 (1) は他にも非自明な定常解を持つが， $f(u) = \sin u$ の対称性・周期性からそれらの線形化問題は全て (4) により与えられる．以下では次の記号を利用する

$$x_\ell^n := \frac{\ell}{n} \quad \text{for } \ell = 0, \dots, n, \quad \text{and} \quad z_\ell^n := \frac{2\ell-1}{2n} \quad \text{for } \ell = 1, \dots, n.$$

z_ℓ^n は $u_{n,\varepsilon}$ の ℓ 番目の零点であり， $[x_\ell^n, x_{\ell+1}^n]$ は $u_{n,\varepsilon}$ の半周期を与える． f が奇関数なので，これは $f_u(u_{n,\varepsilon})$ の1周期に相当する．以下の図1に ε が十分小さい場合の $u_{n,\varepsilon}$ 及び線形化方程式のポテンシャル $f_u(u_{n,\varepsilon}(x))$ のグラフを挙げる．

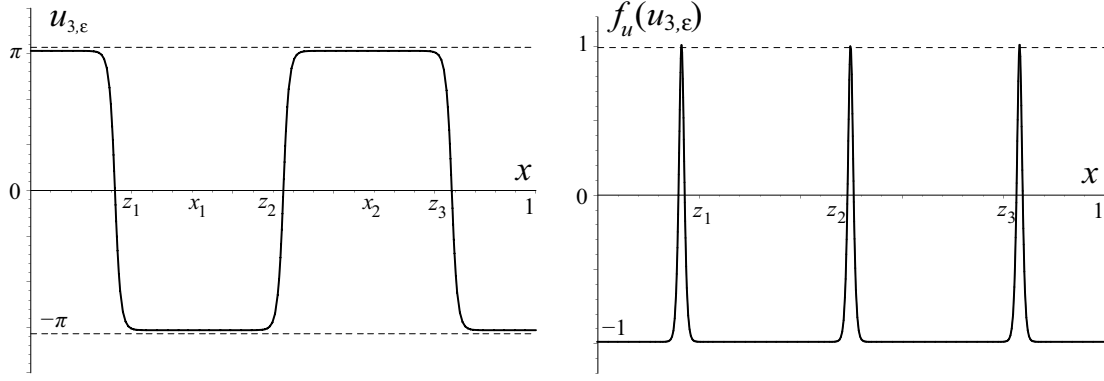


図 1: $u_{3,\varepsilon}$ 及び $f_u(u_{3,\varepsilon})$ のグラフ.

これらの関数の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近形状は z_ℓ^n 近傍におけるスケーリング極限によって特徴付けられる. すなわち各 z_ℓ^n を適当に選び, スケーリング変数 $z = (x - z_\ell^n)/\varepsilon$ を導入すると, $u_{n,\varepsilon}(x + \varepsilon z)$, 及びポテンシャル $f_u(u_{n,\varepsilon}(z_\ell^n + \varepsilon z))$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ で極限関数 $U_+(z)$ 又は $U_-(z)$ 及び $f_u(U_\pm(z))$ に $\mathbf{R}$ 上で広義一様収束する, ただし

$$\begin{cases} U_{zz}(z) + f(U(z)) = 0 \\ U_\pm(-\infty) = \mp\pi, \quad U_\pm(+\infty) = \pm\pi, \quad U_\pm(0) = 0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbf{R},$$

である (この場合は $U_\pm$ の具体形もわかる). 極限関数の形状に応じて $u_{n,\varepsilon}$ は遷移層を持ち, $f_u(u_{n,\varepsilon})$ はスパイクを持つという. 以下に現れる固有関数についても同様の用語を用いることとする.

2.1 固有関数の表現公式

まず固有関数の表現公式について述べる. $f(u) = \sin u$ の場合, $u_{n,\varepsilon}$ に対する線形化問題 (4) において, 特別な固有関数は $j = 0, n$ の場合, すなわち φ_0^n, φ_n^n であり, その表示式は次により与えられる.

Proposition 2.1. $f(u) = \sin u$ とするとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mu_0^n(\varepsilon) = -(1 - k_n(\varepsilon)^2), \quad \varphi_0^n(x; \varepsilon) = \cos \frac{u_{n,\varepsilon}(x)}{2} = \text{dn} \left(\frac{1 + 2nx}{2n\varepsilon}, k_n(\varepsilon) \right) \\ \text{(ii)} \quad & \mu_n^n(\varepsilon) = k_n(\varepsilon)^2, \quad \varphi_n^n(x; \varepsilon) = \sin \frac{u_{n,\varepsilon}(x)}{2} = k_n(\varepsilon) \text{sn} \left(\frac{1 + 2nx}{2n\varepsilon}, k_n(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

図 4 にこれらのグラフを挙げる. φ_0^n, φ_n^n は z_ℓ^n においてそれぞれ高さ 1 のスパイク, 及び $\pm k_n(\varepsilon)$ を結ぶ遷移層を持つ.

Remark 2.1. 特別な固有関数 φ_0^n, φ_n^n は前節におけるスケーリング極限を通して極限関数 $\Phi_0(z), \pm\Phi_1(z)$ に収束する. これらの極限関数は $U_\pm$ に対するスペクトル問題

$$\begin{cases} \Phi_{zz}(z) + f_u(U_\pm(z))\Phi(z) + \mu\Phi(z) = 0 & \text{in } \mathbf{R}, \\ \Phi \in H^1(\mathbf{R}). \end{cases} \quad (5)$$

と密接な関わりを持つ. $\Phi_0(z)$ は (5) の $\mu_0 = 0$ ($= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_j^n(\varepsilon)$) に対応する固有関数である. また $\Phi_1(z)$ は $\mu_1 = f_u(\pi) = 1$ ($= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_n^n(\varepsilon)$) に対する (5) の方程式を満たす. ただし $H^1(\mathbf{R})$ には含まれないので固有関数ではなく μ_1 は (5) の連続スペクトルのタン店である.

次に $j \neq 0, n$ として残りの固有関数の表現公式を与える. $k \in (0, 1)$ に対して,

$$h(u; \mu, k) := k^2 - \sin^2 \frac{u}{2} - \mu, \quad (6)$$

$$\rho(\mu, k) := \mu(\mu - k^2)(\mu - k^2 + 1), \quad (7)$$

これに対して

$$h_{n,\varepsilon}(x; \mu) := h(u_{n,\varepsilon}(x); \mu, k_n(\varepsilon)), \quad \rho_{n,\varepsilon}(\mu) := \rho(\mu, k_n(\varepsilon))$$

とおく. $u_{n,\varepsilon}(x) \in [-2 \sin^{-1} k_n(\varepsilon), 2 \sin^{-1} k_n(\varepsilon)]$ であるから, $\mu_j^n(\varepsilon) \in [k_n(\varepsilon)^2 - 1, 0)$ において $h_{n,\varepsilon}(x) > 0$, $\mu_j^n(\varepsilon) \in (k_n(\varepsilon)^2, +\infty)$ において $h_{n,\varepsilon}(x) < 0$ である.

さらに $\mu \in (k_n(\varepsilon)^2 - 1, 0) \cup (k_n(\varepsilon)^2, +\infty)$ のとき

$$\theta_{n,\varepsilon}(x; \mu) := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\sqrt{\rho_{n,\varepsilon}(\mu)}}{|h_{n,\varepsilon}(\xi, \mu)|} d\xi$$

とおく. $u_{n,\varepsilon}$ の持つ周期性から, $h_{n,\varepsilon}, \theta_{n,\varepsilon}$ はいくつかの対称性を持つ. 特に

$$\theta_{n,\varepsilon}(\ell/(2n); \mu) = 2\ell A(\mu; k_n(\varepsilon)), \quad \ell = 0, \dots, 2n,$$

$$A(\mu, k) = \int_0^{2 \sin^{-1} k} \frac{\sqrt{\rho(\mu, k)}}{2 \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{u}{2}} |h(u; \mu, k)|} du = \sqrt{\frac{\mu(\mu - k^2 + 1)}{\mu - k^2}} \Pi\left(\frac{k^2}{\mu - k^2}, k\right) \quad (8)$$

を得ることができる. ただし $\Pi(\nu, k)$ は第 3 種完全楕円積分である:

$$\Pi(\nu, k) := \int_0^1 \frac{1}{(1 + \nu s^2) \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}} ds, \quad k \in (0, 1), \nu \in (-1, +\infty).$$

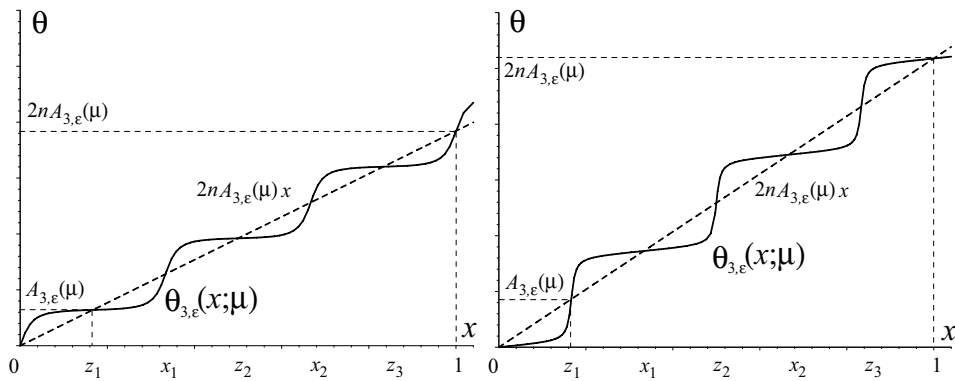


図 2: $\theta_{n,\varepsilon}(x; \mu)$ のグラフ ($n = 3$): (θ-1) $k_n(\varepsilon)^2 - 1 < \mu < 0$, (θ-2) $\mu > k_n(\varepsilon)^2$.

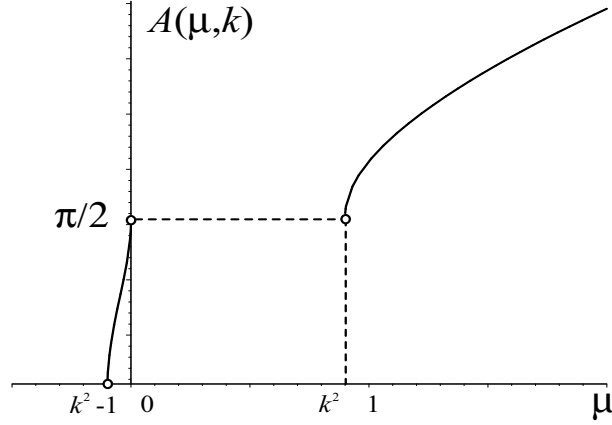


図 3: $A(\mu, k)$ のグラフ ($k = 3/\sqrt{10}$).

関数 A に関しては次の補題が成立する.

Lemma 2.1. $p \in (0, +\infty) \setminus \{\pi/2\}$ とする. このとき次を満たす $\mu(\cdot; p) : [0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ が一意に存在する:

$$A(\mu(k; p); k) = p, \quad \text{for all } k \in (0, 1).$$

さらに $0 < p < \pi/2$ ならば, $\mu(k; p) \in (-(1 - k^2), 0)$, $\lim_{k \rightarrow 1} \mu(k; p) = 0$, $p > \pi/2$ ならば, $\mu(k; p) \in (k^2, +\infty)$, $\lim_{k \rightarrow 1} \mu(k; p) = 1$ が成り立つ.

以上を用いることにより一般の固有関数は次の公式により与えられる.

Proposition 2.2. $j \neq 0, n$ とする. このとき $\mu_j^n(\varepsilon) = \mu(k_n(\varepsilon); j\pi/(2n))$,

$$\varphi_j^n(x; \varepsilon) = \sqrt{|h_{n,\varepsilon}(x, \mu_j^n(\varepsilon))|} \cos(\theta_{n,\varepsilon}(x; \mu_j^n(\varepsilon))).$$

2.2 固有値の漸近公式

次に各固有値の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近公式を与える. 次の定理により固有値の漸近公式は与えられる.

Theorem 1. $n \in \mathbf{N}$ を固定する. このとき次の (i)-(iv) が成り立つ:

$$(i) \quad \mu_0^n(\varepsilon) = -16 \cdot e^{-\frac{1}{n\varepsilon}} + o(e^{-\frac{1}{n\varepsilon}}) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$(ii) \quad \text{If } 0 < j < n, \text{ then } \mu_j^n(\varepsilon) = -16 \cos^2 \frac{j\pi}{2n} \cdot e^{-\frac{1}{n\varepsilon}} + o(e^{-\frac{1}{n\varepsilon}}) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$(iii) \quad \mu_n^n(\varepsilon) = 1 - 16 e^{-\frac{1}{n\varepsilon}} + o(e^{-\frac{1}{n\varepsilon}}) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$(iv) \quad \text{If } j > n, \text{ then } \mu_j^n = 1 + (j - n)^2 \pi^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Theorem 1 より, 固有値 μ_j^n の $\varepsilon \rightarrow 0$ における極限值は $0 \leq j < n$ 又は $j \geq n$ のいずれかによってのみ定まるが, 漸近挙動の詳細においては j に依存することがわかる.

2.3 固有関数の漸近公式

最後に固有関数の漸近公式を与える. φ_0^n, φ_n^n に関しては Remark 2.1 にて述べたので, ここでは残りの固有関数の漸近形状をどのように理解するかが目的となる. ε が十分小さい場合における固有関数のグラフ ($n = 3$) を下に示す.

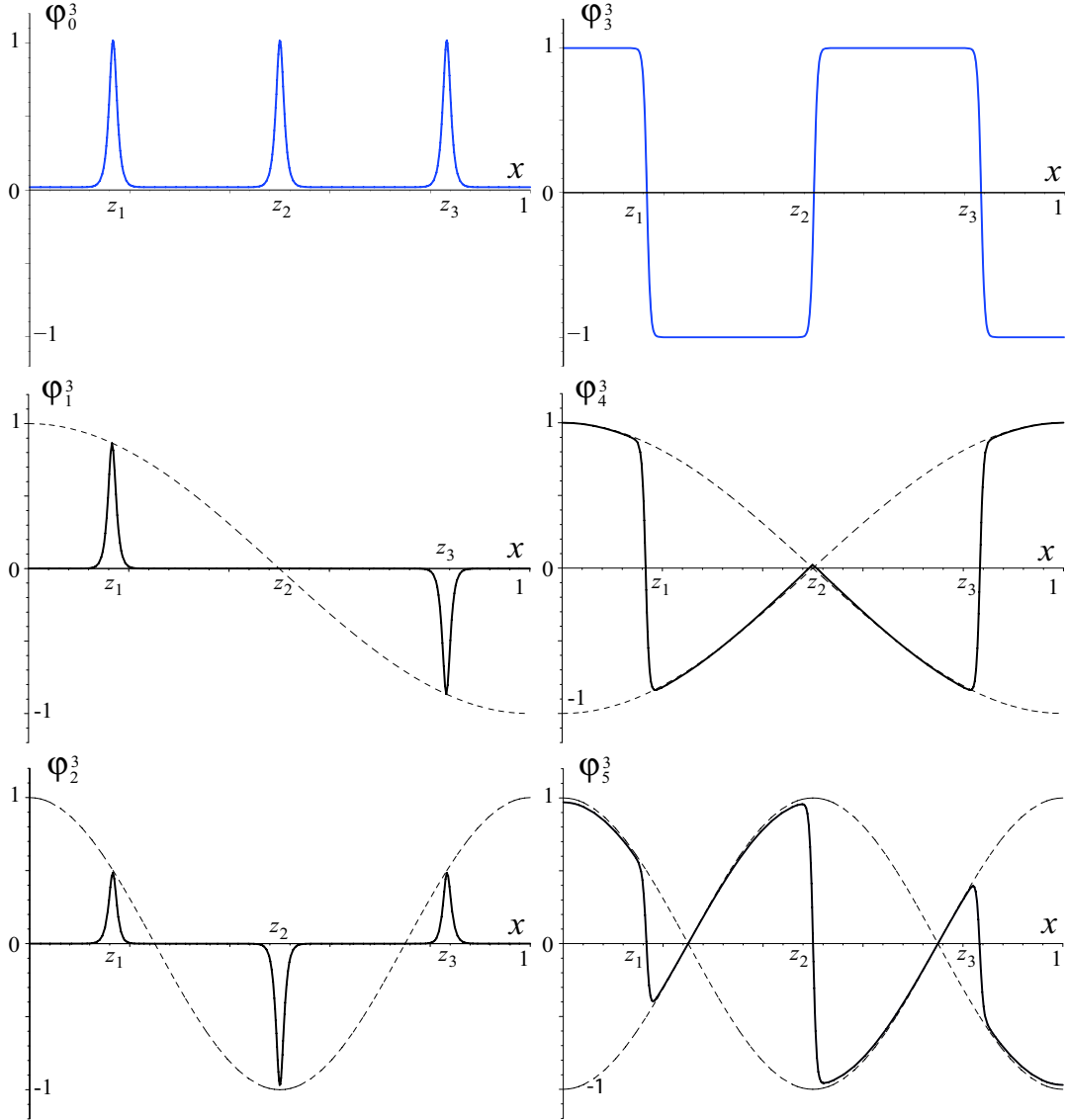


図 4: 固有関数 φ_j^3 ($j = 0, \dots, 5$) のグラフ.

