Asymptotic behavior of solution of the drift-diffusion system of degenerate type

小川卓克 (東北大理)

1. 流体モデルと 0 緩和時間極限

Drift-diffusion モデルは半導体素子設計のもっとも簡単な経験則モデルとして導入されたが, 同様な数理モデルは星雲ガス間における重力集中モデルや走化性粘菌の dynamics のモデルなど, 広い物理スケールに共通する問題として現れ, 系の挙動がある一定の数学的記述によって統一的に理解される.

$$
\text{(DD)} \qquad \begin{cases} \partial_t \rho - \nabla\cdot(\nabla P(\rho) - \kappa\rho\nabla\psi) = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi = \rho, \quad x\in\mathbb{R}^n, \\ \quad \rho(0,x) = \rho_0(x) \geq 0, \qquad P(\rho) = \rho^\alpha, & \alpha \geq 1. \end{cases}
$$

ここで $\rho = \rho(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ は密度を $\psi = \psi(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はポテンシャル表す未知関数, $P = P(\rho)$ は圧力、ここでは密度だけに依存するものと仮定する. κ は結合定数で, $\rho_0(x)$ は与えられた初期条件である。数学的には κ の符号と α の値が問題となる. 半導体モデルでは定数 κ は負であり, その大きさは非常に大きく Debye 長[1]と呼ばれている.

Tab 1. 係数 κ の符号とモデルの関係:

モデル	結合定数の符号
半導体モデル	$\kappa = -1$
走化性粘菌モデル	$\kappa = 1$
星雲中の星の生成モデル	$\kappa = 1$

半導体モデル, あるいは重力モデルはこの系より複雑ないわゆる流体力学的モデルを考えることができ, その系からより簡単な drift-diffusion 系 (DD) が導出されると考えられる. 圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 系

$$
\text{(cNSP)} \qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho u) = 0, \qquad t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla(\rho u\otimes u) + \nabla P(\rho) - \kappa\rho\nabla\psi \\ \qquad = \lambda\Delta u + (\lambda+\nu)\nabla(\operatorname{div} u) - \dfrac{1}{\tau}\rho u, \qquad t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ \qquad -\Delta\psi = \rho, \quad x\in\mathbb{R}^n, \\ \qquad\qquad \rho(0,x) = \rho_0(x), \qquad u(0,x) = u_0(x) \end{cases}
$$

の緩和時間 0 での極限として導出される ([10]). ここで弱解を定義する:

Definition 1.1. $\alpha > 1$ とする。$\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ かつ $\rho_0(x) \geq 0$, $\sqrt{\rho_0}u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ を仮定する。このとき $(\rho(t,x), u(t,x), \psi(t,x))$ が圧縮性 *NS-P* の弱解とは

- $\rho(t,x) \geq 0$ ただし $(t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}^n$,
- $\rho \in C([0,T); L^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(0,T; L^\alpha(\mathbb{R}^n))$ かつ $u \in L^2(0,T; \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$,
- (ρ, u, ψ) は方程式を超函数の意味で満たす.

[1] κ^{-1} が Debye 長の 2 乗

今, スケールされた時間変数 $t' = \tau t$ と流体速度 $v(t', x) = \tau u(t, x)$ を導入すると (cNSP) は次のように書き直される.

$$
\text{(scNSP)} \qquad \begin{cases} \tau\partial_{t'}\rho+\tau\nabla\cdot(\rho v) = 0, \qquad t' > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \tau^2\partial_{t'}(\rho v)+\tau^2\nabla(\rho v \otimes v) + \nabla P(\rho) - \kappa\rho\nabla\psi \\ \qquad =\tau\big(\lambda\Delta v + (\lambda+\nu)\nabla(\mathrm{div}\ v)\big) - \rho v, \qquad t' > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad -\Delta\psi = \rho, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad \rho(0,x) = \rho_0(x), \qquad v(0,x) = u_0(x) \end{cases}
$$

