

多安定型反応拡散方程式におけるフロントの相互作用

荻原 俊子 (城西大学理学部)

(共同研究者: 中村 健一 (電気通信大学))

1. Introduction

次の反応拡散方程式

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1)$$

を考える. ここで, $\varepsilon > 0$ は微小パラメータであり, 非線形項 $f(u)$ から定まるポテンシャル

$$W(u) := - \int_0^u f(s) ds$$

は同じ深さの底を複数持つ多重井戸型ポテンシャルであるとする.

ポテンシャル $W(u)$ が $u = 0, 1$ に同じ深さの底を持つ 2 重井戸型の場合, (1) は Allen-Cahn 方程式と呼ばれ, 2 成分系の相分離を記述するモデルとしてよく知られている. このとき, 方程式 (1) は自由エネルギー

$$H[u] := \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} |u_x|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u) \right\} dx$$

に対する勾配流

$$u_t = - \frac{\delta H}{\delta u}$$

として導出される. したがって, (1) は 2 つの安定定数平衡解 $u \equiv 0, 1$ を持ち, 方程式の解に値が 0 から 1 に, あるいは 1 から 0 に急激に変化する界面 (もしくは内部遷移層) と呼ばれる部分が現れる. 複数の界面が存在する場合にそれらがどのように運動するかについては, Carr-Pego [2], Fusco-Hale [9] らの研究により, 準安定なパターンが非常にゆっくりと動くこと, および, 隣り合う界面の相互作用は引力的 (attractive) であることが示されている (図 1 参照). また, Chen [3] は界面が形成され準安定なパターンができるまでのダイナミクスや隣り合う界面の衝突・消滅の様子を厳密に調べている.

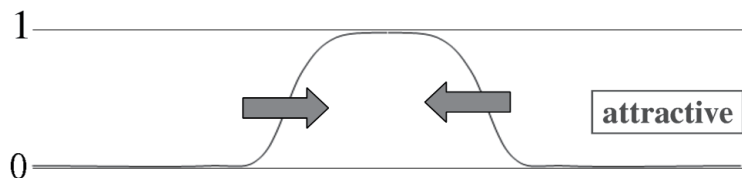


図 1: 双安定系の界面ダイナミクス

それでは、ポテンシャル $W(u)$ が深さの同じ底を多数持つ場合に界面はどのように運動するのであろうか。例えば、ファセットのある結晶成長のモデルなどで用いられる overdamped sine-Gordon 型方程式

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{\varepsilon^2} \sin(2\pi u)$$

の場合、 $W(u)$ は $u = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) に底を持つポテンシャルとなる。本稿では、このように非線形項 $f(u)$ から定まるポテンシャル $W(u)$ が無限に多くの安定状態を持つ、多安定型非線形項の場合の界面の運動について考察する。このとき、図 2 のように、安定相の個数に対応して界面の種類も豊富になることに注意する。

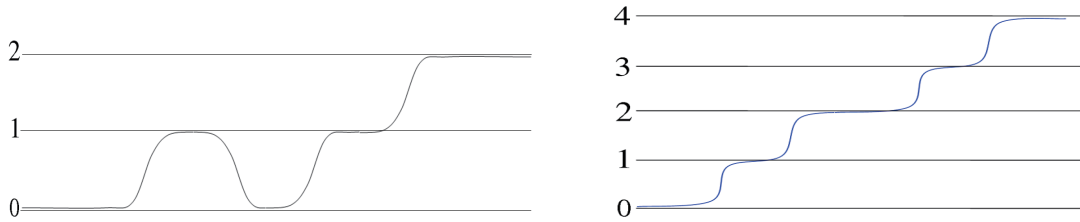


図 2: 多安定系の界面

2. Results

以下、非線形項 $f(u)$ は次をみたすとする:

(A1) $f \in C^2$;

(A2) $f(u)$ は 1-周期関数;

(A3) $f(u)$ は区間 $[0, 1]$ にちょうど 3 つの零点 $0, \alpha, 1$ ($0 < \alpha < 1$) を持つ;

(A4) $f'(0) = f'(1) < 0$, $f'(\alpha) > 0$;

(A5) $\int_0^1 f(u) du = 0$.