これより $f(u) = \sin u$ の場合においては, 次が成立することが予想される:

- $0 < j < n$ ならば, $\varphi_j^n(x; \varepsilon) \sim \varphi_0^n(x; \varepsilon) \cos j\pi z_\ell^n$ in $(x_{\ell-1}^n, x_\ell^n)$, $\ell = 1, \dots, n$.
- $j > n$ ならば, $\varphi_j^n(x; \varepsilon) \sim \varphi_n^n(x; \varepsilon) \cos(j - n)\pi x$.

この予想は以下の Theorem 2-5 によって正当化及び厳密化される.

Theorem 2 ($0 < j < n$ の場合). $n \in \mathbf{N}$, $0 < j < n$ を固定し, φ_0^n, φ_j^n は正規化条件

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_j^n(0; \varepsilon)}{\varphi_0^n(0; \varepsilon)} = \cos \frac{j\pi}{2n}.$$

を満たすとする. このとき $0 < \delta < 1/(4n)$ を満たす $\delta, \ell = 1, \dots, n$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_j^n(x; \varepsilon)}{\varphi_0^n(x; \varepsilon)} = \cos j\pi z_\ell^n \quad \text{uniformly in } [x_{\ell-1}^n + \delta, x_\ell^n - \delta]$$

が成り立つ. さらに $\ell = 1$ (resp. $\ell = n$) のときは上の一様収束は $[0, x_1^n - \delta]$ (resp. $[x_{n-1}^n + \delta, 1]$) において成立する.

Theorem 3 ($0 < j < n$ の場合, スケーリング極限). Theorem 2 の仮定の下で, 各 $\ell = 1, \dots, n-1$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_j^n(x_\ell^n + \varepsilon z; \varepsilon)}{\varphi_0^n(x_\ell^n + \varepsilon z; \varepsilon)} = \frac{\cos z_{\ell+1}^n + \cos z_\ell^n}{2} + \frac{\cos z_{\ell+1}^n - \cos z_\ell^n}{2} \tanh z$$

が $\mathbf{R}$ 上広義一様収束の意味で成立する.

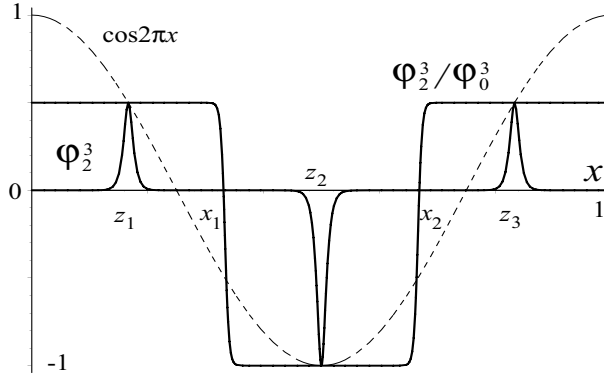


図 5: $\varphi_2^3 / \varphi_0^3$ のグラフ.

Theorem 4 ($j > n$ の場合). $n \in \mathbf{N}$, $j > n$ を固定し, φ_n^n, φ_j^n は次の正規化条件を満たすと仮定する:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_j^n(0; \varepsilon)}{\varphi_n^n(0; \varepsilon)} = 1.$$

このとき $0 < \delta < 1/(4n)$ を満たす δ について

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_j^n(x; \varepsilon)}{\varphi_n^n(x; \varepsilon)} = \cos(j-n)\pi x, \quad \text{uniformly in } [0, 1] \setminus \bigcup_{\ell=1}^n (z_\ell^n - \delta, z_\ell^n + \delta).$$

Theorem 5 ($j > n$ の場合, スケーリング極限). Theorem 4 の仮定の下で, 各 $\ell = 1, \dots, n$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varphi_j^n(z_\ell^n + \varepsilon z; \varepsilon) - \varphi_n^n(z_\ell^n + \varepsilon z; \varepsilon) \cdot \cos(j-n)\pi z_\ell^n| = 0$$

が $\mathbf{R}$ 上広義一様収束の意味で成り立つ.

3 Outline of Proofs

本節では第2節の Proposition 2.1, 2.2 及び Theorem 1-5 の証明のアイデア, 特に本報告集では表現公式の導出を中心に述べる. 固有値・固有関数の漸近公式の証明については [10], [12] に詳しく述べられている.

3.1 表現公式の証明のアウトライン

Proposition 2.2 から関数 h 及び ρ , A の3つの量が一般の固有関数の表示式において本質的な役割を果たすことがわかる. 実は特別な固有関数に関しても h を用いて表すことが可能である. 結論を荒っぽく述べると (表現公式を持つ場合には)

- 特別な固有関数: $\varphi(x) = \pm \sqrt{|h(u(x); \mu)|}$, $\rho(\mu) = 0$ の場合
- 一般の固有関数: $\varphi(x) = \sqrt{|h(u(x); \mu)|} \cos \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\mu)}}{|h(u(\xi))|} d\xi \right)$ ($\rho > 0$ の場合)

である. 実際に $f(u) = \sin u$ の場合, Proposition 2.1 及び (6), (7) を観察すれば

$$\varphi_0^n(x; \varepsilon) = \sqrt{h_{n,\varepsilon}(x; \mu_0^n(\varepsilon))}, \quad \varphi_n^n(x; \varepsilon) = (-1)^{[2nx]} \sqrt{h_{n,\varepsilon}(x; \mu_n^n(\varepsilon))}$$

が確認できるであろう.

以下一般の場合に表現公式が適当な h と ρ を見つけること, 及び A の解析に帰着されることを示す. ただし $f \in C^2$ とする. 線形化固有値問題 (2) に対応する初期値問題

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u(x)) \varphi(x) + \mu \varphi(x) = 0, & \text{in } (0, 1), \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi_x(0) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$(\varepsilon, u(x))$ を (1) の非自明解とする. 以下次の記号を用いることにする:

$$\alpha := u(0), \quad \alpha_M := \max_{0 \leq x \leq 1} u(x), \quad \alpha_m := \min_{0 \leq x \leq 1} u(x).$$

このとき $f(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in \{\alpha_m, \alpha_M\}$ であり $u(x)$ は

$$\frac{\varepsilon^2}{2} (u_x(x))^2 + F(u(x)) = F(\alpha) \quad x \in [0, 1] \quad (10)$$

を満たすことに注意する.

いま線形化方程式 ((9) の第1式) を満たす任意の2解 ϕ_1, ϕ_2 に対してその積 $w(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)$ を考えると, これは常に次の3階の方程式を満たす (Appell の補題):

$$\varepsilon^2 w_{xxx}(x) + 4(f_u(u(x)) + \mu)w_x(x) + 2f_{uu}(u(x))u_x(x)w(x) = 0. \quad (11)$$

この3階方程式 (11) に対して $w(x) = h(u(x))$ と表せる解の存在を仮定すると, (10) により u の関数 h は

$$2(F(\alpha) - F(u))h_{uuu} - 3f(u)h_{uu} + (3f_u(u) + 4\mu)h_u + 2f_{uu}(u)h = 0, \quad (12)$$

及び (12) に $h(u)$ を掛けてから積分して得られる 2 階非線形同次方程式

$$(F(\alpha) - F(u))(2h_{uu}h - h_u^2) - f(u)h_uh + 2(f_u(u) + \mu)h^2 = 2\rho(\mu) \quad (13)$$

を満たす. ただし $u \in (\alpha_m, \alpha_M)$,

$$\rho(\mu) := \frac{h(\alpha; \mu)}{2} [-f(\alpha)h_u(\alpha; \mu)h(\alpha; \mu) + 2(f_u(\alpha) + \mu)h(\alpha; \mu)] \quad (14)$$

である.

3 階方程式 (12) を表現方程式 (representation equation) と呼ぶ. この方程式は ε や $u(x)$ の情報を陽に含まず, f, α のみにより定まる. 一方 (12) は $u = \alpha_m, \alpha_M$ において退化しており, 全ての解が境界 $u = \alpha_m, \alpha_M$ まで込めて正則であることは期待できない. 境界 $u = \alpha_m, \alpha_M$ までこめて正則な解が存在するとき h を特解と呼ぶ. 特解 h を与えたときに $\rho(\mu)$ が h の α における情報から定まる. なお (13) はいわゆる h に関する保存則を与えている.

このとき以下の命題が成り立つ.

Proposition 3.1. $\varphi(x)$ を (9) の解とする. 表現方程式 (12) が $h(\alpha) \neq 0$ なる特解を持つと仮定するとき, 次の (i), (ii) が成り立つ:

$$(i) \quad \rho(\mu) = 0 \text{ ならば } \varphi(x) = \sqrt{\frac{h(u(x))}{h(\alpha)}} \text{ が (9) の局所解として定まる.}$$

$$(ii) \quad \rho(\mu) > 0 \text{ ならば}$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{h(u(x))}{h(\alpha)}} \cos \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\sqrt{\rho(\mu)}}{h(u(\xi))} d\xi \right).$$

Remark 3.1. (13) により, $\rho(\mu) > 0$ ならば $h(u) > 0$, $\rho(\mu) = 0$ ならば $h(u) \geq 0$ として一般性を失わない.

上の Proposition 3.1 及び境界条件 $\varphi_x(1) = 0$ を考察することにより固有関数の表現公式が得られる. (i) については適当に局所解を拡張すれば, 特に $u_{n,\varepsilon}$ 自体が境界条件 $(u_{n,\varepsilon})_x(1) = 0$ を満たすので $\pm \sqrt{|h(u(x))|}$ の形で特別な固有関数が得られる. 一般の固有関数については, u を特に n モード解とするとき

$$A(\mu) := \frac{1}{2n\varepsilon} \int_0^1 \frac{\sqrt{\rho(\mu)}}{h(u(\xi))} d\xi = \frac{1}{2} \int_{\alpha_m}^{\alpha_M} \frac{\sqrt{\rho(\mu)}}{\sqrt{2(F(\alpha) - F(s))}h(s; \mu)} ds.$$

とおくことにより次の命題が得られる.

Proposition 3.2. $u(x)$ を (1) の n モード解とし, Proposition 3.1 (ii) が成立すると仮定する. このとき μ が超越方程式

$$A(\mu) = \frac{j\pi}{2n}$$

の解ならば φ は (2) の $(j+1)$ 番目の固有関数である.

以上より $f(u) = \sin u$ の場合を考える. このとき表現方程式 α の代わりに k を用いて表すと

$$4\left(k^2 - \sin^2 \frac{u}{2}\right)h_{uuu} - 3\sin u h_{uu} + (3\cos u + 4\mu)h_u - 2\sin u h = 0,$$

ただし $u \in (-2\sin^{-1} k, 2\sin^{-1} k)$ となり, 特解 h 及び ρ , A は第2節の (6)-(8) により与えられることがわかる. 従って Proposition 3.1, 3.2, 及び超越方程式の解の一意性を与える Lemma 2.1 と合わせて Proposition 2.1, 2.2 が示される.

3.2 漸近公式のアウトライン

ここでは Theorem 1-5 の証明のアウトラインについて, ポイントだけ述べる.

固有値の漸近公式については楕円積分に関する漸近公式と密接な関わりがある. Theorem 1(i), (iii) は Proposition 2.1, 及び $K(k)$ についてよく知られた漸近公式

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left(K(k) - \log \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} - 2\log 2 \right) = 0$$

から直ちに従う. (ii), (iv) については $\mu_j^n(\varepsilon)$ を決定する超越方程式

$$A(\mu_j^n(\varepsilon), k_n(\varepsilon)) = \frac{j\pi}{2n}, \quad j \neq 0, n,$$

すなわち第3種楕円積分 $\Pi(\nu, k)$ に関する漸近解析を必要とする. 完全楕円積分は $k \rightarrow 1$ において特異性を持つが, さらに $\Pi(\nu, k)$ はもう一つの parameter ν において $\nu \rightarrow -1$, $\nu \rightarrow +\infty$ にて特異性を持つ. さらにここでは, $\varepsilon \rightarrow 0$ により, 形式的には次の特異極限を考察する必要がある: $0 < j < n$ の場合 $(\nu, k) \rightarrow (-1, 1)$, $j \geq n$ の場合 $(\nu, k) \rightarrow (+\infty, 1)$. [10] ではそれぞれに対応する漸近公式が与えられており, それを用いて (ii), (iv) が示される.

Theorem 2-5 については直接計算による検証も可能であるが (楽ではない), [12] では固有関数の商が満たす線形常微分方程式を用いて示している. j^* を $0 < j < n$ ならば $j^* = 0$, $j > n$ ならば $j^* = n$ とし, $\psi_j^n(x; \varepsilon) := \varphi_j^n(x; \varepsilon) / \varphi_{j^*}^n(x; \varepsilon)$ とおくと, これは次の方程式を満たすことがわかる:

$$(\psi_j^n)_{xx} + 2 \frac{(\varphi_{j^*}^n(x; \varepsilon))_x}{\varphi_{j^*}^n(x; \varepsilon)} (\psi_j^n)_x + \frac{\mu_j^n(\varepsilon) - \mu_{j^*}^n(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \psi_j^n = 0. \quad (15)$$

Theorem 2-4 に関しては (15) における極限操作を通して証明が与えられるが, このとき以下に関する情報が重要となる:

- 特別な固有関数 φ_0^n , φ_n^n に関する漸近公式,
- 固有値の漸近公式,
- 固有関数の持つ対称性

最後の対称性に関してはいわゆる接合条件に関係する. 方程式 (15) においても $\varepsilon \rightarrow 0$ における特異性が残っているため, 方程式の極限操作を区間全体で行うことができない. そのため特異性が現れる部分を外して部分区間毎に極限関数を調べる必要が生じるが, その際に表現公式から得られる φ_j^n の対称性が重要な役割を果たす.