ここで形式的に $\tau \to 0$ の極限を考えると運動量のつり合いから

$$
-\Big(\nabla P(\rho) - \kappa\rho\nabla\psi\Big) = \rho v
$$

を得て, (scNSP) の第一式である連続の式に右辺を代入すると, 方程式 (DD) を得る。このプロセスを正当化するためには,

- 大きな初期値に対する, 時間大域的な (cNSP) の弱解を構成する.
- 変換 $t' = \tau t$, $v(t', x) = \tau u(t, x)$ により現れる方程式 (scNSP) に対する時間大域的先見評価を得る.
- $\tau \to 0$ での極限を弱収束の意味で正当化する.

といった手順が必要である。一般に圧縮性 Navier-Stokes 方程式の大きな解に対する時間大域的な弱解の存在を得るためには, 圧力に対する仮定 $P(\rho) = \rho^\alpha$ において, $\alpha > \frac{n}{2}$ を仮定することが要求されるため, これまでのところもっとも一般的な設定 $\alpha \ge 1$ の元での緩和時間 0 の極限を正当化することはできていない.

得られる結果は次の通りである.

Theorem 1.2 (Kobayashi-Ogawa[10])**.** *$3 \le n \le 6$ とし, $\alpha > 1$ ($\kappa = -1$) または $\alpha > 2 - \frac{2}{n}$ ($\kappa = 1$) を仮定する. $(\rho_\tau, u_\tau, \psi_\tau)$ を $P(\rho) = \rho^\alpha + \delta\rho^\beta$ ($\beta > n/2$) なる (cNSP) の弱解とし, $\rho_0 \ge 0$ を仮定する. $t' = \tau t$, $v_\tau(t', x) = \tau^{-1}u_\tau(t, x)$, に対して $\tau, \delta \to 0$ のとき:*

$$
\begin{aligned}
\rho_\tau \to \rho \quad &\textit{in } C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)) \quad 1 < r < \alpha, \\
\sqrt{\rho_\tau}v_\tau \rightharpoonup w, \quad &*\textit{-weakly in } L^\infty(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^n)), \\
\rho_\tau v_\tau \rightharpoonup z, \quad &*\textit{-weakly in } L^\infty(0,\infty; L^{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2}}(\mathbb{R}^n)), \\
\psi_\tau \to \psi \quad &\textit{in } C((0,\infty); W^{1,\frac{n\alpha}{n-\alpha}}) \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^2)
\end{aligned}
$$

極限 $(\rho(t), \psi(t))$ は drift-diffusion 方程式 (DD) の時間大域的弱解となる ただし $z = -\nabla(\rho^\alpha - \kappa\rho\nabla\psi)$ in $\mathcal{D}^*$.

上記の定理で現れる $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ は実は (DD) の臨界指数の一つである.

このほかにも, 量子モデルの緩和時間 0 極限によって量子 drift-diffusion 系を導出し, そこからさらに半古典近似を行うことにより (DD) を得ることができる. 非線形消散型 Schrödinger-Poisson 方程式

$$
\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} i\hbar\partial_t\phi + \hbar^2(\nabla - i\nabla\sigma)^2\phi - f(|\phi|^2)\phi - \lambda\psi\phi = 0, \quad t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi = |\phi|^2 \\ \phi(0,x) = \phi_0(x). \end{cases}
$$

を考える. ここで $\sigma(t,x) = \frac{1}{\tau}\int_0^t \theta(s,x)ds$, $\theta(t,x)$ は $\psi(t,x)$ の偏角. このとき方程式 (1.1) に Madelung 変換

$$
\phi(t,x) = \sqrt{\rho}(t,x)e^{\frac{i}{\hbar}\theta(t,x)}.
$$

を施すことによって, 方程式の実部と虚部に分解し, $\rho(t)$ と $v(t)=\nabla\theta(t)$ の方程式に書き直すと以下の分散型 Euler-Poisson 方程式を得る.

