複素解析学的手法による Hele-Shaw 流の漸近挙動

小野寺 有紹　(東北大学大学院理学研究科)

本講演では, 複数の点から非圧縮粘性流体を注入したときに現れる Hele-Shaw 流に対し, 複素解析学的手法を用いて, 時間が十分経過した後の界面の形状について考察する.

Hele-Shaw 流とは, 間隔の狭い 2 枚の平行板の間に非圧縮性粘性流体を注入していくときに現れる流れであり, その流体の界面は時間に依存して変化する. これは以下のような数学的問題として定式化される. 平行板の間隔は十分小さいとし, 流体の流れは 2 次元であるとみなす. $\Omega(0) \subset \mathbb{R}^2$ を初期時刻 $t = 0$ において流体が占める領域とし, 注入点 $\mathbf{c}_j \in \Omega(0), j = 1, 2, \ldots, l$ からそれぞれ単位時間あたりの注入量 $\alpha_j > 0, j = 1, 2, \ldots, l$ で流体を注入していく. 時刻 $t > 0$ において流体が占める領域を $\Omega(t)$ とするとき, その境界 $\partial\Omega(t)$ の各点における法線方向の速さは流体の圧力の法線微分に比例する. 一方, 時刻 $t > 0$ における流体の圧力分布は, 各注入点 $\mathbf{c}_j$ を極とする領域 $\Omega(t)$ の Green 函数 $g(\mathbf{x}; \mathbf{c}_j, \Omega(t))$ の線形結合 $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j g(\mathbf{x}; \mathbf{c}_j, \Omega(t))$ で表される. したがって, Hele-Shaw 流の問題とは

$$-\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \frac{\partial g(\mathbf{x}; \mathbf{c}_j, \Omega(t))}{\partial n_{\mathbf{x}}} \frac{\partial t}{\partial n_{\mathbf{x}}} = 1 \tag{1}$$

をみたす $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を求める問題である. ただし, $t = t(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega(0)$ に対し $\mathbf{x} \in \partial\Omega(t)$ となる時刻 t として定まる函数である.

方程式 (1) によって定式化された問題において, たとえ初期領域 $\Omega(0)$ の境界が十分に滑らかであったとしても, $\Omega(t)$ の境界の滑らかさは先験的にはわからない. そのため, 微分を含む定式化 (1) では解析が困難である. そこで, 境界の滑らかさを要求しないような別の定式化が必要となる. Sakai [1] は, (1) をみたす $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ は, $\Omega(t)$ 上で劣調和かつ 2 次元 Lebesgue 測度 m に関して可積分な函数族 $SL^1(\Omega(t))$ に対し,

$$\int_{\Omega(0)} s\,dm + t\sum_{j=1}^{l} \alpha_j s(\mathbf{c}_j) \le \int_{\Omega(t)} s\,dm \quad \bigl(s \in SL^1(\Omega(t))\bigr) \tag{2}$$

をみたすことから, Hele-Shaw 流の問題を (2) をみたす $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を求める問題としてとらえ, 求積領域の理論を適用した. この (2) をみたす領域族 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を Hele-Shaw 流の問題の弱解という.

求積領域の一般論により, $m\,(\Omega(0)) < \infty$ をみたす領域 $\Omega(0) \subset \mathbb{R}^2$ に対し, Hele-Shaw 流の弱解の存在が示される.

本講演では, 弱解 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ の $t \to \infty$ での形状に対しえられた結果を報告する. 注入点が 1 個の場合, $t \to \infty$ で界面 $\partial\Omega(t)$ は注入点を中心とする円へと漸近して

いくことが示される ([1]). では, 注入点が複数個の場合, 界面 $\partial\Omega(t)$ の漸近形は円であろうか. また, そうだとすると円の中心の位置はどこであろうか.

次の定理が示すように, $t \to \infty$ で界面 $\partial\Omega(t)$ は,

$$\mathbf{w}_l := \frac{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \mathbf{c}_k}{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k}$$

を中心とする円へと漸近することがわかる.

定理. ある $j_0 \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $\rho > 0$ に対し $\Omega(0) \subset D(\mathbf{c}_{j_0}, \rho)$ とする. ただし, $D(\mathbf{x}, r)$ は点 $\mathbf{x}$ を中心とする半径 r の開円板を表す. このとき, (2) をみたす $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ に対し, 以下の評価が成り立つ:

$$D\left(\mathbf{w}_l, \sqrt{\frac{t}{\pi}\sum_{k=1}^{l}\alpha_k} - \varepsilon_l^-(t)\right) \subset \Omega(t) \subset D\left(\mathbf{w}_l, \sqrt{\frac{t}{\pi}\sum_{k=1}^{l}\alpha_k} + \varepsilon_l^+(t)\right).$$

ここで,

$$\varepsilon_l^-(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{k=1}^{l}\alpha_k}} \left(\sum_{j=2}^{l} \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k}{\left(\sum_{k=1}^{j}\alpha_k\right)^2} |\mathbf{w}_{j-1} - \mathbf{c}_j|^2 \right) t^{-1/2} + O\left(t^{-1}\right) \tag{3}$$

$$\varepsilon_l^+(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{k=1}^{l}\alpha_k}} \left(\sum_{j=2}^{l} \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k}{\left(\sum_{k=1}^{j}\alpha_k\right)^2} |\mathbf{w}_{j-1} - \mathbf{c}_j|^2 + \frac{\rho^2}{2} \right) t^{-1/2} + O\left(t^{-1}\right) \tag{4}$$

$$(t \to \infty)$$

である. ただし, (3), (4) において, n 次の置換 σ によって添え字 j, k を $\sigma(j), \sigma(k)$ に換えても同様の評価が成り立つ.

参考文献

[1] M. Sakai, *Quadrature Domains*, Lecture Notes in Mathematics, 934, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[2] M. Sakai, Sharp estimates of the distance from a fixed point to the frontier of a Hele-Shaw flow, *Potential Analysis* **8** (1998), 277–302.

[3] H. S. Shapiro, *The Schwarz function and its generalization to higher dimensions*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 9, Wiley-Interscience, New York, 1992.