4 Discussions

最後に本節では表現方程式と Lamé 方程式の関係について簡単な考察を与えたい。

4.1 表現公式に関する考察

線形化固有値問題において具体的な表現公式を得るためには、表現方程式 (12) の特解 h を見つけることが最も重要となる。

ここでは (12) の持つ基本的な性質について述べる。まず対応 $(f, \mu) \mapsto (-f, -\mu)$ に関して (12) は不変であることから、 $h(u; \mu)$ が f に対する表現方程式を満たすとき、 $h(u; -\mu)$ は $-f$ に対する表現方程式を満たす。したがって f に特解が存在すれば $-f$ においても特解が得られる。ただし α_m や α_M など非線形問題 (1) に依存する量に関しては別々に考える必要がある。

特解を探す上で最も重要な点は $\mu = 0$ のとき $h_0(u) = F(\alpha) - F(u)$ は (12) を必ず満たすということである。これはもとの x 変数の線形化方程式

$$\varepsilon^2 \varphi_{xx}(x) + f_u(u(x))\varphi(x) = 0$$

において、 $\varphi(x) = u_x(x)$ が常に解となることに対応している (ただしこれは固有関数にはならない)。これより、

$$h(u; \mu) = h_0(u) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i h_i(u)$$

の形で特解を探すのは自然な発想である。このとき各 h_i について次の漸化式が従う：

$$\begin{aligned} & 2(F(\alpha) - F(u))(h_{i+1})_{uuu} - 3f(u)(h_{i+1})_{uu} + 3f_u(u)(h_{i+1})_u + 2f_{uu}(u)h_{i+1} \\ &= -4(h_i)_u. \end{aligned}$$

これを順次解いていけば一般の f についても、少なくとも $|\mu| \ll 1$ において特解が構成できるが、方程式の係数の退化性により (境界までこめて) 正則な解が存在するかどうかは非自明であり、現段階ではいくつか技術的な問題を要する。

一方、上の級数解 $h(u; \mu)$ が μ に関して m 次の多項式かつ、 μ^m の係数は定数となる場合があり、その場合は h を具体的に与えることが可能である。これは逆に非線形項 f に関する方程式を定めることになる。簡単のため $G(u) = F(\alpha) - F(u)$ と改めておくと、例えば $m = 1, 2, 3$ の場合に

$$(i) \quad h(u; \mu) = h_0(u) + h_1\mu, \quad (h_1 \neq 0) \quad \text{ならば} \quad h_1(\mathcal{L}_1 G)(u) = 2G'(u),$$

$$(ii) \quad h(u; \mu) = h_0(u) + h_1(u)\mu + h_2\mu^2, \quad (h_2 \neq 0) \quad \text{ならば}$$

$$h_1(\mathcal{L}_1 G)(u) + h_2(\mathcal{L}_2 G)(u) = 2G'(u), \quad h_1 \text{ は任意定数},$$

$$(iii) \quad h(u; \mu) = h_0(u) + h_1(u)\mu + h_2(u)\mu^2 + h_3\mu^3, \quad (h_3 \neq 0) \quad \text{ならば}$$

$$h_1(\mathcal{L}_1 G)(u) + h_2(\mathcal{L}_2 G)(u) + h_3(\mathcal{L}_3 G)(u) = 2G'(u), \quad h_1, h_2 \text{ は任意定数},$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 G &:= G''', \\ \mathcal{L}_2 G &:= -\frac{1}{2}GG^{(5)} - \frac{3}{2}G^{(1)}G^{(4)}(u) + \frac{5}{2}G^{(2)}G^{(3)}, \\ \mathcal{L}_3 G &:= \frac{1}{4}G^2G^{(7)} - \frac{7}{4}GG^{(3)}G^{(4)} + \frac{5}{4}GG^{(1)}G^{(6)} - \frac{15}{16}G^{(1)}G^{(2)}G^{(4)} \\ &\quad + \frac{15}{16}(G^{(1)})^2G^{(5)} - \frac{17}{16}G^{(1)}(G^{(3)})^2 + \frac{21}{16}(G^{(2)})^2G^{(3)}.\end{aligned}$$

これらの方程式について何らかの可積分系理論との関係が期待されるが，ここでは踏み込まない．

典型的な (1) の非線形項 $f(u) = \sin u$, $f(u) = \pm u(1 - u^2)$, $f(u) = \pm u(1 - u)$ は上の (i)-(iii) の場合に属している．このとき対応する $\rho(\mu)$ は (14) より与えられ， μ に関する $2m + 1$ 次の多項式となる．これより方程式 $\rho(\mu) = 0$ は $2m + 1$ 個の根を持ち，それぞれがスペクトルギャップに相当する．このうち $h(\alpha) \neq 0$ となる $m + 1$ 個が (2) の特別な固有関数に対応する固有値を与える．

一方 $f(u)$ が多項式のとき， $h(u)$ も多項式であることが期待される．多項式解 h の存在を仮定すれば，次数解析により $\deg h = \deg F = q$ が従う．特解を得るにはこちらの方がより実践的である．これに従い

$$h(u; \mu) = \sum_{i=0}^q a_i(\mu)u^i$$

として (12) に代入すると a_i に関する $2q - 3$ 個の連立 1 次方程式が得られる． $2q - 3 = q$ すなわち $q = 3$ (f が 2 次式) のときは常に連立 1 次方程式は一意可解である． $q \geq 4$ では連立 1 次方程式は過剰決定系となり一般には解くことができないが， $f(u) = u - u^3$ などの balanced な 3 次関数は対称性から方程式を解くことができる． $f(u) = u - u^3$, $f(u) = u - u^2$ の場合特解はそれぞれ α を用いて次で与えられる：

$$\begin{aligned}h(u) &= \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{4} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}\right) + \mu\left(\frac{u^2}{6} - \frac{1}{3}\right) + \frac{\mu^2}{9}, \\ h(u) &= \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right) + \mu\left(\frac{2u^2}{5} - \frac{2u}{5} - \frac{3}{10}\right) + \mu^2\left(\frac{8u}{25} - \frac{4}{25}\right) + \frac{8\mu^3}{25}.\end{aligned}$$

なお $f(u) = (u - a)(1 - u^2)$ (ただし $-1 < a < 1, a \neq 0$) に代表される unbalanced な 3 次関数の場合 (12) は多項式解を持たず，表現公式の具体的な構成は期待できない．

4.2 Lamé 方程式の理論との関係

$m \in \mathbf{N}$, $k \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して次の方程式を Lamé 方程式という (Whittaker-Watson [13] Chapter XXIII, Takemura [7] など)：

$$w_{zz}(z) + [-m(m+1)k^2\text{sn}(z, k)^2 + \lambda]w(z) = 0. \quad (\text{L}_m)$$

Lamé 方程式は 19 世紀に Lamé の楕円体座標の研究を通して発見され，Halphen, Hermite, Liouville などによって盛んに研究され今日の Sturm-Liouville 理論や Hill 方程

式の理論などのさきがけとなった．可積分系理論では現在においても研究がおこなわれている．なお $u = \text{sn}(z, k)$ と独立変数を変換すると Heun の微分方程式が得られる．

実は当研究を始めた頃は全く知らなかったのであるが，前節で述べた $f(u) = \sin u$, $f(u) = \pm u(1 - u^2)$, $f(u) = \pm u(1 - u)$ など，すなわち表現方程式の方法が使える非線形項について線形化方程式を直接楕円関数の解表示を用いて書き下すと，適当なスケーリングの後に結局 (L_1) , (L_2) , (L_3) に帰着されることがわかることが後々わかった．結局のところ表現方程式の方法は Lamé 方程式の従来解法 (の一つ) と本質的には同等であると思われる．しかしながら，表現方程式の方法では定常解 $u(x)$ の表示式を用いずに，固有関数について議論が可能というメリットが一応ある．また，逆に考えれば典型的な f を与えたときの (1) の定常解 u に関する線形化問題として Lamé 方程式が自然に現れることは大変興味深いともいえる．

以下最後に表現方程式の方法から (L_m) に対するアプローチを与える．Lamé 方程式の解の表現公式の一般的な枠組みについては [13] にて述べられている． $u = \text{sn}(z, k)$ として 3 階の表現方程式を導出すると

$$u_z^2 = (1 - k^2 u^2)(1 - u^2), \quad u_{zz} = -(1 + k^2)u + 2k^2 u^3$$

などから

$$(1 - k^2 u^2)(1 - u^2)h_{uuu} - 3[(1 + k^2)u - 2k^3 u^3]h_{uu} + [4\lambda - (1 + k^2) + (6 - 4m(m + 1))k^2 u^2]h_u - 4k^2 m(m + 1)uh = 0$$

及びその保存則

$$\begin{aligned} & (1 - k^2 u^2)(1 - u^2) \left(h_{uu}h - \frac{h_u^2}{2} \right) - 3[(1 + k^2)u - 2k^2 u^3]h_u h \\ & + 2[\lambda - m(m + 1)k^2 u^2]h^2 \\ & = h(1) [-3(1 - k^2)h_u(1) + 2(\lambda - m(m + 1)k^2)h(1)] \\ & =: \rho(\lambda, k) \end{aligned}$$

が得られる．変数 u の取り方から (12) と少し形が異なるが，これは u に関して $2m$ 次の多項式解 h を許容し，このとき $\rho(\lambda, k)$ は λ に関する $2m + 1$ 次式となる．これより方程式 $\rho(\lambda, k) = 0$ を満たす $2m + 1$ 個の λ は (L_m) の $\mathbf{R}$ 上のスペクトルギャップを定め，さらに各 μ に応じて Lamé 関数と呼ばれる関数が定義される．方程式 (L_m) を適当な Neumann 境界条件の下で考えたとき，Lamé 関数のうち境界条件を満たす $m + 1$ 個のものが特別な固有関数に相当する． $\rho(\lambda, k) > 0$ についても同様に表現公式が得られる．

参考文献

- [1] P. Brunovský and B. Fiedler, Connecting orbits in scalar reaction diffusion equations II. The complete solution, J. Differential Equations, **81** (1989), 106-135.

- [2] J. Carr and R.L. Pego, Metastable patterns in solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$, Commun. Pure Appl. Math. **42** (1989), 523-576.
- [3] N. Chafee and E.F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, Applicable Anal., **4** (1974/75), 17-37.
- [4] G. Fusco-J. K. Hale, Slow-motion manifolds, dormant instability, and singular perturbations, J. Dynam. Differential Equations, **1** (1989), 75-94.
- [5] D. Henry, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1981.
- [6] J. Smoller and A. Wasserman, Global bifurcation of steady-state solutions, J. Differential Equations, **39** (1981), 269-290.
- [7] K. Takemura, The Heun equation and the Calogero- Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method, Commun. Math. Phys. **235** (2003), 467-494.
- [8] T. Wakasa, "Exact eigenvalues and eigenfunctions associated with linearization for Chafee-Infante problem", Funkcialaj Ekvacioj **49** (2006), pp. 321-336.
- [9] T. Wakasa, Study on Pattern Formation Problems Related with Reaction Diffusion Equations, dissertation, March, 2007, Waseda University.
- [10] T. Wakasa and S. Yotsutani, "Representation formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems", Commun. Pure Appl. Anal. **7** (2008), pp. 745-763.
- [11] T. Wakasa and S. Yotsutani, "Representation and asymptotic formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems", 京都大学数理解析研究所講究録, 京都大学数理解析研究所, No.1591, pp.67-87, 2008 年 4 月.
- [12] T. Wakasa and S. Yotsutani; "Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1 dimensional linearized eigenvalue problems", submitted in Commun. Pure Appl. Anal.
- [13] E. T. Whittaker and G. N. Watson, "A course of modern analysis", Cambridge University Press, Cambridge (1927)

ペーストの記憶と乾燥亀裂パターン

日本大学理工学部 中原明生、篠原雄、星野健太郎、勝木厚成、松尾洋介

要旨 ペーストは揺れや流れを記憶する。記憶の形成にはペーストの持つ塑性が重要な役割を果たしている。ペースト内に蓄えられたこれらの記憶は肉眼で見てもわからないが、ペーストを乾燥破壊させることにより生じる亀裂パターンとして視覚化できることが実験によってわかった。この現象を応用することにより、ペースト内の記憶を操作して乾燥破壊時に現れる亀裂パターンの形状をコントロールできるようにもなった。

乾燥破壊

我々の扱うペーストは粉と水の混合液のことであり、粉の比率の高いコロイド・サスペンションに該当する。粉の比率が高いために塑性流動をし、ペーストに加えた外力の大きさが降伏応力よりも小さい場合は流動化しない。粒子の形状が板状で大きさがミクロン・サイズの際は粘土とも呼ばれる。このペーストを温度・湿度一定の条件下で乾燥させると、干上がった湖で見られるようなセル状の等方的な亀裂パターンが出現する。我々は乾燥前のペーストに揺れや流れを加えることによって、乾燥後に現れる亀裂パターンが変化することを見出したので、その現象について説明したい [1]。

揺れの記憶

授業で使うチョークの材料である炭酸カルシウムの粉と水を質量比 2:1 で混ぜてペーストを用意しよう。このペーストを円形容器に流し込んで数日乾燥させると、通常は等方的なセル状亀裂パターンが発生する。ところが、このペーストを容器に流し込んだ直後に 1 分ほど容器に微小な振動を加えてからその後静止状態で乾燥させると、揺すった方向に依存した異方的な亀裂パターンが形成されることを見出された。図 1 に示すが、ペーストを乾燥前に回転方向に揺すっておくと乾燥後に放射状の亀裂パターンが、一方向に揺すっておくと縞状亀裂パターンが発生する。すなわち、ペーストは初期振動の方向を覚えることができ、その後の数日間にわたる乾燥過程においてもその記憶は持続され、最終的に発生する亀裂パターンを決定するほどの効果があるのである。また、揺れの記憶による亀裂パターンの方向は初期振動の方向に常に垂直なものとなることに注目しよう [1]。ペーストが記憶するという現象は非常に興味深いものであり、その後塑性を考慮した弾性体の理論により揺れの記憶の形成メカニズムはある程度説明できるようになった [2-4]。

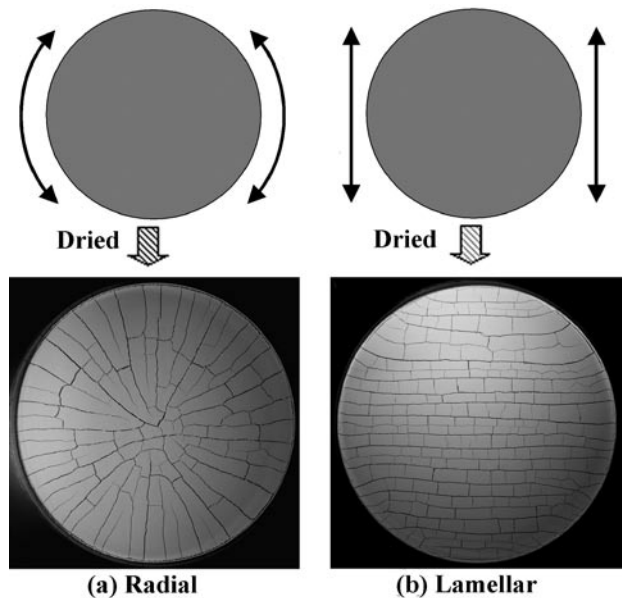


図 1：揺れの記憶による亀裂パターン。
円形容器の直径は 50cm、炭酸カルシウム・ペーストの厚みは 1cm。
(a) 放射状亀裂、(b) 縞状亀裂 [1]。

流れの記憶

他の粉を用いて作成したペーストも揺れを記憶するのだろうか？その疑問に答えるために板状の炭酸水酸化マグネシウムの粉を水と混ぜてペースト（粘土ペースト）を作成し揺すったところ、粉の比率が高い時は炭酸カルシウム・ペーストと同様に揺れを記憶し揺すった方向に垂直に割れるが、粉の比率が低い場合は揺ることによってペーストが流れ、しかもその流れの方向を記憶することがわかった。ここで、流れの記憶による亀裂パターンは初期振動の方向に平行というよりも、初期振動によって流れた方向に平行であることに注意しよう [5]。

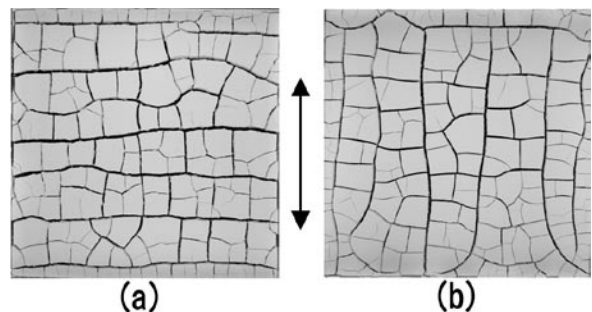


図 2：亀裂パターンの転移。矢印は初期振動方向。
(a) 揺れの記憶による垂直縞状亀裂パターン。
(b) 流れの記憶による平行縞状亀裂パターン。[5]