$$\begin{cases} \partial_t\rho + 2\mathrm{div}\ (\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \nabla(\rho v\otimes v) + \dfrac{1}{\tau}\rho v + \rho\nabla(f(\rho)-\kappa\psi) + \hbar^2\rho\nabla\left(\dfrac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = 0, \end{cases}$$

次に緩和時間 0 極限 ($\tau\to 0$) を施すことによって次の量子 drift-diffusion 系を得る.

$$\begin{cases} \partial_t\rho - 2\mathrm{div}\ (\rho\nabla f(\rho) - \kappa\rho\nabla\psi) = 2\hbar^2\mathrm{div}\left(\rho\nabla\left(\dfrac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)\right), \\ \quad -\Delta\psi = \rho \end{cases}$$

最後に半古典近似 $\hbar\to 0$ を行って (DD) を得る.

$$\begin{cases} \partial_t\rho - 2\mathrm{div}\ (\rho\nabla f(\rho) - \kappa\rho\nabla\psi) = 0, \\ \quad -\Delta\psi = \rho \end{cases}$$

ここで $f(\rho)=\rho^{p-1}$ である.

2. Drift-diffusion 系の時間大域的安定性

drift-diffusion 系 (DD) は 結合定数 κ の符号と, 断熱指数 α の大きさによって時間大域的解の安定性が変わる. 方程式は初期条件に非負性を仮定して, 解の非負性を想定することにより (退化) 放物性が維持され, 時間正方向に可解となる。しかし $\alpha>1$ のときには一般に問題は退化し, 一様放物性が壊れる。このため解の正則性理論は一般に破綻し, 弱解を導入する必要が生じる。

Definition 2.1. *$n\ge 3$, $\alpha>1$, $\rho_0\ge 0$ とする. (ρ,ψ): が (DD) の弱解 であるとは*

- $\rho(t,x)\ge 0$ *a.e.* (t,x).
- $\rho\in L^\infty(0,T;L^1\cap L^\alpha)$, $\nabla\rho^{\alpha-1/2}\in L^2(0,T;L^2)$
- $\forall\phi\in C^1([0,T];C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$, $\psi=(-\Delta)^{-1}\rho$,

$$\big(\rho(t),\phi(t)\big)-\big(\rho_0,\phi(0)\big)=\int_0^t\Big\{-\big(\rho(t),\partial_t\phi(t)\big)-\big(\rho^\alpha(t),\Delta\phi(t)\big) + \kappa\big(\rho(t)\nabla\psi(t),\nabla\phi(t)\big)\Big\}dt.$$

を満たすこと.
ここで

$$(-\Delta)^{-1}\rho=\frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x|^{-(n-2)}*\rho.$$

時間局所的弱解の存在定理は古典的手法による. 次に時間大域的弱解の存在を得るには次の命題が重要である.

Proposition 2.2. *$n\ge 3$, $\alpha>1$ とする。*

(1) 正値性 $\rho_0\ge 0$, $\rho(t,x)\ge 0$ *a.e.*
(2) 質量保存則

$$\int_{\mathbb{R}^n}\rho(t,x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\rho_0(x)dx.$$

(3) *Entropy-energy* 評価:

$$H[\rho(t)]+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big|\nabla\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\rho^{\alpha-1}-\kappa\psi\big)\Big|^2dxdt\le H[\rho_0]$$

ただし

$$H[\rho]\equiv\frac{1}{\alpha-1}\|\rho\|_\alpha^\alpha-\frac{\kappa}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\psi dx,\qquad \alpha>1,$$
$$H[\rho]\equiv\int_{\mathbb{R}^n}\rho\log\rho dx-\frac{\kappa}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\psi dx,\qquad \alpha=1.$$

