複素解析学的手法による Hele-Shaw 流の漸近挙動

小野寺 有紹

東北大学大学院理学研究科

1 序

本報告集では, 複数の点から非圧縮性粘性流体を注入したときに現れる Hele-Shaw 流に対し, 複素解析学的手法を用いて, 時間が十分経過した後の界面の形状について考察する.

Hele-Shaw 流とは, 間隔の狭い 2 枚の平行板 (Hele-Shaw セル) の間の流体の流れをいう. 平行板の間隔が十分に狭いことから, 流体の流れは 2 次元であるとみなすことができる. 非圧縮性粘性流体を複数の点から注入していくときに現れる, 時間に依存して変化する Hele-Shaw 流の界面について考察する. これは以下のような数学的問題として定式化される. $\Omega(0) \subset \mathbb{C}$ を初期時刻 $t = 0$ において流体が占める領域とし, 注入点 $c_j \in \Omega(0)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ からそれぞれ単位時間あたりの注入量 $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ で流体を注入する. 時刻 $t > 0$ において流体が占める領域を $\Omega(t)$ とし, その境界を $\partial\Omega(t)$ で表す. ここで, 時間により変化する自由境界を表現する函数 $T = T(z)$ を導入する. これは $T(z) := \inf\{t \geq 0 \mid z \in \overline{\Omega(t)}\}$ により定義されるもので, 各点 z に対して境界 $\partial\Omega(t)$ が最初にその点に接する時間を表すものである. $p = p(z, t)$ を点 $z = x + iy \in \Omega(t)$, 時刻 $t > 0$ における流体の圧力分布とする. ただし $i = \sqrt{-1}$ とする. このとき Hele-Shaw 流の理論により, 圧力 p および函数 T は次の方程式と境界条件をみたすものと考えられる (cf. Richardson [6]):

$$-\Delta p = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \delta_{c_j} \qquad (z \in \Omega(t),\ t > 0); \tag{1.1}$$

$$p = 0 \qquad (z \in \partial\Omega(t),\ t > 0); \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -1 \qquad (z \in \partial\Omega(t),\ t > 0). \tag{1.3}$$

ただし, $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ は $\mathbb{R}^2$ 上の Laplace 作用素とし, δ_c は点 c を台にもつ Dirac 測度とする. 方程式 (1.1) および境界条件 (1.2) から, 各時刻 $t > 0$ を固定するごとに圧力分布 p は,

$$p(z, t) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j G_{c_j, \Omega(t)}(z) \qquad (z \in \Omega(t)) \tag{1.4}$$

と表示される. ただし, $G_{c_j, \Omega(t)}$ は斉次 Dirichlet 境界条件下での Laplace 作用素に対する, 点 c_j を極とする領域 $\Omega(t)$ の Green 函数である. 表現式 (1.4) を (1.3) に代入

することにより,

$$\left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\frac{\partial G_{c_j,\Omega(t)}}{\partial n}\right)\cdot\frac{\partial T}{\partial n}=-1 \qquad (z\in\partial\Omega(t),\ t>0) \tag{1.5}$$

がえられる．したがって, Hele-Shaw 流の問題とは (1.5) をみたす滑らかな領域族 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を求める問題である．

Hele-Shaw 流の界面の漸近形状に対する結果として Sakai [9] による結果を挙げておく．Sakai は次の節で述べる求積領域の一般的な評価の系として, Hele-Shaw 流の界面に対する評価をえた．それは, $\Omega(0)\subset D(c,r)$ および $t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j+m(\Omega(0))\geq 4\pi r^2$ という条件の下で,

$$\sqrt{\frac{t}{\pi}\sum_{j=1}^{l}\alpha_j+\frac{m\left(\Omega(0)\right)}{\pi}}-r\leq|z-c|\leq\sqrt{\frac{t}{\pi}\sum_{j=1}^{l}\alpha_j+\frac{m\left(\Omega(0)\right)}{\pi}}+r \tag{1.6}$$