亀裂パターンの形態相図

記憶の形成メカニズムを調べるために、ペースト内の粉の体積比率 ρ と初期外力の加速度をパラメーターとして、乾燥後の粘土ペーストの亀裂パターンの形態相図を作成した (図3)。ペーストが塑性流動をして揺れや流れを記憶できる領域は液性限界と塑性限界の間である。ここで液性限界とは、これ以下だと塑性がなく粘性のみなので記憶できないラインを言い、図では $\rho = 4\%$ の点線に対応する。塑性限界とは、これ以下では塑性流動できるが、これ以上では半固体状態で流動化できないラインを言い、図では $\rho = 18\%$ の一点破線に対応する。実線は初期振動によるせん断応力とペーストの降伏応力が等しいラインであり、初期振動の強さが降伏応力ラインよりも上だとペーストは動けるが、それ以下だとペーストは動けない。○印はセル状亀裂、■印は揺れによる垂直縞、田印は流れの記憶による平行縞、を表している。

液性限界と塑性限界の間の領域を見ると、領域 A (セル)、B (揺れの記憶・垂直縞)、C (流れの記憶・平行縞)、D (セル) に分けられる。降伏応力ラインよりも適度に強い力で揺すった領域 B では、ペーストが揺れを記憶しているのがわかる。

領域 C は、領域 B よりも強い力で揺するか、粉の比率が少ない状態で揺すった状況に該当する。そのためペーストは揺れるのではなく流れ、その流れの方向を記憶するのである。領域 C は板状の粒子で構成される粘土ペーストでは形態相図内に存在するが、炭酸カルシウム・ペーストのような粒状の粉でできたペーストでは存在しない。このことから、粒子の形状が流れの記憶に関与していることがわかる。

領域 A と D はともにセル状亀裂ではあるが、領域 A では降伏応力ラインの下であることからペーストは揺れていないので揺れも流れも記憶がないのに対し、領域 D では揺れすぎてペーストが乱流状態にあるために方向性が記憶できていないという違いがある。

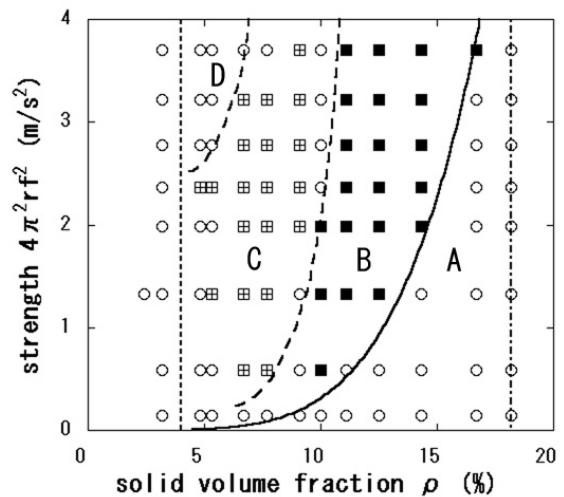


図3：粘土ペーストの亀裂パターンの形態相図。○：セル状、■：揺れによる垂直縞、田：流れによる平行縞。実線：降伏応力ライン、点線：液性限界、一点破線：塑性限界、破線：亀裂パターンから引いた境界線 [5]。

結論

ペーストが揺れや流れの方向を記憶することを実験的に見出した。この記憶は乾燥破壊時に現れる亀裂パターンとして視覚化できる。ペーストのメモリー効果を利用すると、ペーストに割れるべき形状を覚えさせることができ、実際にセル状、縞状、螺旋、リングなどの亀裂パターンを自由自在に作成できるようになった [6]。

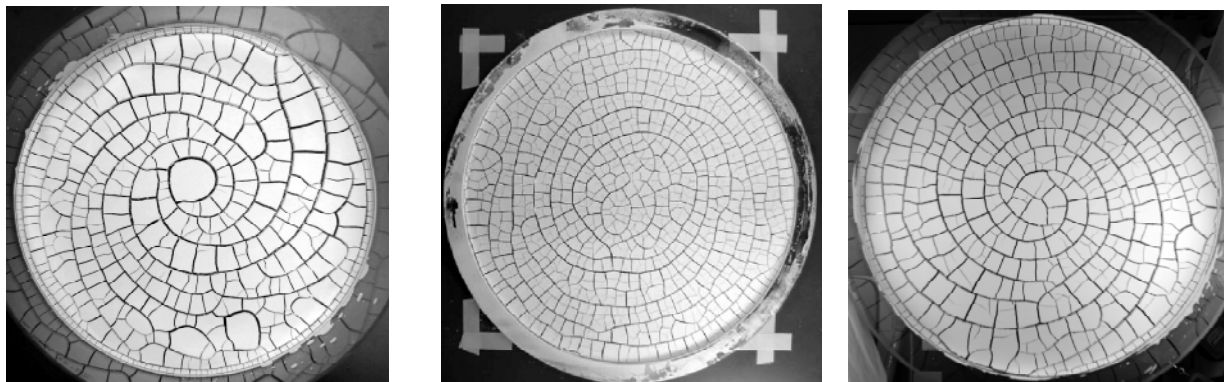


図4：記憶効果を利用した様々な亀裂パターン。左から、螺旋、リング、螺旋（反対回り）

参考文献

- [1] Nakahara A., Matsuo Y.: Imprinting Memory into Paste and Its Visualization as Crack Patterns in Drying Process. *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**:1362-1365, 2005.
- [2] T. Ooshida, Sekimoto K : Internal stress in model elasto-plastic fluids. *Phys. Rev. Lett.* **95**:108301, 2005.
- [3] Otsuki M : Memory effect on the formation of drying cracks. *Phys. Rev. E* **72**:046115, 2005.
- [4] T. Ooshida: Continuum theory of memory effect in crack patterns of drying pastes. *Phys. Rev. E* **77**:061501, 2008.
- [5] Nakahara A., Matsuo Y.: Transition in the pattern of cracks resulting from memory effects in paste. *Phys.Rev. E* **74**:045102(R), 2006.
- [6] *Physics Today* **60**: no. 9, p. 116, 2007

半導体モデルの階層構造について

鈴木 政尋 (東京工業大学)

e-mail: Masahiro.Suzuki@is.titech.ac.jp

1 序

半導体中の電子流を記述するモデル方程式として, Heat-conductive hydrodynamic model (HHD モデル), Energy-transport model (ET モデル), Drift-diffusion model (DD モデル) 等の方程式系が提案され, デバイスの使用用途に応じて, 設計の際のシミュレーションに利用されている. 従って, これらのモデル方程式間の関係 (階層構造) の解析は, 数学的に興味深いだけでなく, 工学的にも重要な問題である. この関係は, モデル方程式に含まれる物理係数である緩和時間を形式的に 0 に近づける極限操作 (緩和極限) によって説明できる. 本稿では, これらのモデルの解の長時間挙動及び緩和極限に関する研究結果を紹介する.

HHD モデルは次の方程式系で与えられる.

$$\rho_s + m_x = 0, \quad (1.1a)$$

$$m_s + \left(\frac{m^2}{\rho} + \rho\theta \right)_x = \rho\phi_x - \frac{m}{\tau_m}, \quad (1.1b)$$

$$\rho\theta_s + m\theta_x + \frac{2}{3} \left(\frac{m}{\rho} \right)_x \rho\theta - \frac{2}{3} (\kappa\theta_x)_x = \frac{2\tau_e - \tau_m}{3\tau_m\tau_e} \frac{m^2}{\rho} - \frac{\rho}{\tau_e} (\theta - \bar{\theta}), \quad (1.1c)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (1.1d)$$

ここで, ρ, j, θ, ϕ は未知関数であり, それぞれ, 電子密度, 電流密度, 絶対温度, 電位を表す. また, $\bar{\theta}, \kappa, \tau_m, \tau_e$ は, 室温, 熱伝導係数, モーメントの緩和時間, エネルギーの緩和時間を表す正定数とする. なお, 物理的には緩和時間は大小関係 $\tau_m \leq \tau_e$ を満たす. ドーピング・プロファイル $D(x)$ は半導体中に固定されている正イオンの分布を表す関数であり, ここでは有界連続性と正值性を仮定する.

$$D \in \mathcal{B}^0(\bar{\Omega}), \quad \inf_{x \in \bar{\Omega}} D(x) > 0. \quad (1.2)$$

半導体デバイスは微小である為, 有界領域 $\Omega := (0, 1)$ 上で方程式系 (1.1) に次の境

界条件を課した初期値境界値問題を考察する.

$$(\rho, m, \theta)(0, x) = (\rho_0, m_0, \theta_0)(x), \quad (1.3)$$

$$\rho(t, 0) = \rho_l > 0, \quad \rho(t, 1) = \rho_r > 0, \quad (1.4)$$

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0, \quad (1.5)$$

$$\phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = \phi_r \geq 0. \quad (1.6)$$

ここで, ρ_l, ρ_r, ϕ_r は正定数である. 典型的な半導体デバイスでは, $\rho_l = D(0) = D(1) = \rho_r$ となる. また, ϕ_r はデバイスにかかる電圧の値を表し, 工学的には微小な値となる. 従って, 工学的な観点から,

$$\delta := |\rho_l - \rho_r| + |\phi_r| \ll 1$$

と仮定する事は妥当である.

この初期値境界値問題の古典解を考える為, $x = 0$ と $x = 1$ で両立条件が成り立つとする. すなわち,

$$\rho_0(0) = \rho_l, \quad \rho_0(1) = \rho_r, \quad (1.7a)$$

$$\theta_{0x}(0) = \theta_{0x}(1) = 0, \quad (1.7b)$$

$$m_{0x}(0) = m_{0x}(1) = 0. \quad (1.7c)$$

さらに初期値に対しては, 亜音速条件及び, 密度と温度の正值性を仮定する.

$$\inf_{x \in \Omega} \rho_0 > 0, \quad \inf_{x \in \Omega} \theta_0 > 0, \quad \inf_{x \in \Omega} \left(\theta_0 - \frac{m_0^2}{\rho_0^2} \right) > 0.$$

以上の条件下で, 初期値境界値問題 (1.1)–(1.6) は well-posed となり, 初期値 (ρ_0, m_0, θ_0) の近傍で時間局所解 (ρ, m, θ, ϕ) が一意的に存在し, やはり亜音速条件及び, 密度と温度の強正值性を満たす.

$$\inf_{x \in \Omega} \rho > 0, \quad (1.8a)$$

$$\inf_{x \in \Omega} \theta > 0, \quad (1.8b)$$

$$\inf_{x \in \Omega} \left(\theta - \frac{m^2}{\rho^2} \right) > 0. \quad (1.8c)$$

方程式 (1.1d) を解いて, 電圧 ϕ を表す公式が得られる.

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \Phi[\rho](t, x) \\ &:= \int_0^x \int_0^y (\rho - D)(t, z) dz dy + \left(\phi_r - \int_0^1 \int_0^y (\rho - D)(t, z) dz dy \right) x. \end{aligned} \quad (1.9)$$

記号. 非負の整数 $i \geq 0$ について, $H^i(\Omega)$ は Sobolev 空間であり, そのノルムを $\|\cdot\|_i$ と書く. $H^0 = L^2$ であり, このノルムは $\|\cdot\| := \|\cdot\|_0$ とする. さらに, 非負の整数 $k, i \geq 0$ について, $C^k([0, T]; H^i(\Omega))$ は $H^i(\Omega)$ に値を取り $[0, T]$ 上において k 階連続微分可能な関数の空間を表す. また, $H^k(0, T; H^i(\Omega))$ は $H^i(\Omega)$ に値を取り $(0, T)$ 上で $k-1$ 階絶対連続微分可能で, k 階までの導関数が L^2 可積分関数となる関数の空間を表す. 非負の整数 $i \geq 0$ について, $\mathcal{B}^i(\Omega)$ は i 階微分可能でその導関数が有界連続である関数の空間を表す. 最後に, 関数空間 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_i^j([0, T]) &:= \bigcap_{k=0}^i C^k([0, T]; H^{j+i-k}(\Omega)), \quad \mathfrak{X}_i([0, T]) := \mathfrak{X}_i^0([0, T]), \\ \mathfrak{Y}([0, T]) &:= C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)), \\ \mathfrak{Z}([0, T]) &:= C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)).\end{aligned}$$

2 ET モデル及び DD モデルの形式的導出

ET モデル 及び DD モデルは, 形式的な極限操作により方程式系 (1.1) から導出される. まず, 方程式系 (1.1) でスケール変換

$$s := \frac{t}{\tau_m}, \quad J := \frac{j}{\tau_m}, \quad \varepsilon := \tau_m^2, \quad \lambda := \tau_m \tau_e, \quad \kappa_0 := \frac{\kappa}{\tau_m}$$

を行うと, 次の方程式系が得られる.

$$\rho_t + j_x = 0, \tag{2.1a}$$

$$\varepsilon j_t + \left(\varepsilon \frac{j^2}{\rho} + \rho \theta \right)_x = \rho \phi_x - j, \tag{2.1b}$$

$$\rho \theta_t + j \theta_x + \frac{2}{3} \left(\frac{j}{\rho} \right)_x \rho \theta - \frac{2}{3} \kappa_0 \theta_{xx} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\zeta} \right) \frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\zeta} (\theta - \bar{\theta}), \tag{2.1c}$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{2.1d}$$

また, (1.3) より方程式系 (2.1) の初期値は次の通りとなる.

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \tag{2.2a}$$

$$J(0, x) = J_0(x) := j_0/\tau_m(x), \tag{2.2b}$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x). \tag{2.2c}$$

このとき, 亜音速条件 (1.8c) は次のように書き換えられる.

$$\inf_{x \in \Omega} \left(\theta - \varepsilon \frac{j^2}{\rho^2} \right) > 0. \tag{2.3}$$

従って、緩和時間 $\tau_m = \sqrt{\varepsilon}$ を十分小さくする事により、温度の正值性 (1.8b) から亜音速条件 (2.3) が従う。

方程式系 (2.4) で、形式的にパラメーター ε を 0 として、ET モデルが得られる。

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (2.4a)$$

$$\rho\theta_t + j\theta_x + \frac{2}{3}\left(\frac{j}{\rho}\right)_x \rho\theta - \frac{2}{3}\kappa_0\theta_{xx} = \frac{2j^2}{3\rho} - \frac{\rho}{\zeta}(\theta - \bar{\vartheta}), \quad (2.4b)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D, \quad (2.4c)$$

ここで、電流密度は

$$j = \rho\phi_x - (\theta\rho)_x \quad (2.4d)$$

で与えられる。ET モデル (2.4) に対する初期値及び境界値は (1.4)–(1.6), (2.2a), (2.2c) で与えられる。さらに、方程式系 (2.4b) を λ 倍したのち、 $\lambda = 0$ を代入して、DD モデルが得られる。

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (2.5a)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (2.5b)$$

電流密度は

$$j = \rho\phi_x - (\bar{\vartheta}\rho)_x \quad (2.5c)$$

となる。DD モデル (2.5) の初期値及び境界値は (1.4), (1.6), (2.2a) となる。これらの形式的関係は、次の図にまとめられる。

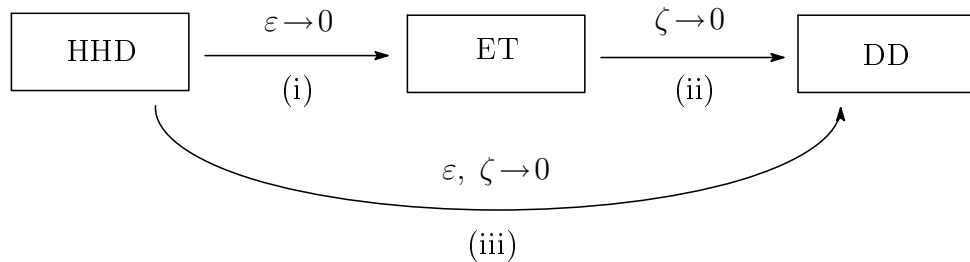


図 1: 階層構造

第三、四、五節では、それぞれ HHD モデル、ET モデル、DD モデルの定常解の一意的存在と漸近安定性に関する研究成果を紹介し、併せてその研究の歴史的経緯も述べる。第六節では緩和極限の数学的正当化に関する結果を紹介する。具体的には、(i) ε を 0 に近づけたとき、HHD モデルの時間大域解が ET モデルの時間大域解に収束する事; (ii) ζ を 0 に近づけたとき、ET モデルの時間大域解が DD モデルの時間大域解に収束する事; (iii) ε と ζ を 0 に近づけたとき、HHD モデルの時間大域