(1) は弱最大値原理,(2) は形式的に方程式を積分して, 解の可積分性を用いる. (3) を得るには方程式を

$$\partial_t\rho-\mathrm{div}\,\Big(\rho\nabla\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\rho^{\alpha-1}-\kappa\psi\big)\Big)=0$$

と書き直して以下を方程式にかけて部分積分する $B(\rho,\psi)=\frac{\alpha}{\alpha-1}\rho^{\alpha-1}-\kappa\psi$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho B(\rho,\psi)dx-\int_{\mathbb{R}^n}\rho\partial_tB(\rho,\psi)dx+\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big|\nabla B(\rho,\psi)\Big|^2dx=0$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\partial_tB(\rho,\psi)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\alpha\rho^{\alpha-1}\partial_t\rho dx-\kappa\int_{\mathbb{R}^n}\rho\partial_t\psi dx\\&=\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho^\alpha dx-\kappa\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)\psi\partial_t\psi dx\\&=\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho^\alpha dx-\frac{1}{2}\kappa\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\Big|(-\Delta)^{1/2}\psi\Big|^2dx\\&=\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\alpha}{\alpha-1}\rho^\alpha dx-\kappa\int_{\mathbb{R}^n}\rho\psi dx\right)\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\rho B(\rho,\psi)dx-\int_{\mathbb{R}^n}\rho\partial_tB(\rho,\psi)dx\\=&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n}\rho^\alpha dx-\frac{1}{2}\kappa\int_{\mathbb{R}^n}\rho\psi dx\right).\end{aligned}$$

以上により

$$\frac{d}{dt}H(t)+\int_{\mathbb{R}^n}\rho\Big|\nabla B(\rho,\psi)\Big|^2dx=0,$$

ただし

$$H(t)=\frac{1}{\alpha-1}\|\rho\|_\alpha^\alpha-\frac{\kappa}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\rho\psi dx.$$

を得る. 以上の計算は形式的なものではあるが, 適当な近似を施して極限をとることにより $n\ge3$ であれば容易に正当化できる. ❑

κ が負のときは系は安定であり, 時間大域解が存在する. 一方 κ が正のときは系は一般に不安定化する. $n\ge3$ で $\alpha>1$ の場合に制限すると以下のようになる。

Theorem 2.3. $n\ge3,\ \alpha>1,\ \kappa=\pm1$ とする. このとき (DD) の弱解の大域挙動は以下のように分類される.

(1) $\kappa=-1$ かつ $\alpha>1\Longrightarrow$ 時間大域的弱解が存在する.
(2) $\kappa=1$ かつ $2-\frac{2}{n}<\alpha\Longrightarrow$ 時間大域的弱解が存在する.
(3) $\kappa=1$ かつ $2-\frac{4}{n+2}<\alpha\le2-\frac{2}{n}$ で初期値 $\|\rho_0\|_{\frac{n}{2}(2-\alpha)}$ が十分小さい場合 $\Longrightarrow$ 時間大域的弱解が存在する.

(4) $\kappa=1$ かつ $1<\alpha\le 2-\frac{2}{n}$ $\rho_0\in L^1_2(\mathbb{R}^n)$ の場合 $\Longrightarrow$ 弱解は有限時間内で爆発する。

ここに挙げた結果は以下の結果をあわせて示したものである. Mock [15], Díaz-Galiano-Jüngel [4], Nagai[16],[17], Biler-Nadzieja-Stanzy [2], Sugiyama [24], Sugiyama-Kunii [25], Ogawa[20], Blanchet-Dolbeault-Perthame [3].