が, すべての $z\in\partial\Omega(t)$, $t>0$ に対し成立するというものである．ただし, $D(c,r)$ は半径 r, 中心 c の円盤を表すものとし, m は 2 次元 Lebesgue 測度とする．評価 (1.6) により, 次の不等式がえられる:

$$\max_{z\in\partial\Omega(t)}|z-c|-\min_{z\in\partial\Omega(t)}|z-c|\leq 2r.$$

本報告集では, Hele-Shaw 流の界面の漸近挙動に対するより精密な評価を与える．そこで, 定理の記述の簡便さを考慮し, 次のように記号を準備する:

$$w_l:=\frac{\sum_{j=1}^{l}\alpha_jc_j}{\sum_{j=1}^{l}\alpha_j}, \tag{1.7}$$

$$r_0:=\inf\left\{r\geq 0 \mid \Omega(0)\subset D(c,r)\ \text{となる}\ c\in\mathbb{C}\ \text{が存在する}\right\}, \tag{1.8}$$

$$\Lambda:=\sqrt{\frac{\pi}{\sum_{j=1}^{l}\alpha_j}}\cdot\min_{\sigma\in S_l}\left(\sum_{k=2}^{l}\frac{\alpha_{\sigma(k)}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_{\sigma(j)}}{\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_{\sigma(j)}\right)^2}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_{\sigma(j)}c_{\sigma(j)}}{\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_{\sigma(j)}}-c_{\sigma(k)}\right|^2\right). \tag{1.9}$$

ただし, S_l は $\{1,\ldots,l\}$ 上の置換群を表す．記号の意味であるが, w_l は注入率 α_1, $\ldots$, α_l を重みとする注入点 c_1, $\ldots$, c_l の重み付き重心であり, r_0 は $\Omega(0)$ を含む円盤の中で最小のものの半径を表す．以上の準備のもと, 以下に主定理を述べる．

定理 1.1. $\Omega(0)$, c_j, α_j を上述の通りとし, w_l, r_0, Λ を (1.7), (1.8), (1.9) によりそれぞれ定義する．$\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を Hele-Shaw 問題 (1.5) の解とするとき, 非負函数 $\varepsilon_-(t)$, $\varepsilon_+(t)$ が存在して次の評価をみたす:

$$\sqrt{\frac{t}{\pi}\sum_{j=1}^{l}\alpha_j}-\varepsilon_-(t)\leq|z-w_l|\leq\sqrt{\frac{t}{\pi}\sum_{j=1}^{l}\alpha_j}+\varepsilon_+(t) \qquad (z\in\partial\Omega(t),\ t>0).$$

ただし, $t\to\infty$ のとき,

$$\varepsilon_-(t)=\Lambda t^{-1/2}+O\left(t^{-1}\right),\quad \varepsilon_+(t)=\left(\Lambda+\frac{{r_0}^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sum_{j=1}^{l}\alpha_j}}\right)t^{-1/2}+O\left(t^{-1}\right)$$

が成り立つ．

定理 1.1 により, $t \to \infty$ において

$$\max_{z \in \partial\Omega(t)} |z - w_l| - \min_{z \in \partial\Omega(t)} |z - w_l| \leq \varepsilon_+(t) + \varepsilon_-(t) = O\left(t^{-1/2}\right)$$

が成り立つ. したがって, 複数の点から流体を注入した際に現れる Hele-Shaw 流の界面 $\partial\Omega(t)$ は, $t \to \infty$ において注入点の重心 w_l を中心とする円へと近づくことが分かる.

2 弱定式化と求積領域

方程式 (1.5) によって定式化された問題において, たとえ初期領域 $\Omega(0)$ の境界が十分に滑らかであったとしても, $\Omega(t)$ の境界の滑らかさは先験的にはわからない. そのため, 微分を含む定式化 (1.5) では解析が困難である. そこで, 境界の滑らかさを要求しないような別の定式化が必要となる.

いま, 十分に滑らかな境界をもつ領域の族 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ と十分に滑らかな函数 $T = T(z)$ が (1.5) をみたすとする. このとき, $\Omega(t)$ 上で劣調和かつ 2 次元 Lebesgue 測度 m に関して可積分な函数族を $SL^1(\Omega(t))$ で表すと, すべての $s \in SL^1(\Omega(t))$ に対し

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega(t)\setminus\Omega(0)} s\, dm &= \int_0^t \int_{\partial\Omega(\tau)} s \cdot \frac{1}{\partial T/\partial n}\, d\sigma\, d\tau \\
&= \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \int_0^t \int_{\partial\Omega(\tau)} s \cdot \left(-\frac{\partial G_{c_j,\Omega(\tau)}}{\partial n}\right) d\sigma\, d\tau \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \int_0^t s(c_j)\, d\tau \\
&= t \sum_{j=1}^{l} \alpha_j s(c_j).
\end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\int_{\Omega(0)} s\, dm + t \sum_{j=1}^{l} \alpha_j s(c_j) \leq \int_{\Omega(t)} s\, dm \quad \left(s \in SL^1\left(\Omega(t)\right)\right) \tag{2.1}$$

が成り立つ. そこで, Sakai [8] は (2.1) をみたす $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を積分形の Hele-Shaw 問題の解とよび, 求積領域の理論を適用した.