解が DD モデルの時間大域解に収束する事を、それぞれ証明した。なお、これらの安定性と緩和極限の定理では緩和時間が十分小さい事を仮定しているが、初期値の大きさには如何なる制限も課す必要はない。

3 HHD モデル

本節では、HHD モデルの定常解の一意的存在と漸近安定性について議論する。定常解とは、境界条件 (1.4)–(1.6) を満たす (2.1) の時間に独立な解を意味する。すなわち、定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ は次の方程式を満たす。

$$\tilde{j}_x = 0, \quad (3.1a)$$

$$\left(\theta - \varepsilon \frac{j^2}{\rho^2}\right) \tilde{\rho}_x + \tilde{\rho} \tilde{\theta}_x = \tilde{\rho} \tilde{\phi}_x - \tilde{j}, \quad (3.1b)$$

$$\tilde{j} \tilde{\theta}_x - \frac{2}{3} \tilde{j} \tilde{\theta} (\log \tilde{\rho})_x - \frac{2}{3} \kappa_0 \tilde{\theta}_{xx} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\zeta}\right) \frac{\tilde{j}^2}{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{\zeta} (\tilde{\theta} - \bar{\vartheta}), \quad (3.1c)$$

$$\tilde{\phi}_{xx} = \tilde{\rho} - D. \quad (3.1d)$$

等温の hydrodynamic model (HD モデル) の定常解の一意的存在と漸近安定性に関する研究成果は数多く報告されている ([6, 8, 10, 11, 14])。一方、HHD モデルに対しては、我々の研究 [16] で定常解の一意的存在と漸近安定性が示されている。この研究では温度に対する境界条件として、ノイマン境界条件 (1.5) の代わりにディリクレ境界条件 $\theta(t, 0) = \theta_l$, $\theta(t, 1) = \theta_r$ が課されている。なお、以上のすべての結果では、初期擾乱が十分小さい事が仮定されている。

最近の研究 [18] において、我々は初期擾乱の小ささを仮定する事なく、HHD モデルの定常解の漸近安定性の証明に成功した。但し、パラメータ ε と ζ は初期値に応じて小さく取る必要がある。この結果は Theorem 3.2 にまとめられる。定常解の一意的存在については次の Lemma が成立する。

Lemma 3.1. ドービング・プロファイルと境界条件は (1.2), (1.4), (1.6) を満たすとする。任意の $\rho_l > 0$ に対して、ある $\delta_0 > 0$, $\zeta_0 > 0$, $\eta_0 > 0$ が存在して、 $\delta \leq \delta_0$ かつ $\varepsilon < \zeta \leq \zeta_0$ であれば、定常問題 (1.4)–(1.6), (3.1) に条件 (2.3),

$$\frac{1}{2} B_m \leq \tilde{\rho} \leq 2 B_M, \quad (3.2a)$$

$$B_m := \min \left\{ \rho_l, \rho_r, \inf_{x \in \Omega} D(x) \right\}, \quad B_M := \max \left\{ \rho_l, \rho_r, \sup_{x \in \Omega} D(x) \right\},$$

$$\sup_{x \in \Omega} |\tilde{\theta} - \bar{\vartheta}| \leq \eta_0 \quad (3.2b)$$

を満たす定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{B}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^3(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^2(\bar{\Omega})$ が一意的に存在する。

Theorem 3.2. $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ を (1.4)–(1.6), (3.1) を満たす定常解とする. 初期値 $(\rho_0, j_0, \theta_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.7), (1.8a), (1.8b), (2.3) を満たすとする. このとき, ある $\delta_0 > 0$ と $\zeta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば, $(\delta$ に独立で ζ に依存する) $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ であれば, 初期値境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.1), (2.2) に条件 (1.8a), (1.8b), (2.3) をみたす解 (ρ, j, θ, ϕ) が次の関数空間で一意的に存在する: $\rho - \tilde{\rho} \in \mathfrak{X}_2([0, \infty))$, $j - \tilde{j} \in \mathfrak{X}_2([0, \infty))$, $\theta - \tilde{\theta}, \theta_x - \tilde{\theta}_x \in \mathfrak{Y}([0, \infty))$, $\phi - \tilde{\phi} \in \mathfrak{X}_2^2([0, \infty))$. さらに, 以下の減衰評価を満たす.

$$\begin{aligned} & \|(j - \tilde{j})(t)\|_1^2 + \|(\rho - \tilde{\rho}, \theta - \tilde{\theta})(t)\|_2^2 \\ & + \varepsilon \|(\partial_x^2 \{j - \tilde{j}\}, \partial_x^3 \{\theta - \tilde{\theta}\})(t)\|^2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_4^2 \leq C e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

ここで C と α は δ, ε, t に依らない正の定数である.

Remark 3.3. *Chen-Wang* [3] により 1 次元全空間上で大きな初期値に対して *HHD* モデルの解は有限時間で爆発する事が示されている為, 一般的な初期値に対する *HHD* モデルの古典解の時間大域存在は期待できない. (この結果では, 緩和時間は固定されている.) 一方, 次節で紹介するが, *ET* モデルは放物型方程式 2 本とポワソン方程式の連立系である事から, 大きな初期値に対して時間大域解が存在する. *Theorem 3.2* の証明では, *HHD* モデルが *ET* モデルに近似される事を用いて, 大きな初期値に対して, 初期値に応じて緩和時間 ε と ζ を十分小さくし, 時間大域解の存在を示している.

4 ET モデル

ET モデルの時間大域的可解性に関する結果を紹介する. Degond-Géniéys-Jüngel [4, 5] では, ディリクレ-ノイマン混合境界条件を課した多次元有界領域上で, *ET* モデルを含む一般の放物型方程式とポワソン方程式が連立した方程式系を解析している. この研究では定常解の一意的存在と漸近安定性が証明されているが, 一様放物型である事が仮定されていた. 研究 [18] では一次元の場合に限り, 一様放物型である事を仮定する事なく, *ET* モデルに対して同様な結果を得た. 具体的な結果は, 以下の通りである.

Lemma 4.1. ドービング・プロファイルと境界条件は (1.2), (1.4), (1.6) を満たすとする. 任意の $\rho_l > 0$ に対して, ある $\delta_0 > 0$, $\zeta_0 > 0$, $\eta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば, *ET* モデル (2.4) に条件 (3.2) を満たす定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{B}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^3(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^2(\bar{\Omega})$ が一意的に存在する.

Theorem 4.2. $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ を ET モデル (2.4) の定常解とする．初期値 $(\rho_0, \theta_0) \in H^1(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.7a), (1.8a), (1.8b) を満たすとする．このとき，ある $\delta_0 > 0$ と $\zeta_0 > 0$ が存在して， $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば，初期値境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.4), (2.2a), (2.2c) に条件 (1.8a), (1.8b) を満たす解 (ρ, j, θ, ϕ) が次の関数空間で一意的に存在する： $\rho - \tilde{\rho}, \theta - \tilde{\theta} \in \mathfrak{Z}([0, \infty)) \cap \mathfrak{Y}_{loc}((0, \infty))$, $j - \tilde{j} \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{Z}_{loc}((0, \infty))$, $\phi - \tilde{\phi} \in C([0, \infty); H^3(\Omega)) \cap H^1([0, \infty); H^2(\Omega))$. さらに，解は次の減衰評価を満たす．

$$\begin{aligned} \|(j - \tilde{j})(t)\|^2 + \|(\rho - \tilde{\rho}, \theta - \tilde{\theta})(t)\|_1^2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_3^2 &\leq Ce^{-\alpha t}, \\ t\|(j_x - \tilde{j}_x)(t)\|^2 + \frac{t}{\zeta}\|(\theta - \tilde{\theta})(t)\|_1^2 + t\|(\rho - \tilde{\rho}, \theta - \tilde{\theta})(t)\|_2^2 &\leq Ce^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

ここで C と α は δ, ζ, t に依らない正の定数である．

5 DD モデル

DD モデルの数学解析は Mock [12, 13] により始められた．彼の研究では，多次元領域上で境界から電子が出ていかない事を意味する特殊な境界条件を課して，DD モデルの定常解の存在と漸近安定性が示されている．その後，Gajewski-Gröger [7] により，電子が境界を通り抜ける場合を含む一般的な境界条件で同様な結果が得られている．しかし，この研究では電流が流れない様な特殊な定常解のみ解析している．我々は一次元有界領域上ではあるが，[7] の結果を一般の定常解に拡張した．

Lemma 5.1. ドーピング・プロファイルと境界条件は (1.2), (1.4), (1.6) を満たすとする．このとき， DD モデル (2.5) に条件 (1.8a) を満たす定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{B}^2(\overline{\Omega})$ が一意的に存在する．

Lemma 5.2. $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\phi})$ を DD モデル (2.5) の定常解とする．初期値 $\rho_0 \in H^1(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.7a), (1.8a) を満たすとする．このとき，ある $\delta_0 > 0$ が存在して， $\delta \leq \delta_0$ であれば，初期値境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.2a), (2.5) に条件 (1.8a) を満たす解 (ρ, j, ϕ) が次の関数空間で一意的に存在する： $\rho - \tilde{\rho} \in \mathfrak{Z}([0, \infty)) \cap \mathfrak{Y}_{loc}((0, \infty))$, $j - \tilde{j} \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{Y}([0, \infty))$, $\phi - \tilde{\phi} \in C([0, \infty); H^3(\Omega)) \cap H^1(0, \infty; H^2(\Omega))$. さらに，以下の減衰評価が成立する．

$$\|(\rho - \tilde{\rho})(t)\|_1^2 + \|(j - \tilde{j})(t)\|^2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_3^2 \leq Ce^{-\alpha t},$$

ここで C と α は， δ, t に依らない正の定数である．

6 緩和極限

HD モデルから DD モデルへの緩和極限の研究成果は数多く報告されている ([2, 9, 17, 19]). 一方, HHD モデルの緩和極限は, Ali-Bini-Rionero [1] が一次元全空間上で HHD モデルの解が ET モデルの解に収束する事を示している. この結果では, 初期値は, 電流の流れていない定常解の近傍に存在する事を仮定している. また, HHD モデルから DD モデルの緩和極限の数学的正当化は Chen-Jerome-Zhang [2] が一次元有界領域上で行っているが, 電流に対してディリクレゼロ境界条件を課している. 当然, 定常解の電流は 0 となる. 我々は物理的に妥当な問題設定下で, HHD モデルの緩和極限を解析し, 以下の主結果を得た [18]. HHD モデルから ET モデルへの緩和極限については, 次の Theorem が成立する.

Theorem 6.1. 初期値 $(\rho_0, j_0, \theta_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.7), (1.8a), (1.8b), (2.3) を満たすとする. このとき, ε を 0 に近づければ, 初期値境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.1), (2.2) の時間大域解 $(\rho_\zeta^\varepsilon, j_\zeta^\varepsilon, \theta_\zeta^\varepsilon, \phi_\zeta^\varepsilon)$ が初期値境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.4), (2.2a), (2.2c) の時間大域解 $(\rho_\zeta^0, j_\zeta^0, \theta_\zeta^0, \phi_\zeta^0)$ に収束する. 正確には, ある $\delta_0 > 0$ と $\zeta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば, (δ に独立で ζ に依存する) $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ であれば, 次の評価が任意の $t \in (0, \infty)$ に対して成立する.

$$\|(\rho_\zeta^\varepsilon - \rho_\zeta^0, \theta_\zeta^\varepsilon - \theta_\zeta^0)(t)\|_1^2 + \|(\phi_\zeta^\varepsilon - \phi_\zeta^0)(t)\|_3^2 \leq C\varepsilon^\gamma, \quad (6.1)$$

$$\|(j_\zeta^\varepsilon - j_\zeta^0)(t)\|^2 \leq \|(j_0 - j_\zeta^0)(0)\|^2 e^{-t/\varepsilon} + C\varepsilon^\gamma, \quad (6.2)$$

$$\|(\partial_x^2\{\rho_\zeta^\varepsilon - \rho_\zeta^0\}, \partial_x^1\{j_\zeta^\varepsilon - j_\zeta^0\}, \partial_x^2\{\theta_\zeta^\varepsilon - \theta_\zeta^0\}, \partial_x^4\{\phi_\zeta^\varepsilon - \phi_\zeta^0\})(t)\|^2 \leq C\varepsilon^\gamma(t^{-2} + 1). \quad (6.3)$$

ここで C と γ は, δ, ε, t に依らない正の定数である.

Remark 6.2. ET モデルの初期値は ρ_0 と θ_0 だけで与えられ, 初期時刻での電流密度は方程式 (2.4d) と公式 (1.9) より定まる:

$$j^0(0, x) = -(\theta_0 \rho_0)_x + \rho_0(\Phi[\rho_0])_x(x).$$

この $j_\zeta^0(0, x)$ と HHD モデルに対する初期電流 $j_0(x)$ の差から初期層が生じるが, (6.2) の右辺第一項はその大きさが, $t \rightarrow \infty$ 又は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき指数関数的に減衰する事を意味している. なお, 半導体モデル方程式の特異極限で初期層問題を解決した結果は, 我々の研究 ([17, 18]) が初めてである.

ET モデルから DD モデルへの緩和極限に関する結果は以下の通りである.

Theorem 6.3. 初期値 $(\rho_0, \theta_0) \in H^1(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.7a), (1.8a), (1.8b) を満たすとする. このとき, ζ を 0 に近づければ, 初期値境界値問

題 (1.4)–(1.6), (2.4), (2.2a), (2.2c) の時間大域解 $(\rho_\zeta^0, j_\zeta^0, \theta_\zeta^0, \phi_\zeta^0)$ が初期値境界値問題 (1.4), (1.6), (2.5), (2.2a) の時間大域解 $(\rho_0^0, j_0^0, \phi_0^0)$ に収束する．正確には，ある $\delta_0 > 0$ と $\zeta_0 > 0$ が存在して， $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば，次の評価が任意の $t \in (0, \infty)$ に対して成立する．

$$\|(\rho_\zeta^0 - \rho_0^0)(t)\|^2 + \|(\phi_\zeta^0 - \phi_0^0)(t)\|_2^2 \leq C\zeta^\gamma, \quad (6.4)$$

$$\|(\theta_\zeta^0 - \bar{\vartheta})(t)\|^2 \leq C\|\theta_0 - \bar{\vartheta}\|^2 e^{-\nu t/\zeta} + C\zeta^\gamma, \quad (6.5)$$

$$\|(\{\rho_\zeta^0 - \rho_0^0\}_x, \{\theta_\zeta^0\}_x, j_\zeta^0 - j_0^0)(t)\|^2 \leq C\zeta^\gamma(1 + t^{-1}). \quad (6.6)$$

ここで C, γ, ν は， δ, ζ, t に依らない正の定数である．

Remark 6.4. *DD* モデルでは温度変化がないため、初期時刻での温度は室温 $\bar{\theta}$ となる．この $\bar{\theta}$ と *ET* モデルに対する初期温度 $\theta_0(x)$ の差から初期層が生じるが，不等式 (6.5) の右辺第一項はその大きさが指数関数的に減衰する事を意味している．

Theorem 6.1 と Theorem 6.3 より，HHD モデルから ET モデルへの緩和極限に関する結果は直ちに得られる．

Corollary 6.5. *Theorem 6.1, Theorem 6.3* と同じ条件下で， ε, ζ を θ に近づければ，初期値境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.1), (2.2) の時間大域解 $(\rho_\zeta^\varepsilon, j_\zeta^\varepsilon, \theta_\zeta^\varepsilon, \phi_\zeta^\varepsilon)$ が初期値境界値問題 (1.4), (1.6), (2.5), (2.2a) の時間大域解 $(\rho_0^0, j_0^0, \phi_0^0)$ に収束する．正確には，次の評価が任意の $t \in (0, \infty)$ に対して成立する．

$$\begin{aligned} \|(\rho_\zeta^\varepsilon - \rho_0^0)(t)\|^2 + \|(\phi_\zeta^\varepsilon - \phi_0^0)(t)\|_2^2 &\leq \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}} + C\varepsilon^\gamma, \\ \|(\theta_\zeta^\varepsilon - \bar{\vartheta})(t)\|^2 &\leq \bar{C}\|\theta_0 - \bar{\vartheta}\|^2 e^{-\bar{\nu}t/\zeta} + \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}} + C\varepsilon^\gamma, \\ \|(j_\zeta^\varepsilon - j_0^0)(t)\|^2 &\leq \bar{C}\|(j_0 - j_0^0)(0)\|^2 e^{-t/\varepsilon} + \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}}(1 + t^{-1}) + C\varepsilon^\gamma, \\ \|(\{\rho_\zeta^\varepsilon - \rho_0^0\}_x, \{\theta_\zeta^\varepsilon\}_x)(t)\|^2 &\leq \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}}(1 + t^{-1}) + C\varepsilon^\gamma. \end{aligned}$$

ここで C, γ は， δ, ε, t に依らない正の定数である．また， $\bar{\nu}, \bar{\gamma}, \bar{C}$ は， $\varepsilon, \zeta, \delta, t$ に依らない正の定数である．

謝辞 本研究は西畑伸也先生（東京工業大学）との共同研究による．

参考文献

- [1] G. ALI, D. BINI AND S. RIONERO, Global existence and relaxation limit for smooth solutions to the Euler-Poisson model for semiconductors, *SIAM J. Math. Anal.* **32** (2000), 572–587.
- [2] G. Q. CHEN, J. W. JEROME AND B. ZHANG, Particle hydrodynamic moment models in biology and microelectronics: Singular relaxation limits, *Nonlinear Analysis* **30** (1997), 233–244.