3. 臨界指数

さて方程式は未知関数 $\rho(t,x)$ について単独の問題と見なせて, その場合次のような代数的構造 (スケール不変性) を持つことがわかる. 今スケールパラメータ $\lambda>0$ に対して スケール変換

$$\rho_\lambda(t,x)=\lambda^\mu\rho(\lambda^\sigma t,\lambda x)$$

を考える. 方程式を不変に保ついわゆる不変スケールは以下の条件で与えられる:

$$\lambda^{\mu+\sigma}=\lambda^{\alpha\mu+2}=\lambda^{2\mu}.$$

これより

$$\mu=\sigma=\frac{2}{2-\alpha}\qquad \text{かつ}\qquad \rho_\lambda(t,x)=\lambda^{\frac{2}{2-\alpha}}\rho\big(\lambda^{\frac{2}{2-\alpha}}t,\lambda x\big)$$

不変スケールで方程式の解を不変に保つような時空 Lebesgue 空間を不変スケールと呼ぶが, 今の場合,

$$\int_0^\infty\|\rho_\lambda(t)\|_p^\theta dt=\int_0^\infty\|\rho(t)\|_p^\theta dt$$

から

$$1=\frac{n(2-\alpha)}{2p}+\frac{1}{\theta}$$

となる. 特に $\theta=\infty$ のときは $p=\frac{n}{2}(2-\alpha)$ を得る. このとき不変スケールで不変な時空 Lebesgue 空間

$$\|\rho_\lambda(t)\|_p=\|\rho(t)\|_p\quad\text{if}\quad p=\frac{n(2-\alpha)}{2}$$

このとき特に重要な場合は以下のときである.

- $\alpha=1\quad\Rightarrow\quad p=\frac{n}{2}$
- $p=1\quad\Rightarrow\quad \alpha=2-\frac{2}{n}$

従って $\alpha=1$ と $\alpha=2-\frac{2}{n}$ が (臨界状況) 重要であろうことが想像できる.

前述の定理において大域可解性のための臨界指数は $\alpha=2-\frac{2}{n}$ となることが示されているが, これはスケール変換不変性で表れた指数と一致する. この指数が現れることは 2 つの保存則により以下のように説明できる. 弱解の大域可解性を保障するためには, 解の時間大域的 a priori 評価を得ることが焦点となる. 解の a priori 評価は $\|\rho(t)\|_\alpha$ の時間評価を得ることで得られる. この評価は Entropy-energy 汎函数によって

$$\|\rho(t)\|_\alpha^\alpha\le H[\rho_0]+\frac{\kappa}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\rho(t)\psi(t)dx$$

から $\kappa=-1$ ならば $\rho\ge0$ と $\psi(t)=(-\Delta)^{-1}\rho$ から右辺第一項は負値となり直ちに得られる. $\kappa=1$ の場合には Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式:

$$\|(-\Delta)^{-1}\rho(t)\|_{r'}\le C_{HLS}\|\rho(t)\|_\alpha\qquad \frac{1}{r'}=1-\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{n}$$

より

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t)(-\Delta)^{-1}\rho(t)dx \le& \|\rho(t)\|_r \|(-\Delta)^{-1}\rho(t)\|_{r'} \\
\le& C_{HLS}\|\rho(t)\|_1^{1-\gamma}\|\rho(t)\|_\alpha^{\gamma}\|\rho(t)\|_\alpha \\
\le& C_{HLS}\|\rho_0\|_1^{1-\gamma}\|\rho(t)\|_\alpha^{1+\gamma}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t)\psi(t)dx =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t)(-\Delta)^{-1}\rho(t)dx \\
\le& \frac{1}{2}C_{HLS}\|\rho(t)\|_1^{1+\gamma}\|\rho(t)\|_\alpha^{1-\gamma}
\end{aligned}
$$

ただし $\gamma = \frac{2n}{n+2} - 1$ である. 従って 臨界指数は $1-\gamma = \alpha$ の際に現れることがわかる. 今 $\gamma + 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{n-2}{n}$ だから

$$
1+\gamma = \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{n-2}{n} = \alpha \Leftrightarrow \frac{n-2}{n} + 1 = \alpha
$$