一般に, コンパクトな台をもつ有限 Borel 測度に対し, $\nu(\mathbb{C} \setminus \Omega) = 0$ および

$$\int s\, d\nu \leq \int_\Omega s\, dm \quad (s \in SL^1(\Omega))$$

をみたす有界開集合 Ω を SL^1 に対する ν の求積領域 (quadrature domain) という. HL^1, AL^1 に対する求積領域も同様に定義される (ただし, その場合には不等号を等号にかえる). ここで, $HL^1(\Omega)$ とは Ω 上調和で m に関して可積分な函数族であり,

$AL^1(\Omega)$ とは Ω 上の正則函数で m に関して可積分な函数族である. したがって, 積分形の Hele-Shaw 問題を解くということは, SL^1 に対する測度 $\chi_{\Omega(0)} + t\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \delta_{c_j}$ の求積領域を求めることとなる. ただし, $\chi_{\Omega(0)}$ は $\Omega(0)$ 上の特性函数を表す.

求積領域の諸性質を以下, 簡単に述べる.

1. SL^1 に対する求積領域は HL^1 に対する求積領域となり, HL^1 に対する求積領域は AL^1 に対する求積領域となる;

2. m に関して特異な有限測度 ν に対し, SL^1 に対する ν の求積領域が存在する. 同様に, $\nu = \chi_\Omega + \mu$ で, Ω が有界領域, μ が $\mu(\Omega) > 0$ をみたす有限測度のとき, SL^1 に対する ν の求積領域が存在する;

3. 測度 ν が上記の場合, m に関する零集合を除き, $SL^1(\Omega)$ に対する ν の求積領域は一意に定まる. さらに, 集合の包含関係に対して最小な求積領域が存在する (以下, ν の最小求積領域を $\Omega(\nu)$ で表す);

4. ν_1, ν_2 が上記の場合で $\nu_1 \le \nu_2$ であれば, $\Omega(\nu_1) \subset \Omega(\nu_2)$ が成り立つ;

5. SL^1 に対する測度 $t\delta_c$ $(t > 0, c \in \mathbb{C})$ の求積領域は $D(c, \sqrt{t/\pi})$ である.

以上の性質から, 有界な初期領域 $\Omega(0) \subset \mathbb{C}$ に対し, 積分形の Hele-Shaw 問題の解の存在および一意性がしたがう. 以下, $\Omega(0)$ は有界領域と仮定し, この一般化された解 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ の $t \to \infty$ での形状を考察する.

3 Schwarz 函数と求積領域の評価

この節では求積領域を具体的に求める手法として, Schwarz 函数を用いる方法について述べる. 定理 1.1 の証明では, この Schwarz 函数の構成を通し求積領域を具体的な有理函数の単位円盤の像として表示する. その具体的な有理函数表示により, Hele-Shaw 流の界面の漸近挙動に対する精密な評価をえることができる.

滑らかな曲線 Γ に対し, S が Γ の Schwarz 函数であるとは, S が Γ のある近傍上で正則で

$$S(z) = \overline{z} \quad (z \in \Gamma)$$

をみたすことをいう. ただし, $\overline{z}$ は z の複素共役を表す. 複素函数論における一致の定理から Γ の Schwarz 函数は存在すれば一意に定まることがわかる.

次に, Schwarz 函数と求積領域の関係について述べる. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を滑らかな境界をもつ領域とし, f を Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ のある近傍上で正則な函数とする. このとき, f の正則性と Stokes の定理から,

$$\int_\Omega f\, dm = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} f(z)\overline{z}\, dz$$

が成り立つ. ここで, $\partial\Omega$ の Schwarz 函数 S が存在し, さらに S が一位の極 $c_j \in \Omega$ $(j = 1, \ldots, l)$ を除いて Ω 上正則で, 各点 c_j における留数はそれぞれ $t\alpha_j/\pi$ であ

るとする．このとき，

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\overline{z}\,dz = \int_{\partial\Omega} f(z)S(z)\,dz$$
$$= 2it\sum_{j=1}^{l}\alpha_j f(c_j)$$

をえる．したがって，$\overline{\Omega}$ のある近傍上の任意の正則函数 f に対し，

$$\int_{\Omega} f\,dm = t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j f(c_j) \tag{3.1}$$