- [3] G. Q. CHEN AND D. WANG, Formation of singularities in compressible Euler-Poisson fluids with heat diffusion and damping relaxation, *Z. Angew. Math. Phys.* **49** (1998), 341–362.
- [4] P. DEGOND, S. GENIEYS AND A. JUNGEL, A system of parabolic equations in nonequilibrium thermodynamics including thermal and electrical effects, *J. Math. Pures Appl.* **76** (1997), 991–1015.
- [5] P. DEGOND, S. GENIEYS AND A. JUNGEL, A steady-state system in nonequilibrium thermodynamics including thermal and electrical effects, *Math. Methods Appl. Sci.* **21** (1998), 1399–1413.
- [6] P. DEGOND AND P. MARKOWICH, On a one-dimensional steady-state hydrodynamic model, *Appl. Math. Lett.* **3** (1990), 25–29.
- [7] H. GAJEWSKI AND K. GROGER, On the basic equations for carrier transport in semiconductors. *J. Math. Anal. Appl.* **113** (1986), 12–35.
- [8] Y. GUO AND W. STRAUSS, Stability of semiconductor states with insulating and contact boundary conditions, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **179** (2006), 1–30.
- [9] C. LATTANZIO AND P. MARCATI, The relaxation to the drift-diffusion system for the 3-D isentropic Euler-Poisson model for semiconductors, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **5** (1999), 449–455.
- [10] H. LI, P. MARKOWICH AND M. MEI, Asymptotic behavior of solutions of the hydrodynamic model of semiconductors, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **132** (2002), 359–378.
- [11] A. MATSUMURA AND T. MURAKAMI, Asymptotic behavior of solutions for a fluid dynamical model of semiconductor equation, *Kyoto Univ. RIMS Kokyuroku* **1495** (2006), 60–70.
- [12] M. S. MOCK, On equations describing steady-state carrier distributions in a semiconductor device. *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 781–792.
- [13] M. S. MOCK, Asymptotic behavior of solutions of transport equations for semiconductor devices. *J. Math. Anal. Appl.* **49** (1975), 215–225.
- [14] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Asymptotic stability of a stationary solution to a hydrodynamic model of semiconductors, *Osaka J. Math.* **44** (2007), 639–665.
- [15] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Initial boundary value problems for a quantum hydrodynamic model of semiconductors: asymptotic behaviors and classical limits, *J. Differ. Equ.* **244** (2008), 836–874.
- [16] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Asymptotic stability of a stationary solution to a thermal hydrodynamic model for semiconductors, to appear in *Arch. Ration. Mech. Anal.*.
- [17] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Relaxation limit and initial layer to hydrodynamic models for semiconductors, to appear.
- [18] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Hierarchy of semiconductor equations: relaxation limits with initial layers for large initial data, to appear.
- [19] W. A. YONG, Diffusive relaxation limit of multidimensional isentropic hydrodynamical models for semiconductors. *SIAM J. Appl. Math.* **64** (2004), 1737–1748.

昆虫飛翔の数値モデルと理論モデル

飯間信 (北大電子研)

E-mail: makoto@nsc.es.hokudai.ac.jp

1 はじめに

蝶などの昆虫は自由自在に空を飛ぶ。なぜあんなに上手に飛べるのだろうか。昆虫の飛行では翼のはばたき運動により駆動される周りの空気の動力学が重要である。これは流体力学的に言うと、流体中におかれた物体と周囲の流体の相互作用により物体の運動がどのように決定されるか、という問題である。そのためには翼が生み出す流れ、特に渦生成と飛行時の蝶の（重心の）動力学を両方考慮することが重要である。

このような相互作用を理解するためには、数値的なアプローチと理論的なアプローチの両方が必要である。このうち、本稿では数値モデルの結果に基づいた理論的なアプローチに着目することにする。

まず筆者が研究を行っている2種類の数値モデルが質的に同等な分岐図を示すことを示した後、昆虫飛翔のような問題にも適用が可能な理論モデルを紹介する。ここで重要になるのが一般化された Blasius の公式 [16] である。この公式は2次元粘性流体中に置かれた物体が任意に運動する時受ける力とモーメントを、流れの情報の一部だけから計算する手法を与える。この公式は Blasius の公式の拡張となっており、非常に一般的であるにも関わらずシンプルで美しい形をしているにも関わらず意外と知られていないようである。ここではこの公式に基づいて渦を用いたはばたき飛行の簡単な理論モデルを構成し、そこから導かれる非自明な結果について述べる。

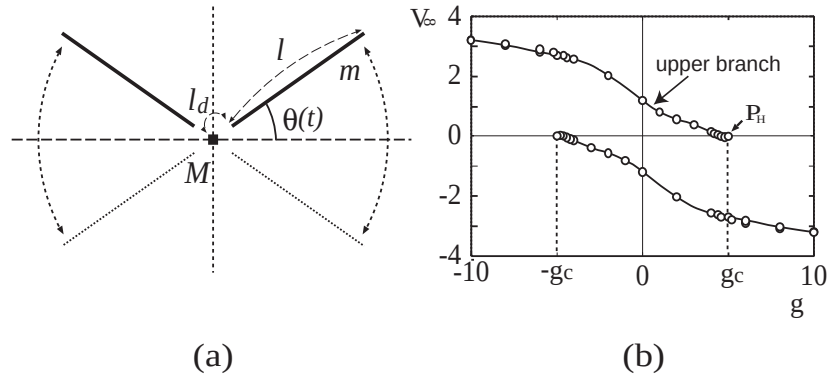


図 1: (a) 対称はばたきモデル。二本の線分が翼を表す。角 $\theta(t)$ により与えられるはばたき運動に基づいて周囲に渦を生成し、飛翔する。(b) 終端速度 V_∞ を g の関数として書いた物。2 本の分岐枝より構成され、 $-g_c < g < g_c$ の範囲では初期条件依存性がある。上の分岐枝は P_H で終わっている。

2 数値モデルの結果

2.1 対称はばたきモデル

昆虫は通常の航空機とは異なり、はばたき翼から剥離した渦を用いることで、通常の航空力学から予想されるよりも大きな揚力を発生している。これはこれらの機構は剥離渦と羽との相互作用（渦-羽相互作用）により説明されている [3, 14, 13]。しかし、昆虫の運動の効果についてはよくわかっていない [14, 13]。ここでは対称はばたきモデル [8, 9, 7, 4] (図 1(a)) が、重力下で飛行する様子を解析する。

自由飛行するはばたき飛行モデルは、2次元空間において2本の線分で表される2枚のはねが蝶番を中心に振動するものである。系に中心線に関する左右の鏡像対称性を課すことにより、このモデルは鉛直方向のみに運動することができる。流体は非圧縮かつ非粘性であることが仮定されているが、それぞれの羽の先端からの剥離は許されている。剥離と、剥離渦の動力学は離散渦法という方法により計算する [10, 12]。このモデルでは一様流は仮定されていないが、はばたき運動が渦-羽相互作用を通して流体力学的力を発生させる。重心の運動方程式は、

$$M \frac{dV}{dt} = F - Mg, \quad (1)$$

で与えられる。ここで F ははばたき運動により生み出された流体力学的力、 M は質量、 g は重力加速度である。

その相互作用は重心の速度に依存しており、流体力学的力が重力と釣り合ったときに定常状態が達成される。この定常状態を平均重心速度 V_∞ で特徴づけることにする。図 1(b) には、 V_∞ が g の関数として描かれている。定常状態における速度は2本の枝で構成され、それぞれ重力の減少関数である。特に上の枝は点 $P_H = (g_c, V_c)$ で終わっている。点 P_H の定常状態は、速度が非常に遅い ($V_c \simeq 0$) ので空中停止と見なすことができる。 g が g_c を超えたときにはこのモデルは空中停止を維持できず、下の枝で示される別の定常状態に遷移する。このように、空中停止飛行は分岐枝の端点に対応しており、特異な状態であることが分かる。

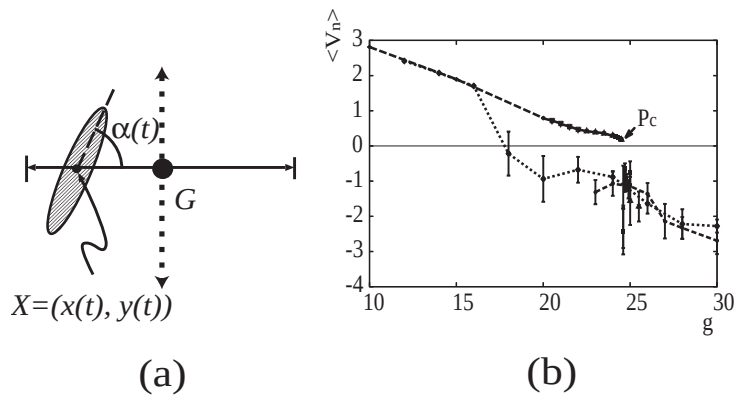


図 2: (a) 2次元水平はばたきモデル。単一の楕円翼が、迎角 $\alpha(t)$ を変えながら水平方向に振動する。振動中心にすべての質量が集中し、重心 G と一致すると仮定する。 G は鉛直方向にのみ運動すると仮定する。(b) 定常状態における平均速度 $\langle V_n \rangle (= V_\infty)$ と g の関係。 V_n の標準偏差は誤差棒で示されている。

2.2 水平はばたきモデル

対称はばたきモデルはもともと蝶のモデルとして解析されてきたモデルである。このモデルにおいて空中停止飛行は分岐枝の端点に対応するという意味で特異な状態であることが分かった。このような特異性が他のモデルで観測されるかどうかを調べてみよう。

ここで考える2次元水平はばたきモデルは図2(a)に示されている[5]。このモデルでは翼は1枚で、以下の関数で与えられるはばたき運動を行う。

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad \alpha(t) = B \sin(\omega t) + \alpha_0. \quad (2)$$

ここで $X = (x, y)$ は翼の中心を、 α は迎角を、 ω は角周波数を、 A, B, α_0 は定数を表す。このような水平はばたき運動は多くの昆虫において空中停止飛行時に見られる[2, 1]。また、振動中心(=重心 G) にすべての質量が集中すると考え、その鉛直方向の運動だけを考える。周囲の流体は粘性流体を仮定し、鉛直方向の位置 $y(t)$ は対称はばたきモデルの場合と同様に運動方程式(1)により与えられる。

周囲の流体運動はレイノルズ数は $Re = 157$ であり、昆虫に典型的に見られるレイノルズ数の範囲 $10^2 - 10^4$ に入っている。流体運動はCIP法[15]により解いた。

図2(b)には一周期平均速度 V_n の平均(= V_∞) と V_n の標準偏差が g に対して描かれている。2本の枝が初期条件の違いに依存して存在する。上の枝は渦構造が秩序だっており定常飛行(重心速度が時間周期的)に対応する。この枝では $\langle V_n \rangle$ は g の増加とともに減り、ある臨界点 $P_c = (g_c, V_c)$ で無くなっている。 $0 < g < g_c$ の領域では、このモデルは重力に逆らって上昇飛行を行っている。 P_c における速度は小さいのでここでの飛行は空中停止と見なせる。 g が g_c を超えるとモデルは重力を支えられなくなり、遷移過程を経て下の枝で表される「さまよい飛行」へと収束する。

さまよい飛行は V_n の揺らぎが大きいという意味で上の枝で記述される状態とは異なるが、2本の枝が共存する領域があり、上の枝の臨界点が空中停止に対応するという意味で対称はばたきモデルと似た性質を持っている。ただしこれらの状態の渦パターンは全く異なる。詳しくは文献[5]を参照されたい。

対称はばたきモデルと、水平はばたきモデルではモデルの詳細は全く異なるが、パラメータ変化に対する分岐構造の定性的な部分は普遍性があるようである。

3 遠方場に注目した理論解析

これまで見てきたように、重力下での水平はばたき飛行にはある普遍性があるらしいことが分かった。特に空中停止飛行については、分岐枝の端点に位置し、なんらかの特異性が予想される。ここでは遠方場に注目した理論解析を概観する。詳細については文献[6]を参照されたい。

はばたき飛行の理論を大きく捉えると、流体中で運動する物体に働く力を求めるという問題になる。これは流体力学の基本的な問題である。2次元流れの一般的な場合(非圧縮、非定常、渦度ありの場合)、今井[16]により複素形式で公式が与えられており、物体を含む任意の閉曲線上での積分で物体に働く力が計算できる。ここでは今井による公式を周期運動する物体に適用することで、水平はばたき飛行時に掛かる力について議論する。

無限に広がる空間内の2次元非圧縮流体を考え、無限遠での流速が x 軸に平行に U であるとする。この流体の中を物体 B が任意の速度で周期 T の時間周期的に運動し、それにより同じ周期をもつ時間周期的な流れが発生するものとする。流体は Navier-Stokes 方程式

に従うものとし、粘性はゼロ以上で有限であるとする。このとき、 B に働く力の時間平均を $\langle \mathbf{F} \rangle = (\langle F_x \rangle, \langle F_y \rangle)$ と書くと、 $\langle \mathbf{F} \rangle$ は応力テンソルの B 上での積分で記述される。まず $\langle \mathbf{F} \rangle$ を流れの漸近的性質を用いて記述できることを示そう。

物体から遠く離れた場所での速度場について考える。物体近くに原点 O をとり、無限遠で一様流 $(U, 0)$ に漸近するとする。流れ場の一様流からのずれを $\mathbf{v}$ 、そのずれに対する流れ関数を ψ と書くと、 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ を定める方程式は、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + 2\nu k \frac{\partial \omega}{\partial x} - \nu \Delta \omega = \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)}, \quad (3)$$

となる ($k = \frac{U}{2\nu}$)。遠方では $|\mathbf{v}| \ll U$ が成り立つので ψ と ω が小さいと仮定すると非線形項である右辺が無視できて Oseen 方程式となる。その解は $\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \omega_{m,n}(\mathbf{x}, t)$, $\omega_{m,n}(\mathbf{x}, t) = C_{m,n} e^{i\Omega_n t} e^{kx} e^{im\theta} H_m^{(1)}(z)$, ($C_{m,n}$ は定数) と書ける。ここで $H_m^{(1)}(z)$ は第一種ハンケル関数である。