これより $\alpha^* = 2 - \frac{2}{n}$ が臨界指数となることがわかる. 指数が $\alpha > \alpha^*$ を満たすと上記の不等式で $1+\gamma < \alpha$ が成り立つため,Entropy-energy の負の項はいつでも $\|\rho\|_1$ と $\|\rho(t)\|_\alpha^{\alpha-\varepsilon}$ の項で押さえることができて, 時間大域 apriori 評価を得ることがわかる. 臨界の場合すなわち　$\alpha = \alpha^*$ の場合には初期値の小ささが必要となる. すなわち $C_{HLS}\|\rho_0\|_1^{1-\gamma} < \frac{2}{\alpha-1}$ が a priori 評価を得る十分条件である.

4. Sobolev 臨界の場合

さて前述の評価において, $C_{HLS}\|\rho_0\|_1^{1-\gamma} < \frac{2}{\alpha-1} = \frac{2n}{n-2}$ が成り立たなければ有限時刻で爆発する可能性がある. 特に $\gamma = 1$ の場合には, 初期条件に対する条件をあらわに与えることができない. すなわち Entropy-energy の評価において

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t)(-\Delta)^{-1}\rho(t)dx \le& \|\rho(t)\|_r \|(-\Delta)^{-1}\rho(t)\|_{r'} \\
\le& C_{HLS}\|\rho(t)\|_1^{1-\gamma}\|\rho(t)\|_\alpha^{\gamma}\|\rho(t)\|_\alpha \\
\le& C_{HLS}\|\rho_0\|_1^{1-\gamma}\|\rho(t)\|_\alpha^{1+\gamma}
\end{aligned}
$$

もし $\gamma = 1$ と選ぶと $\|\rho(t)\|_1^{1-\gamma}$ が消えてしまい $\|\rho\|_\alpha$ を制御するために絞る項が得られない. 従って解の大域可解性を $\|\rho(t)\|_1$ で制御できないことがわかる. 実はこの場合は Sobolev 臨界指数に相当する状況となっている. このことを説明するために次の Sobolev 臨界型非線形楕円型偏微分方程式を考える:

$$
\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}, & x \in \mathbb{R}^n \\ u > 0 \end{cases} \tag{4.1}
$$

この方程式は Sobolev の臨界指数を持つ非線形楕円型方程式でそのなめらかな解は球対称で, あらわに書き下せることが知られている:

Proposition 4.1. 方程式 (4.1) の解について以下のことがいえる.

(1) 問題 (4.1) のなめらかな解は球対称なもので与えられ, 平行移動とスケール変換の自由度のぞいて一意的であって

$$
u(x) = \frac{1}{(1+|x|^2/n(n-2))^{\frac{n-2}{2}}}
$$

で与えらる.

(2) *Sobolev* の不等式

$$\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \le S_n^2 \|\nabla f\|_2^2$$

の最良定数は方程式 *(4.1)* の解で達成される

$$S_n^{-2} = \inf \frac{\|\nabla f\|_2^2}{\|f\|_{2^*}^2} = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}.$$

さて, ここでは問題 (4.1) の双対版を考える. すなわち非線形楕円型偏微分方程式を考える:

$$\begin{cases} -\dfrac{2n}{n-2}\Delta U^{\frac{n-2}{n+2}} = U, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ U > 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

このとき以下が成り立つことがすぐにわかる.

- Sobolev の不等式

$$\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \le S_n^2 \|\nabla f\|_2^2$$

- 最良定数

$$S_n^{-2} = \inf \frac{\|\nabla f\|_2^2}{\|f\|_{2^*}^2} = \frac{\|\nabla U^{\frac{n-2}{n+2}}\|_2^2}{\|U\|_{\alpha_*}^{\frac{2(n-2)}{n+2}}} = \frac{\|U\|_{\alpha_*}^2}{\||\nabla|^{-1}U\|_2^2}$$

- 双対版の minimizer は $U(x) = \left(\frac{2n}{n-2}\right)^{\frac{n+2}{4}} u^{\frac{n+2}{n-2}}(x)$ となる.