が成り立つ．(3.1) から，Ω が SL^1 に対する $t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\delta_{c_j}$ の求積領域のひとつの候補となる．

以上の考察から，我々はまず境界 $\partial\Omega$ の Schwarz 函数が上記の性質をみたすような Ω を求め，その Ω が実際に測度 $t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\delta_{c_j}$ の求積領域となることを確かめる．しかし，一般にそのような領域 Ω を構成することは難しいため，$l=2$ の場合について上の性質をみたす Ω をある等角写像の像として構成する．ここでは係数を一般化した $\pi(\alpha\delta_i+\beta\delta_{-i})$ の求積領域の評価を求める．

補題 3.1. α, $\beta>0$ および $\alpha+\beta$ は十分に大きいものとする．このとき，次の２条件をみたす領域 $\Omega(\alpha,\beta)$ が存在する:

(i) $\partial\Omega(\alpha,\beta)$ の Schwarz 函数は一位の極 i, $-i$ を除き $\Omega(\alpha,\beta)$ 内で正則で，点 i における留数は α であり，点 $-i$ における留数は β である;

(ii) $(\alpha+\beta)\cdot\min\{\alpha,\beta\}\to\infty$ のとき，

$$\min_{z\in\partial\Omega(\alpha,\beta)}\left|z-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}i\right| = \sqrt{\alpha+\beta-2}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^{5/2}}+(\alpha-\beta)^2\cdot O\left((\alpha+\beta)^{-7/2}\right),$$
$$\max_{z\in\partial\Omega(\alpha,\beta)}\left|z-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}i\right| = \sqrt{\alpha+\beta+2}-\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^{5/2}}+\frac{8\alpha\beta|\alpha-\beta|}{(\alpha+\beta)^4}$$
$$+(\alpha-\beta)^2\cdot O\left((\alpha+\beta)^{-7/2}\right)+(\alpha-\beta)\cdot O\left((\alpha+\beta)^{-3}\right).$$

この補題の証明は，以下に示す Davis [1] による Schwarz 函数の構成法を用いる．いま，φ を $\overline{D(0,1)}$ のある近傍上で正則でかつ単葉であるような有理函数であるとする．$\Omega=\varphi\left(D(0,1)\right)$ とすると，

$$S(z) := \overline{\varphi\left(1\Big/\overline{\varphi^{-1}(z)}\right)} \tag{3.2}$$

で定義される函数 S は $\partial\Omega$ の Schwarz 函数となる．さらに，φ が一位の極 w_j $(j=1,\ldots,l)$ を除き $\mathbb{C}$ 上正則とすると，S は Ω 上に一位の極 $\varphi\left(1/\overline{w_j}\right)$ $(j=1,\ldots,l)$ をもち，それらの点以外では正則となることが確かめられる．実際，$z\in\partial\Omega$ に対し $\varphi^{-1}(z)\in\partial D(0,1)$ となるから

$$S(z) = \overline{\varphi\left(\varphi^{-1}(z)\right)} = \overline{z}$$

となる. よって, S が $\partial\Omega$ の Schwarz 函数となることがわかる.

したがって, 一位の極 w_1, w_2 を除き正則な有理函数 φ で, $\varphi(1/\overline{w_1}) = i$ および $\varphi(1/\overline{w_2}) = -i$ をみたし, (3.2) で定義される函数 S の留数がそれぞれ α, β となるものを求めればよいこととなる. そこで, パラメータ付き有理函数 $\varphi = \varphi_{a,R,\eta}$ を

$$\varphi(w) := \varphi_{a,R,\eta}(w) := \frac{aR(w - i\eta)}{w^2 + R^2} + i\eta R.$$

によって定め, 与えられた α, β に対し, 対応する Schwarz 函数の極および留数が求めるものとなるように適当な $a > 0$, $R > 1$ および $\eta \in \mathbb{R}$ を選ぶことにより, 実際に求める有理函数を構成することができる. なお, パラメータ a, R および η はある代数方程式の根として定まることから, この根の評価を用い, 領域 $\Omega(\alpha,\beta) := \varphi(D(0,1))$ を評価することにより補題 3.1 が示される.