ハンケル関数の漸近形から、遠方では $n = 0$ の場合、放物線 $x = \frac{k}{2C} y^2 - \frac{C}{2k}$ 内部、 $n \neq 0$ の場合、楕円 $k^2(p_n^2 - 1) \left\{ x - \frac{C}{k(p_n^2 - 1)} \right\}^2 + k^2 p_n^2 y^2 = \frac{p_n^2}{p_n^2 - 1} C^2$ の内部でのみ $\omega_{m,n}$ が大きな値を取り、その外部では領域から離れるにつれて指数関数より早く減衰することが分かる。 $n = 0$ は流れの時間平均成分に対応し、この成分は定常 Oseen 方程式の wake と一致する [11]。一方、 $n > 0$ の場合は非定常成分に対応し、領域が有界であり、 $\omega_{m,n}$ がしめる領域 $A_n (n \geq 1)$ 間での包含関係は、 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, のようになる。

以上を踏まえて、今井 [16] の導いた公式を周期運動する物体に対して適用すること以下の結果を得る：

$$\langle F \rangle = -\frac{i}{2}\rho \oint_C \langle \overline{W} \rangle^2 d\bar{z} - 2\mu \oint_C z \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial z} dz + i\rho \oint_C \langle \omega \rangle z d\Psi. \quad (4)$$

(C の半径は十分大きい)。この式で周期運動する物体に働く力が求められる。この公式 (4) は定常流に関する公式と同じ形をしており、更に定常流中に置かれた物体周りの流れは今井 [11] により既に研究されていて、物体に掛かる力が

$$\langle F \rangle = \rho U (\langle m \rangle + i\langle \Gamma \rangle), \quad (5)$$

と表される。結局周期流であっても、平均の力を求めるには、定常流成分を用いるだけでよいことが分かった。しかも公式に表れる量 $\langle m \rangle, \langle \Gamma \rangle$ は渦の詳細な構造にはよらず、漸近場だけで記述できる。

応用例として昆虫の飛翔を考える。昆虫が周期的にはばたき運動を行い、その結果平均してある一方向に進んでいる場合を考える。昆虫の平均進行速度を $\langle V \rangle$ とすると時間平均した力の x 成分 $\langle X \rangle$ は式 (5) により $X = -\rho \langle V \rangle \langle m \rangle$ となる。ここでは $\langle V \rangle \rightarrow 0$ の極限で X がどのような挙動を示すかを考える。そのために必要な $\langle m \rangle$ を見積もるために流れの漸近挙動を Oseen 近似により調べることにする。定常 Oseen 方程式の一般解を用い、物体を含む大きな円内からのフラックスがゼロであり、しかも流速が有限であるという条件を課すと、 $\langle m \rangle = \frac{D_0}{k \ln(kr_0)} + O(kr_0)$, (D_0 はある定数) となり、

$$\langle X \rangle = \frac{\rho\nu}{2} k \langle m \rangle = \frac{D'_0}{\ln(kr_0)} + O(kr_0). \quad (6)$$

(D'_0 は kr_0 と独立な定数) となることがわかり、 $\langle V \rangle \rightarrow 0$ の極限で

$$\lim_{\langle V \rangle \rightarrow 0} \langle X \rangle = \lim_{kr_0 \rightarrow 0} \langle X \rangle = 0. \quad (7)$$

となる。はばたき飛行を行う昆虫は、はばたき方の詳細に寄らず空中停止の極限で生成する力がゼロとなり、有限重力下で飛べなくなる。実際の昆虫は空中停止飛行を実現している。この違いの原因については文献 [6] で詳しく議論されている。

昆虫の飛翔などの解析においてはこれまで翼の運動の詳細や渦構造の詳細、あるいはそれらの動力学の解析が行われてきたが、この結果によれば力を決めるのは遠方場の性質のみである。今後渦構造と遠方場の関係を調べることで予測や評価が可能になるものと思われる。動力学に関する応用については文献 [18] に述べられている。数値モデルにおける渦と翼の相互作用についての詳しい解説は文献 [17] にあるのでご興味のあるかたは参照されたい。

本研究の一部は科研費 (19740228, 20033009) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] R. Dudley. *The Biomechanics of Insect Flight*. Princeton University Press, Princeton, 2000.
- [2] C. P. Ellington. The aerodynamics of hovering insect flight. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, 305:1–180, 1984.
- [3] C. P. Ellington, C. Berg, A. P. Willmott, and A. L. R. Thomas. Leading-edge vortices in insect flight. *Nature*, 384:626–630, 1996.
- [4] M. Iima. Stability and selection of flight mechanisms in insects’ free-flight. In *ISAB-MEC 2006*, 2006.
- [5] M. Iima. A two-dimensional aerodynamic model of freely flying insects. *J. Theor. Biol.*, 247:657–671, 2007.
- [6] M. Iima. A paradox of hovering insect in two-dimensional space. *J. Fluid. Mech.*, 617:207–229, 2008.
- [7] M. Iima and Y. Nishiura. Collision of localized traveling-wave convection cells in binary fluid. In *GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications*, volume 22, pages 289–303, 2005.
- [8] M. Iima and T. Yanagita. An analysis of a symmetric flapping model: A symmetry-breaking mechanism and its universality. *Theor. Appl. Mech.*, 50:237–245, 2001.
- [9] M. Iima and T. Yanagita. Is a two-dimensional butterfly able to fly by symmetric flapping? *J. Phys. Soc. Japan*, 70(1):5–8, 2001.
- [10] M. Iima and T. Yanagita. Asymmetric motion of a two-dimensional symmetric flapping model. *Fluid Dyn. Res.*, 36:407–425, 2005.
- [11] I. Imai. On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to filon’s paradox. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 208:487–516, 1951.
- [12] J. Katz and A. Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.

- [13] F.-O. Lehmann. The mechanisms of lift enhancement in insect flight. *Naturwissenschaften*, 91:101–122, 2004.
- [14] Z. J. Wang. Dissecting insect flight. *Ann. Rev. Fluid Mech.* , 37:183–210, 2005.
- [15] T. Yabe, Y. Ogata, K. Takizawa, T. Kawai, A. Segawa, and K. Sakurai. The next generation cip as a conservative semi-lagrangian solver for solid, liquid and gas. *J. Comp. Appl. Math.* , 149:267–277, 2002.
- [16] 今井 功. 仮想質量と仮想角運動量 – 渦運動への応用. In **第 29 回日本物理学会予稿**, 1974.
- [17] 飯間 信. はばたき飛翔の流体力学. **日本物理学会誌**, 63:629–633, 2008.
- [18] 飯間 信. 蝶の飛翔に潜む数理構造. **日本応用数理学会誌**, 18:39–51, 2008.

主固有値最小化問題と個体群ダイナミクス

柳田英二（東北大学）

本稿では固有値問題

$$(EVP) \quad \begin{cases} \Delta\phi + \lambda m(x)\phi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

について論じる．ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域， $m(x)$ は不定符号の重みである．固有値問題 (EVP) が正の固有関数 $\phi \in H^1(\Omega)$ を持つような λ を主固有値という．明らかに $\lambda = 0$ は固有関数 $\phi \equiv 1$ に対応する主固有値であるが，ここでは正の主固有値について論ずる．

この固有値問題の生物学的な背景について述べよう．まずロジスティック方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = \lambda u(t)\{m - u(t)\}, \\ u(0) = a > 0. \end{cases}$$

について考える．ここで， t は時間， $u(t)$ は生物種の個体数， $\lambda > 0$ は淘汰の強さを表すパラメータ， m は内的増殖率と呼ばれる定数である．簡単に分かるが， $m > 0$ のとき解は $u(t) \rightarrow m$ ($t \rightarrow \infty$) を満たし，従ってこの生物個体群は生存可能である．ところが $m \leq 0$ とすると $u(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となり，この生物個体群は絶滅する．

次に空間変数 x を導入し，拡散を伴うロジスティックモデル，すなわち Fisher-KPP 方程式について考えてみよう．

$$(F) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u = \Delta u + \lambda u\{m(x) - u\} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u(x, 0) > 0, & \text{in } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

この場合， Ω は棲息領域を表し， $u(x, t)$ は個体密度を表す． $m(x)$ が空間変数 x によって符号変化するとき， $m(x) > 0$ となるところは生物種にとって良い領域， $m(x) < 0$ は悪い領域とみなすことができる．

それでは， $m(x)$ が符号変化するとき，この生物個体群は生き残れるであろうか．この問いに答えるには，自明な定常解 $u \equiv 0$ の安定性を調べればよい．つまり，

$u = 0$ は不安定 $\iff$ 解は自明解から離れる $\iff$ 生存

$u = 0$ は安定 $\iff$ 解は自明解に収束する $\iff$ 絶滅

が成り立つ．一方，自明解の安定性は線形化固有値問題

$$(LEP) \quad \begin{cases} \mu\Phi = \Delta\Phi + \lambda m(x)\Phi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

を調べればよく， μ_0 を最大固有値とすると，

$$\mu_0 > 0 \iff \text{不安定} \iff \text{生存}$$

$$\mu_0 < 0 \iff \text{安定} \iff \text{絶滅}$$

となる．固有値解析より，(LEP) の最大固有値について以下のことが示される．

Case I: $m(x) < 0$ on Ω のとき．

すべての $\lambda > 0$ について $\mu_0 < 0$ 絶滅

Case II: $\int_{\Omega} m(x) dx > 0$ のとき．

すべての $\lambda > 0$ について $\mu_0 > 0$ 生存

Case III: $m(x)$ は符号変化し $\int_{\Omega} m(x) dx < 0$ を満たすとき．

(EVP) の正の主固有値 $\lambda_p > 0$ に対して以下が成立する：

(i) $0 < \lambda < \lambda_p$ ならば $\mu_0 < 0$ 絶滅

(ii) $\lambda > \lambda_p$ ならば $\mu_0 > 0$ 生存

いま，絶滅危惧種に対し，何らかの方法により $m(x)$ を操作し，その生物種を保護したいとしよう．もし正の主固有値 λ_p が小さければ，その生物種が生き延びるチャンスが大きくなる．限られたリソースのもとで λ_p を最小化するにはどうしたらよいか？これが主固有値の最小化問題である．これは数学的には以下のように定式化できる．固有値問題 (EVP) に対し，以下の条件を課す．

(A1) $\Omega_+ := \{x \in \Omega : m(x) > 0\}$ は正の測度を持つ．

(A2) $\int_{\Omega} m(x) dx < 0$.

(A3) 与えられた定数 $\kappa > 0$ に対し， Ω 上で $-1 \leq m(x) \leq \kappa$ a.e.

(A4) 与えられた定数 $0 < \mu < 1$ に対し， $\int_{\Omega} m(x) dx \leq (-1 + \mu)|\Omega|$.

これらの条件を満たす $m(x)$ の集合を $\mathcal{M}$ と表すことにする．(A3) において， $m(x) = -1$ は保護しないときの増殖率， $m(x) = \kappa$ は最適な環境下での増殖率に対応する．(A) において μ はリソースの総量を表しており， $\mu < 1$ は十分なリソースがないことを表している．

(A1), (A2) のもとで, Brown-Lin [1] と Senn-Hess [7] は (EVP) には正の主固有値 $\lambda_p(m)$ がただ一つ存在することを示した. また Saut-Scheurer [6] は

$$\lambda_{inf} := \inf_{m \in \mathcal{M}} \lambda_p(m) > 0.$$

を示した. Cantrell-Cosner [2] は, 「すべての $m(x) \in \mathcal{M}$ の中で $\lambda_p(m)$ を最小にする $m(x)$ はどれか」という問題を提起し, これに対して簡単な場合について考察したが, 十分なものではなかった. 以下ではこの問題に対し, 一般的な性質を導くとともに特別な場合に具体的に minimizer を特定する.

まず, 主固有値 $\lambda_p(m)$ の minimizer について, その存在と bang-bang 性に関する以下の結果が成立する.

定理 1. ([5]) $\lambda_p(m)$ の下限 λ_{inf} はある $m \in \mathcal{M}$ によって達成され, この m はある可測集合 $E \subset \Omega$ を用いて

$$m(x) = \begin{cases} \kappa & \text{for } x \in E, \\ -1 & \text{for } x \notin E, \end{cases} \quad a.e.$$

と表される.

証明. まず, 変分原理により, (EVP) の正の主固有値はレイリー商を用いて次のように特徴づけられる.

$$\lambda_p(m) = \inf_{U \in \mathcal{S}(m)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla U|^2}{\int_{\Omega} m(x) U^2}.$$

ただし,

$$\mathcal{S}(m) := \left\{ U \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} m(x) U^2 > 0 \right\}$$

である. さらに, $\lambda_p(m)$ は単純固有値で, レイリー商の下限は対応する固有関数によってのみ達成され, また固有関数の符号は変化しない. いま, $m_1(x)$ が bang-bang 型でないとすると, リソースを固有関数 φ の小さいところから大きいところへうつしたものを $m_2(x)$ とすれば

$$\lambda_p(m_1) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2}{\int_{\Omega} m_1(x) \phi_1^2} > \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2}{\int_{\Omega} m_2(x) \phi_1^2} \geq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_2|^2}{\int_{\Omega} m_2(x) \phi_2^2} = \lambda_p(m_2)$$

が成り立つ. したがって, bang-bang 型でない $m(x)$ は minimizer とはならない. (minimizer の存在については省略.) $\square$

定理 1 より, global minimizer をを見つけるためには集合 $E \subset \Omega$ を決定すればよいことがわかる. まず, もっとも簡単な場合として, 1次元問題

$$(EVP1) \quad \begin{cases} \phi_{xx} + \lambda m(x) \phi = 0, & x \in (0, 1), \\ \phi_x(0) = \phi_x(1) = 0, \end{cases}$$

について考えよう．この場合，制約条件は

$$-1 \leq m(x) \leq \kappa, \quad -1 < \int_0^1 m(x)dx \leq -1 + \mu < 0$$

と表される．

定理 2. ([5]) 固有値問題 (EVP1) において， $\lambda_p(m) = \lambda_{inf}$ が成り立つのは

$$m(x) = \begin{cases} \kappa & \text{for } x \in (0, \alpha), \\ -1 & \text{for } x \in (\alpha, 1), \end{cases} \quad a.e.$$

あるいは

$$m(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \in (0, 1 - \alpha), \\ \kappa & \text{for } x \in (1 - \alpha, 1), \end{cases} \quad a.e.$$

のときで，またそのときに限る．ただし， $0 < \alpha < 1$ は

$$\int_0^1 m(x)dx = -1 + \mu.$$

となるように選ばれた数である．

証明．重み $m_1(x)$ と，それに対応する固有関数 $\phi_1(x)$ が与えられたとき，これらの spatial rearrangement を

$$m_2(\xi(s)) = s, \quad \xi(s) = \text{measure}\{x : m_1(x) > s\},$$

$$U(\eta(s)) = s, \quad \eta(s) = \text{measure}\{x : \phi_1(x) > s\},$$

で定義する．すると，

$$|\nabla U| \leq |\nabla \phi_1|, \quad \int_{\Omega} m_1(x) \phi_1^2 \leq \int_{\Omega} m_2(x) U^2$$

となり，従って

$$\lambda_p(m_1) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2}{\int_{\Omega} m_1(x) \phi_1^2} > \frac{\int_{\Omega} |\nabla U|^2}{\int_{\Omega} m_2(x) U^2} > \lambda_p(m_2)$$

が成立する． □

定理 2 より，Fisher-KPP モデル (F) においては，区間の片端に正の重みをおくとき，生物種が生き残るチャンスが最大になる．

系 1. $\Omega = (0, 1)$ とする．もし $\lambda \leq \lambda_{inf}$ ならば，どのような $m \in \mathcal{M}$ に対しても，Fisher-KPP モデル (F) の自明解は大域的に安定である．

1次元問題を一般化し，細い領域の極限方程式である

$$(EVP2) \quad \begin{cases} \frac{1}{a(x)} \{a(x)\phi_x\}_x + \lambda m(x)\phi = 0, & x \in (0, 1), \\ \phi_x(0) = \phi_x(1) = 0, \end{cases}$$

について考える．ここで $a(x)$ は領域の幅に対応する正の滑らかな関数で，規格化条件

$$\int_0^1 a(x) dx = 1$$

および

$$-1 \leq m(x) \leq \kappa, \quad -1 < \int_0^1 m(x)a(x)dx \leq -1 + \mu < 0.$$

を満たすものとする．

定理 3. ([4]) 固有値問題 (EVP2) に対し，

$$m(x) = \begin{cases} \kappa & \text{for } x \in (0, \alpha), \\ -1 & \text{for } x \in (\alpha, 1), \end{cases} \quad a.e.$$

および

$$m(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \in (0, 1 - \beta), \\ \kappa & \text{for } x \in (1 - \beta, 1), \end{cases} \quad a.e.$$

はいずれも local minimizer である．ただし， $0 < \alpha, \beta < 1$ は

$$\int_0^1 m(x)a(x)dx = -1 + \mu.$$

となるように選ばれた数である．

証明は正の領域を少し摂動したとき，主固有値が少し大きくなることをレイリー商を用いて示す．ただし，(EVP2) に対する変分原理は

$$\lambda_p(m) = \inf_{U \in \mathcal{S}(m)} \frac{\int_0^1 a(x) |\nabla U|^2}{\int_0^1 a(x)m(x)U^2},$$

ただし

$$\mathcal{S}(m) := \left\{ U \in H^1(\Omega) : \int_0^1 a(x)m(x)U^2 > 0 \right\}$$

となることに注意する．なお，この結果は他の local minimizer が存在を否定するものではない．実際，他の local minimizer は単調な $a(x)$ を用いても構成可能である．

定理 3 で得られた local minimizer のいずれかが global minimizer になるための一つの十分条件として，領域があまり深くくびれていないことがあげられる．これは次の定理のような形でまとめられる．

定理 4. ([4]) 固有値問題 (EVP2) に対し, ある定数 $R = R(\kappa, \mu) > 1$ が存在して,

$$\frac{\max a(x)}{\min a(x)} < R$$

ならば

$$m(x) = \begin{cases} \kappa & \text{for } x \in (0, \alpha), \\ -1 & \text{for } x \in (\alpha, 1), \end{cases} \quad a.e.$$

あるいは

$$m(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \in (0, 1 - \beta), \\ \kappa & \text{for } x \in (1 - \beta, 1), \end{cases} \quad a.e.$$

が global minimizer となる.