非線形楕円型方程式 (4.2) の解を用いて指数　$\alpha = \alpha_* = \frac{2n}{n+2}$ の場合に, 初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \Delta \rho^{\alpha_*} + \nabla \cdot (\rho \nabla \psi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ -\Delta \psi = \rho, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), \end{cases}$$

の解の大域挙動を $H(t)$ に制限を加えた上で分類できる. 重み付き L^1 を以下で定義する.

$$L^1_2(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); |x|^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

このとき $\alpha_* = 2 - \frac{4}{n+2}$ の場合に

Theorem 4.2 ([22]). *$n \ge 3$, $\alpha = \alpha_* \equiv \frac{2n}{n+2}$ かつ $\rho_0 \ge 0$, $\rho_0 \in L^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^1_2(\mathbb{R}^n)$ とする. 初期条件が $H(\rho_0) < \frac{2}{n-2}\|U\|_{\alpha_*}^{\alpha_*} = H(U)$ を満たすとき以下が成り立つ:*

(1) 初期値 ρ_0 が $\|\rho_0\|_{\alpha_*} < \|U\|_{\alpha_*}$ であれば (DD) の 時間大域的弱解が存在する.
(2) 初期値 ρ_0 が $\|\rho_0\|_{\alpha_*} > \|U\|_{\alpha_*}$ であれば (DD) の弱解は 有限時間内で爆発する.

Remark. Theorem 4.2 においては,α_* の場合と異なり, 大域解の存在の是非が $\|\rho_0\|_{\alpha_*}$ で分類できる. $\alpha_* = 2 - \frac{2}{n}$ のときには $\|\rho_0\|_1$ で分類された.

同様の結果は各種の半線形 Sobolev 臨界型方程式で得られている. たとえば 非線形波動方程式や非線形 Scrödinger 方程式については Kenig-Merle [8], [9] が知られている.

次に上記で得られる時間大域解は $t \to \infty$ で減衰する. 実際次の結果が得られる.

Theorem 4.3 ([21]). *Theorem 4.2 の (1) の仮定の下で $\rho(t)$ は減衰し次の評価が成り立つ:*

$$\|\rho(t)\|_q \le C(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{q})}, \qquad \sigma = n(\alpha-1)+2, \quad 1 < q \le \alpha_*.$$

状況を一覧表にすると以下のようになる.

α	状況	臨界ノルム	初期値が小さいとき	大きいとき
1	半線形	$L^{n/2}$	大域解 (減衰)$(n=2)$	有限時間爆発 $(n \geq 2)$
$1 < \alpha < \alpha_*$	優臨界	$L^{\frac{n}{2}(2-\alpha)}$		有限時間爆発
$\alpha_* \equiv 2 - \dfrac{4}{n+2}$	Sobolev 臨界	L^{α_*}	大域解 (減衰)	有限時間爆発
$\alpha_* < \alpha < \alpha^*$		$L^{\frac{n}{2}(2-\alpha)}$	大域解 (減衰)	有限時間爆発
$\alpha^* \equiv 2 - \dfrac{2}{n}$	擬等角 (藤田) 臨界	L^1	大域解 (減衰)	有限時間爆発
$\alpha^* < \alpha$	劣臨界		大域解	大域解

なお上記の各項には, いくつかの付加条件が必要になる. 特に $n = 2$ のとき $\alpha = 1$ は臨界指数が重なっている状況で多重臨界であることがわかる.

References

[1] Biler, P., Dolbeault, J., *Long time behavior of solutions to Nernst-Planck and Debye-Hünkel drift-diffusion systems* Ann. Henry Poincaré, **1** (2000), 461–472

[2] Biler, P., Nadzieja, T., Stanczy, R., *Nonisothermal systems of self-attracting Fermi-Dirac particles*, Banach Center Pulb. **66** (2004), 61–78.