補題 3.1 によってえられた領域 $\Omega(\alpha,\beta)$ が HL^1 に対する $\pi(\alpha\delta_i + \beta\delta_{-i})$ の求積領域となることは次のように確かめられる. 任意に $\overline{\Omega(\alpha,\beta)}$ のある近傍上において定義された調和函数 h をとる. いま $\delta > 0$ を十分小さくとることにより, h は単連結領域 $\varphi(D(0,1+\delta)) \supset \overline{\Omega(\alpha,\beta)}$ 上で調和であるから, $\varphi(D(0,1+\delta))$ 上の正則函数 f でその実部が h となるようなものが存在する. この f に対して

$$\int_{\Omega(\alpha,\beta)} f\, dm = \pi\alpha f(i) + \pi\beta f(-i)$$

となるから, その実部を考えると

$$\int_{\Omega(\alpha,\beta)} h\, dm = \pi\alpha h(i) + \pi\beta h(-i)$$

をえる. したがって, Sakai [8] による次の近似定理を用いることにより, $\Omega(\alpha,\beta)$ が HL^1 に対する測度 $\pi(\alpha\delta_i + \beta\delta_{-i})$ の求積領域となることがわかる.

補題 3.2 ([8, Lemma 7.3])**.** Ω を有界開集合とする. このとき, 任意の $h \in HL^1(\Omega)$ は, $\log|\cdot - \zeta|$, $\mathrm{Re}(1/(\cdot - \zeta))$ および $\mathrm{Im}(1/(\cdot - \zeta))$ $(\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega)$ の線形結合によって L^1 ノルムで近似できる.

次に $\Omega(\alpha,\beta)$ が SL^1 に対する求積領域となることをみる. 前節で述べた通り, SL^1 に対する測度 $\pi(\alpha\delta_i + \beta\delta_{-i})$ の求積領域の存在は求積領域の一般論により示されている. それを $\tilde{\Omega}$ と表し, $\Omega(\alpha,\beta) = \tilde{\Omega}$ を示せばよい. いま, $\tilde{\Omega}$ は HL^1 に対する求積領域でもあるため, HL^1 に対する $\pi(\alpha\delta_i + \beta\delta_{-i})$ の求積領域の一意性を示せばよいこととなる. この一意性は次の補題により示される. 証明は Shapiro [12, Proposition 4.8, Theorem 4.9] を参照せよ.

補題 3.3 ([8])**.** Ω を HL^1 に対する測度 ν の有界な求積領域とし, 次の条件をみたすとする:

(i) $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ は連結である;

(ii) Ω が $\overline{\Omega}$ の内部に等しい;

(iii) Ω がある直線 L に関して対称である;

(iv) ν の台は $\Omega \cap L$ に含まれる.

このとき, HL^1 に対する測度 ν の求積領域は一意に定まり, それは Ω である.

補題 3.1 によってえられた領域 $\Omega(\alpha,\beta)$ は補題 3.3 の条件をみたす. したがって, $\Omega(\alpha,\beta)$ は HL^1 に対する $\pi(\alpha\delta_i+\beta\delta_{-i})$ のただ一つの求積領域となる. すなわち, $\Omega(\alpha,\beta)=\tilde{\Omega}$ であり, よって, $\Omega(\alpha,\beta)$ が SL^1 に対する求積領域であることが示された. ゆえに, 次が成り立つ.

定理 3.4. $\alpha,\beta>0$ および $\alpha+\beta$ は十分に大きいものとする. このとき, SL^1 に対する測度 $\pi(\alpha\delta_i+\beta\delta_{-i})$ の一意に定まる求積領域 $\Omega(\alpha,\beta)$ は, $(\alpha+\beta)\cdot\min\{\alpha,\beta\}\to\infty$ のとき, 次の評価をみたす:

$$\begin{aligned}
\min_{z\in\partial\Omega(\alpha,\beta)}\left|z-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}i\right| &= \sqrt{\alpha+\beta-2}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^{5/2}}+(\alpha-\beta)^2\cdot O\left((\alpha+\beta)^{-7/2}\right),\\
\max_{z\in\partial\Omega(\alpha,\beta)}\left|z-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}i\right| &= \sqrt{\alpha+\beta+2}-\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^{5/2}}+\frac{8\alpha\beta|\alpha-\beta|}{(\alpha+\beta)^4}\\
&\quad+(\alpha-\beta)^2\cdot O\left((\alpha+\beta)^{-7/2}\right)+(\alpha-\beta)\cdot O\left((\alpha+\beta)^{-3}\right).
\end{aligned}$$