R の値は重要であるが, その最良の値はいまのところ不明である.

次に, Ω を長方形領域

$$\Omega = \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, a)\} \subset \mathbb{R}^2$$

とし, $m(x, y)$ が帯状の場合

$$E = (0, c) \times (0, a)$$

について考える.

定理 5. ([3]) 他のパラメータを固定したとき, ある臨界値 $c^* > 0$ が存在して, $c < c^*$ ならば帯状パターンは local minimizer とはならない.

証明. 帯状の正の領域 E を小さなパラメータ $\varepsilon > 0$ を用いて

$$E_\varepsilon = (0, c + \varepsilon \cos(j\pi/a)) \times (0, a), \quad j = 1, 2, \dots$$

と摂動する. またこれに合わせて, 主固有値 λ_ε と対応する固有関数 φ_ε を ε について

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2 + o(\varepsilon^2)$$

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon^2 \varphi_2 + o(\varepsilon^2)$$

と展開する. これらを方程式に代入して展開の各項の決定する. 特に λ_2 の符号について

$$c < {}^\exists c^* \iff \lambda_2 < 0 \implies \text{local minimizer ではない}$$

が示される. この形式的な議論にもとづき, レイリー商を用いることによって厳密な証明が得られる. $\square$

なお, 形式的な議論から $c > c^*$ のとき帯状パターンは local minimizer であることが示唆されるが, 厳密な証明は難しい.

定理 5 はリソースが十分でないとき、帯状パターンは local minimizer とはならないことを示している。射影勾配法を用いた数値計算を行うと、この場合は他の辺に接する帯状パターンあるいは角のあたりにできるディスクパターンが global minimizer の候補となる。射影勾配法とは、最初に適当に推定した $m(x)$ から始めて、レイリー商の勾配方向に少しずつ修正し、極小状態に落ち着くまで繰り返す方法である。ただし、単に勾配方向に修正すると制約条件を満たさなくなるので、制約条件を満たすように M に射影するとともに、bang-bang 性を保存するように補正を加える。数値計算の結果は文献 [3] を参照して頂きたい。

定理 6. (Kao-Lou-Y, 2008) 長方形領域の場合、global minimizer および対応する固有関数は x 方向と y 方向について単調である。

証明は、spatial rearrangement による議論が長方形領域についても適用できることを示せばよい。つまり、 x 方向の rearrangement によって主固有値は小さくでき、 y 方向についても同様である。

一般領域における主固有値の最小化はきわめて難しい問題となる。特異な状況を仮定すれば minimizer を特定できるかもしれないが、たとえ特定できなくともその性質が前もって明らかにしたい。たとえば「もし Ω が凸ならば、正の領域 E と負の領域 Ω/E は単連結である」が成り立つのではないかと予想とされているが、未解決である。

参考文献

- [1] K. J. Brown and S. S. Lin, *On the existence of positive eigenvalue problem with indefinite weight function*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 112–120.
- [2] R. S. Cantrell and C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in a disrupted environments*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **112A** (1989), 293–318.
- [3] C.-Y. Kao, Y. Lou and E. Yanagida, *Principal eigenvalue for an elliptic problem with indefinite weight on cylindrical domains*, Mathematical Biosciences and Engineering **5** (2008), 315–335.
- [4] C.-Y. Kao, Y. Lou and E. Yanagida, work in progress.
- [5] Y. Lou and E. Yanagida, *Minimization of the principal eigenvalue for an elliptic boundary value problem with indefinite weight and applications to population dynamics*, Japan J. Indust. Appl. Math. **23** (2006), 275–292.
- [6] J. C. Saut and B. Scheurer, *Remarks on a nonlinear equation arising in population genetics*, Comm. Part. Diff. Eq. **23** (1978), pp. 907–931.

- [7] S. Senn and P. Hess, On positive solutions of a linear elliptic boundary value problem with Neumann boundary conditions, *Math. Ann.* **258** (1982), pp. 459-470.

研究集会「PDEs and Phenomena in Miyazaki 2003」

日時： 2003 年 10 月 31 日（金）～ 11 月 2 日（日）

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2003.html>

プログラム

10 月 31 日（金）

午後の部

14:30-15:20 **黒木場正城**（福岡大理）

「Maximal attractor and inertial sets for Eguchi-Oki-Matsumura equation」

15:40-16:30 **三沢正史**（熊大理）

「定平均曲率曲面の時間発展に対する初期値境界値問題」

16:40-17:30 **村川秀樹・中木達幸**（九大数理）

「ある移動境界問題の特異極限を用いた数値解法」

11 月 1 日（土）

午前の部

10:00-10:50 **竹内慎吾**（工学院大）

「空間非一様な飽和値をもつ退化楕円型方程式の解の形状」

11:00-11:50 **石毛和弘**（名大多元数理）

「Neumann 条件下における semilinear heat equation の爆発問題について」

午後の部

13:30-14:20 **石渡通徳**（早大理工）

「Asymptotic behavior of some global solutions for
nonlinear parabolic problems with critical Sobolev nonlinearity」

14:30-15:20 **水町徹**（横浜市大理）

「Instability of nonradial bound states for 2D nonlinear Schrödinger equation」

15:40-16:30 **飯島健太郎**（茨城大理工）

「Laplace 方程式の Cauchy 問題
および逆向き熱伝導問題の任意多点差分法を用いた数値解法」

16:40-17:30 **櫻井建成**（宇部高専）

「反応拡散モデルの情報処理への応用」

11 月 2 日（日）

午前の部

10:00-10:50 **坂上貴之**（北大理）

「極渦のある球面での渦層の運動」

11:00-11:50 **長山雅晴**（京大数研）

「反応拡散場での粒子運動の数値モデルについて」

12:00-12:50 **大崎浩一**（宇部高専）

「反応・拡散・移流方程式系に対するアトラクター」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉、壁谷／若手 B：矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、矢崎成俊（宮崎大学工学部）

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail：tsujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381 / 0985-58-7288（事務室） & FAX：0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2004 (略称：PPM2004)」

日時： 2004 年 11 月 19 日（金）～ 11 月 21 日（日）

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2004.html>

プログラム

11 月 19 日（金）

午後の部

14:30-15:20 **満島 正浩**（東京大学大学院・数理科学研究科）

「反応拡散方程式系に現れる時間周期解」

15:40-16:30 **丸野 健一**（九州大学大学院・数理学研究院）

「いろいろな物理系における非線形局在モードについて」

16:40-17:30 **和田 健志**（熊本大学・工学部）

「Limit problem for the Maxwell-Schrödinger system」

11 月 20 日（土）

午前の部

10:00-10:50 **笠井 博則**（福島大学・教育学部）

「実演!! 金平糖の実験とその生成過程のモデリングに向けて」

11:00-11:50 **大江 貴司**（岡山理科大学・総合情報学部）・**大中 幸三郎**（大阪大学・工学部）

「Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用と数値積分への応用」

午後の部

13:30-14:20 **平岡 裕章** (大阪大学大学院・基礎工学研究科)

「無限次元力学系における位相計算理論」

14:30-15:20 **谷内 靖** (信州大学・理学部)

「On the solvability of the Boussinesq equations with non-decaying initial data」

15:40-16:30 **菱田 俊明** (新潟大学・工学部)

「 L^q estimates for the Stokes equations around a rotating body」

16:40-17:30 **小池 茂昭** (埼玉大学・理学部)

「ペロンの方法 -revisited-」

11月21日(日)

午前の部

10:00-10:50 **高坂 良史** (室蘭工業大学・工学部)

「表面拡散流方程式による3相境界運動の定常解の線形安定性について」

11:00-11:50 **井古田 亮** (九州大学大学院・数理学研究院)

「不変領域を持つ反応拡散系における擾乱の伝播速度の有界性について」

12:00-12:50 **梶木屋 龍治** (長崎総合科学大学・工学部)

「Symmetric mountain pass lemma and sublinear elliptic equations」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金(基盤C(2):辻川、仙葉、壁谷/若手B:北、矢崎)

課題番号	研究代表者	課題名
15540128	辻川 亨	移流項を含む反応拡散方程式による集合パターンの漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
15540211	壁谷喜継	非線形楕円型微分方程式における大域的分岐・不完全分岐の解明
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
15740073	矢崎成俊	界面運動、結晶成長モデル、及び自由境界問題の数理解析

の援助を受けています。

世話人: 辻川 亨、仙葉 隆、壁谷喜継、北 直泰、矢崎成俊 (宮崎大学)

連絡先: 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒889-2192 宮崎市学園木花台西1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail: tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL: 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX: 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005 (略称：PPM2005)」

日時： 2005 年 11 月 18 日（金）～ 11 月 19 日（土）

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内： <http://www.phys.miyazaki-u.ac.jp/math-l/shige/ppm/ppm2005.html>

プログラム

11 月 18 日（金）

午後の部

14:30-15:20 **中原 明生**（日本大学）

「ペーストへの記憶の刷り込みと乾燥破壊の制御」

15:40-16:30 **中根 和昭**（大阪電気通信大学）

「剥離現象に対するモデリングとその数理解析」

16:40-17:30 **野々村 真規子**（広島大学）

「ソフトマテリアルにみられる秩序構造について」

11 月 19 日（土）

午前の部

10:00-10:50 **友枝 謙二**（大阪工業大学）

「吸収と拡散の相互作用による浸透領域の分離、融合、再分離現象について」

11:00-11:50 **中島 主恵**（東京海洋大学）

「競争係数無限大の競争系の界面の形成について」

午後の部

13:30-14:20 **宮本 安人**（北海道大学）

「2次元円盤領域上の活性・抑制系の定常解が
不安定になるための一般的な判定法について」

14:30-15:20 **小林 孝行**（佐賀大学）

「Navier-Stokes-Poisson 方程式の弱解について」

15:40-16:30 **宮崎 倫子**（静岡大学）

「Delayed Feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について」

16:40-17:30 **愛木 豊彦**（岐阜大学）

「バネの方程式と自由境界問題」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉／若手 B：北、矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関する漸近解析
15540176	仙葉 隆	単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動と爆発点に関する研究
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、北 直泰、矢崎成俊（宮崎大学）

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2006 (略称：PPM2006)」

日時： 2006 年 11 月 17 日（金）～ 11 月 18 日（土）

会場： 宮崎大学工学部総合研究棟 2 階プレゼンテーション室 (D204)

案内： <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~yazaki/research/ppm/ppm2006.html>

プログラム

11 月 17 日（金）

午後の部

14:30-15:20 **内藤 雄基**（神戸大学）

「Sobolev 臨界指数放物型方程式の解の爆発」

15:40-16:30 **野原 勉**（武蔵工業大学）・**有本 彰雄**（武蔵工業大学）

「高次摂動項を持った非線形 Schrödinger 方程式の定性的・定量的解析」

16:40-17:30 **宮崎 倫子**（静岡大学）

「常微分方程式の解の漸近挙動における時間遅れの影響について」

11 月 18 日（土）

午前の部

10:00-10:50 **高橋 太**（大阪市立大学）

「 p -調和関数の特異集合の p -容量は消失する」

11:00-11:50 **関口 昌由**（木更津工業高等専門学校）

「三体問題の近況報告」

午後の部

13:30-14:20 **上山 大信** (明治大学)

「ある化学反応沈澱系におけるパターン形成：
モデリングおよびシミュレーション」

14:30-15:20 **佐藤 友彦** (大阪大学)

「2次元有界領域における平均場方程式の解の漸近的非退化性」

15:40-16:30 **斎藤 宣一** (富山大学)

「走化性放物型系に対する有限要素近似」

16:40-17:30 **福本 康秀** (九州大学)

「Kelvin-Benjamin の変分原理と渦輪の運動速度」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、仙葉／若手 B：大塚、北、矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関わる漸近解析
18540189	仙葉 隆	高次元領域における走化性方程式系の爆発解の挙動に関する研究
16740103	大塚浩史	非線形偏微分方程式の双対構造と補償されたコンパクト性
16740079	北 直泰	非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題における解の漸近挙動
17740063	矢崎成俊	界面運動、生物モデルの数理解析、及び泡の運動、結晶成長のモデル構築

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨、仙葉 隆、大塚浩史、北 直泰、矢崎成俊（宮崎大学）

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail：tujukawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381 ／ 0985-58-7288（事務室） & FAX：0985-58-7289

研究集会「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2007 (略称：PPM2007)」

日時：2007年11月16日（金）～11月17日（土）

会場：宮崎大学工学部総合研究棟2階プレゼンテーション室(D204)

案内：<http://www.miyazaki-u.ac.jp/~ohtsuka/research/ppm/ppm2007.html>

プログラム

11月16日(金)

14:30-15:20 **渡辺 雅二** (岡山大学大学院環境学研究科)

河合 富佐子 (岡山大学資源生物科学研究所)

「ポリマー生分解に関するモデルと逆問題および数値シミュレーションについて」

15:40-16:30 **柴山 充瑠** (京都大学数理解析研究所)

「直線3体問題の記号化と Schubart 軌道について」

16:40-17:30 **柴田 徹太郎** (広島大学大学院工学研究科)

「非線形固有値問題の解の漸近挙動」

19:00～ 懇親会

「海鮮市場 木綿屋」(宮崎市橘通西2丁目5番6号 0985-29-1692) にて

11月17日(土)

9:40-10:30 **渡辺 道之**（東京理科大学理工学部）

「平面上の複素ポテンシャルの再構成について」

10:40-11:30 **滝本 和広**（広島大学大学院理学研究科）

「完全非線形偏微分方程式の解の等高面の除去可能性について」

11:40-12:30 **櫻井 建成**（千葉大学理学部）

「大腸菌のパターン形成」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C(2)：辻川、大塚）

課題番号	研究代表者	課題名
17540125	辻川 亨	反応拡散方程式の縮約系とそれに関わる漸近解析
19540222	大塚浩史	リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究

の援助を受けています。

世話人：辻川 亨、北 直泰、矢崎成俊、大塚浩史、（宮崎大学）

連絡先：辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail：tujukawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381 / 0985-58-7288（事務室） & FAX：0985-58-7289