Cahn-Hilliard 方程式の定常解の大域的分岐構造と関連する話題

四ツ谷　晶二　（龍谷大学理工学部）

微分方程式の解の大域的構造を完全に調べることは最も基本的ながら難しい問題である．なぜならば，これが分かるということは，考えている微分方程式に含まれるパラメータをいかように与えても，そのパラメータ値においての，微分方程式の解の存在・非存在・一意性・多重度に関して即座に完全に解答できることを意味するからである．

過去に多くの研究があるよく知られた非線形微分方程式であっても，解の大域的構造が完全に解明されているものは，ごく少数である．下記文献 [WY2008] 〜[IKOY03] において，そこに現れる方程式に対しては，楕円関数や完全楕円積分を用いることにより，完全に解明できることを示した．すなわち，１次分岐のみならず２次以降の分岐を含めた分岐構造が完全にわかるのである．

得られた解の挙動はさらに大変興味深い．例えば，特異摂動問題の新たな解法と全く異なる視点を与える．すべての解が明示的に表示されていれば，特異摂動問題はの解表示に含まれる摂動パラメータ ε を素直に零に近づけたときの極限を調べる問題に帰着されるからである．

すべての解の表示を求めるアイデアは極めて自然な考え方で，昔の人も考えたであろうが，計算が膨大で通常はすぐに捨て去る方法である．計算の膨大さとは，複雑ではあるが単調な，微分計算・代数式の計算が主であり，見通しのない手計算では一生を費やしても不思議でない量の計算である．

ところが，現在，充実した視覚化機能をもつ数式処理ソフト Maple, Mathematica 等で気楽に楕円関数や完全楕円積分に関係した微分・代数計算でき，いろんな視点から視覚化できる状況になっている．それを使わない手はないと思い，数式処理ソフトを実験装置と検算の両方に使い，研究を行っている．

下記文献にある研究においては，解の大域的構造を決定する問題は，完全楕円積分 $K(k), E(k), \Pi(*,k), k$ からなる連立超越方程式の解の非存在定理，一意性，解の多重度を正確に決定する問題に帰着される．問題点は，しばしば，$\Pi(*,k)$ の $*$ の所に，$K(k), E(k)$ さえ入っている完全楕円積分の合成関数が現れることである．もともとの問題の難しさを同値な超越方程式に帰着した訳であるから，難しい超越方程式が出てくるのは当然ある．

この超越方程式の解析には，完全楕円積分の合成関数を微分するので，単純であるが複雑な計算が必要となる．計算結果は，微分すればするほどますます複雑になるので，いろいろと新たな工夫がいる．しんどくもあり，楽しいところである．

数段階の消去の工夫を行うことにより，しばしば，最後の最後に問題は，$K(k), E(k)$ の斉次有理式の符号を調べる問題に帰着される．

しかしながら，この符号を求める問題は易しくはなく，複雑な背理法を用いたりして，問題ごとに苦し紛れの工夫で対処してきた．

講演では,「Cahn-Hilliard 方程式の定常解の大域的分岐構造」の決定の方法を例にとりその考え方を説明し，さらに，つい最近気がついた，$K(k), E(k)$ の斉次有理式の符号を調べる問題の一般的な解法について説明したい．

参考文献

[WY2008] T.Wakasa and S.Yotsutani, *Representation formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems*, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), 745-763.

[KMY2007] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: proof by the complete elliptic integrals*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 19 (2007), 609-629.

[Y2006] S. Yotsutani (with I. Takagi and H. Takaichi): *On a shadow system to Gierer-Meinhart system with non-local term.* RIMS Kokyuroku 1475 (2006), 149-154.

[KMY2005g] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Global bifurcation structure of a one-dimensional Ginzburg-Landau model*, J. Math. Phys., 46 (2005), no. 9, 095111, 24.

[KMY2005] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *A complete bifurcation diagram of the Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions*, Commun. Pure Appl. Anal., 4 (2005), 665-682.

[MMY2005] W. Matsumoto, M. Murai and S.Yotsutani, *What have we learned on the problem: Can one hear the shape of a drum?, Phase Space Analysis of Partial Differential Euqations*, II (2005), 345-361.

[LNY2004] Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani, *On a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion. Partial differential equations and applications*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2004), 435-458.

[IKOY2003] H. Ikeda, K. Kondo, H. Okamoto and S. Yotsutani: *On the global branches of the solutions to a nonlocal boundary- value problem arising in Oseen's spiral flows*, Commun. Pure Appl. Anal., 3 (2003), 381-390.