4 Hele-Shaw 流の漸近挙動への応用

定理 1.1 の証明の概略を以下に示す. 簡単のため $\Omega(0)\subset D(c_0,r_0)$ とする. まず, 求積領域が測度の大小関係を保存することを注意しておく. すなわち, 求積領域が存在するような二つの有限正測度 ν_1, ν_2 が与えられたとき, $\nu_1\le\nu_2$ が成り立つならば $\Omega(\nu_1)\subset\Omega(\nu_2)$ が成り立つ. そこで, Hele-Shaw 流の解 $\Omega(t)$ が $\Omega(t)=\Omega(\chi_{\Omega(0)}+t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\delta_{c_j})$ として特徴付けられることを思い出しておくと,

$$\begin{aligned}
\Omega(t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\delta_{c_j})\subset\Omega(t)\subset\Omega(\chi_{D(c_0,r_0)}+t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\delta_{c_j})\\
=\Omega(\pi{r_0}^2\delta_{c_0}+t\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\delta_{c_j})
\end{aligned}$$

が成り立つ. 最後の等式は $\Omega(\pi{r_0}^2\delta_{c_0})=D(c_0,r_0)$ であることと, 次の補題で述べられる最小求積領域の半群性による.

補題 4.1. 正数 β_j $(j=1,2,\ldots,n)$ に対し,

$$\Omega\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\delta_{c_j}\right)=\Omega\left(\chi_{\Omega\left(\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\delta_{c_j}\right)}+\beta_n\delta_{c_n}\right)$$

が成り立つ.

したがって, $\Omega(t)$ の評価は, 有限個の Dirac 測度の線形結合の求積領域の評価に帰着される．二つの Dirac 測度の求積領域の評価は, 定理 3.4 により $\pi(\alpha\delta_i+\beta\delta_{-i})$ の求積領域に対する評価がえられている．一般の $\alpha\delta_{c_1}+\beta\delta_{c_2}$ の求積領域に対する評価については, 次の補題とともに回転や平行移動を用いることにより示される．

補題 4.2. $\beta_1, \beta_2, \kappa > 0$ および $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ とする．このとき,

$$\Omega\left(\kappa^2\beta_1\delta_{\kappa c_1}+\kappa^2\beta_2\delta_{\kappa c_2}\right)=\{\kappa z \in \mathbb{C} \,|\, z \in \Omega\left(\beta_1\delta_{c_1}+\beta_2\delta_{c_2}\right)\}$$

が成り立つ.

$l \geq 3$ の場合には, 補題 4.1 を適用し, l に関する帰納法を用いることにより証明が完了する.

参考文献

[1] Davis, Philip J., The Schwarz function and its applications. The Carus Mathematical Monographs, No. 17. *The Mathematical Association of America, Buffalo, N. Y.*, 1974.

[2] Elliott, C. M.; Janovský, V., A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **88** (1981), no. 1-2, 93–107.

[3] Gustafsson, B., Applications of variational inequalities to a moving boundary problem for Hele-Shaw flows. *SIAM J. Math. Anal.*, **16** (1985), no. 2, 279–300.

[4] Gustafsson, B.; Sakai, M., Properties of some balayage operators, with applications to quadrature domains and moving boundary problems. *Nonlinear Anal.*, **22** (1994), no. 10, 1221–1245.

[5] Gustafsson, B.; Vasilév, A., Conformal and potential analysis in Hele-Shaw cells. Advances in Mathematical Fluid Mechanics. *Birkhäuser Verlag, Basel*, 2006.

[6] Richardson, S., Hele Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel. *J. Fluid Mech.* **56** (1972), 609–618.

[7] Richardson, S., Some Hele-Shaw flows with time-dependent free boundaries. *J. Fluid Mech.* **102** (1981), 263–278.

[8] Sakai, M., Quadrature Domains. Lecture Notes in Mathematics, 934. *Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1982.

[9] Sakai, M., Application of variational inequalities to the existence theorem on quadrature domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **276** (1983), 267–279.

[10] Sakai, M., Solutions to the obstacle problem as Green potentials. *J. Analyse Math.* **44** (1984/85), 97–116.

[11] Sakai, M., Sharp estimates of the distance from a fixed point to the frontier of a Hele-Shaw flow. *Potential Anal.* **8** (1998), 277–302.

[12] Shapiro, Harold S., The Schwarz function and its generalization to higher dimensions. University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 9. A Wiley-Interscience Publication. *John Wiley & Sons, Inc., New York*, 1992.

[13] Vondenhoff, E., Long-time asymptotics of Hele-Shaw flow for perturbed balls with injection and suction. *Interfaces Free Bound.* **10** (2008), 483–502.