[3] Blanchet, A., Dobeault, J., Perthame, B., *Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions,* Electron. J. Differential Equations, **2006** (2006) No. 44, 1–33.

[4] Díaz, J. I., Galiano, G. , Jüngel, A., *On a quasilinear degenerate system arising in semiconductor theory, Part II*, Nonlinear Anal., **36** (1999), 569-594.

[5] Jüngel, A., *Qualitative behavior of solutions of a degenerate nonlinear drift-diffusion model for semiconductors*, Math. Models Methods Appl. Sci., **5** (1995), no.4, 497-518.

[6] Keller, E. F., Segel, L. A. , Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theor. Biol., **26** (1970), 399-415.

[7] Kawashima, S., Kobayashi, R., *Decay estimates and large time behavior of solutions to the drift-diffusion system,* Funkcial. Ekvac. **51** (2008), no. 3, 371–394.

[8] Kenig, C. E., Merle, F., *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case.* Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.

[9] Kenig, C. E., Merle, F., *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing non-linear wave equation.* Acta Math., **201** (2008), no. 2, 147–212.

[10] Kobayashi,T., Ogawa, T., *Fluid mechanical approximation to the degenerated drif-diffusion and chemotaxis equations in barotoropic model*, preprint.

[11] Kurokiba,M., Nagai, T., Ogawa, T., *The uniform boundedness and threshold for the global existence of the radial solution to a drift-diffusion system*, Comm. Pure Appl. Anal., **5** (2006), 97-106.

[12] Kurokiba, M., Ogawa, T., *Finite time blow-up of the solution for the nonlinear parabolic equation of the drift diffusion type*, Diff. Integral Equations **16** no. 4 (2003), 427-452.

[13] Kurokiba,M., Ogawa, T., *Well-posedness for the drift-diffusion system in L^p arising from the semiconductor device simulation*, J. Math. Anal. Appl., **342** (2008), 1052-1067.

[14] Luckhaus, S., Sugiyama, Y., *Asymptotic profile with the optimal convergence rate for a parabolic equation of chemotaxis in super-critical cases*, Indiana Univ. Math. J. in press.

[15] Mock, M.S., *An initial value problem from semiconductor devise theory* SIAM, J. Math. **5** no 4 (1974), 597-612

[16] Nagai, T., *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci.Appl., **5** (1995), 581-601.

[17] Nagai, T., *Blowup of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, J. Inequal. Appl., 6 (2001), 37–55.

[18] Nagai,T., Mimura, M., *Some nonlinear degenerate diffusion equations related to population dynamics,* J. Math. Soc. Japan, **35** (1983), 539-562.

[19] Nagai, T., Senba, T., Yoshida, K., *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), no.3, 411-433.

[20] Ogawa, T., *Decay and asymptotic behavior of a solution of the Keller-Segel system of degenerated and non-degenerated type*, Banach Center Publ. **74** (2006), 161-184.

[21] Ogawa, T., *Asymptotic stability of a decaying solution to the Keller-Segel system of degenerate type*, Integral Diff. Equations, **21** (2008), 1113-1154.

[22] Ogawa,T., *The degenerate drift-diffusion system with the Sobolev critical exponent*, preprint.

[23] Selberherr, S., *Analysis and Simulation of Semiconductor Devices*, Springer Verlag, 1984.

[24] Sugiyama, Y., *Global existence in sub-critical cases and finite time blow-up in super-critical cases to degenerate Keller-Segel system*, Diff. Integral Equations, **19** (2006), 841-876.

[25] Sugiyama, Y., Kunii, H., *Global existence and decay properties of degenerate Keller-Segel model witha power factor in drift term*, J. Diff. Equations, **227** (2006), 333-364.

[26] Yagi, A., *Norm behavior of solutions to a parabolic system of chemotaxis*, Math. Japon., **45** (1997), no.2, 241-265.