上で述べた sine-Gordon 型非線形項 $f(u) = -\sin(2\pi u)$ が典型例である。仮定 (A1)-(A5) の下で、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $u \equiv k$ は (1) の安定な定数平衡解であり、 $u \equiv a_k := k - 1 + \alpha$ は不安定な定数平衡解である。また、

$$\begin{cases} \varphi_{yy} + f(\varphi) = 0, & y \in \mathbb{R}, \\ \varphi(-\infty) = 0, \varphi(+\infty) = 1, \varphi(0) = \alpha. \end{cases}$$

をみたす $\varphi(y)$ が一意に存在し ([8]), 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Phi(x; \xi) := \varphi\left(\frac{x - \xi}{\varepsilon}\right)$$

は(1)の平衡解となる(これを0と1を結ぶ1段の *standing wave* と呼ぶことにする). さらに, $f(u)$ の周期性により任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\Phi(x; \xi) + k$ は(1)の平衡解(すなわち, k と $k+1$ を結ぶ1段の *standing wave*) となることに注意する.

簡単のため, 初期値 u_0 は, ある自然数 $n \geq 2$ に対して

$$u_0 \in C^2, \quad u_0'(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a_0 < \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) < a_1, \quad a_n < \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) < a_{n+1} \quad (2)$$

をみたすものとする(このような初期値のクラスを X と表す). このとき, u_0 を初期値とする(1)の解 $u(x, t)$ の挙動は以下のような複数のステージに分けることができる:

- 第1ステージ 複数の界面を持つステップパターンの形成;
- 第2ステージ 準安定 (metastable) なステップパターンへの漸近;
- 第3ステージ ステップ間の相互作用による非常にゆっくりとした運動;
- 第4ステージ 時間無限大での漸近挙動.

以下では, それぞれのステージにおける $u(x, t)$ の振る舞いについて得られた数学的結果について述べる.

記号: $0 < r < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$ とし,

$$\xi^1 < \dots < \xi^n, \quad \xi^{k+1} - \xi^k > 2\rho \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

をみたす $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n, \rho > 0$ に対し,

$$X_n(\xi, \rho) := \{v \in X \mid a_k + r \leq v(x) \leq a_{k+1} - r \text{ for } x \in [\xi^k + \rho, \xi^{k+1} - \rho], k = 0, \dots, n\}$$

と定義する(ただし, $\xi^0 = -\infty, \xi^{n+1} = +\infty$ と解釈する). 粗く述べると, $v \in X_n(\xi, \rho)$ は各 $k = 1, \dots, n$ に対し v の左から k 番目の界面が ξ^k の ρ -近傍にあることを意味する.

第1ステージ : Generation of steps

初期値 u_0 に関する仮定より, $u_0(\xi_0^k) = a_k$ ($k = 1, \dots, n$) をみたす $\xi_0 = (\xi_0^1, \dots, \xi_0^n) \in \mathbb{R}^n$ が一意に存在する. ε が非常に小さいとき, (1)の拡散項は反応項に比べて非常に小さいので無視でき, また仮定より定数平衡解 $u \equiv k$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) は非常に強い安定性を持つため, u_0 を初期値とする(1)の解 $u(x, t)$ は $x = \xi_0^k$ ($k = 1, \dots, n$) の近傍にステップ状の界面を短時間のうちに形成する.

Theorem 1 $u_0 \in X$ とする. このとき, $\delta_1 = \delta_1(u_0, f) > 0$ が存在して, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し

$$u(\cdot, t_1^\varepsilon) \in X_n(\xi_1, \delta_1 \varepsilon)$$

が成り立つ. ただし, $t_1^\varepsilon := \varepsilon^2 |\log \varepsilon| / |f'(0)|$, $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^n) = (\xi_0^1, \dots, \xi_0^n) + O(\varepsilon)$ である.

すなわち、時刻 t_1^ε 後には $x = \xi_0^k$ ($k = 1, \dots, n$) の付近に幅が $2\delta_1\varepsilon$ 以下の界面が形成される。

Theorem 1 (ならびに、以下で述べる Theorem 2 と 3) は [3] および [5] で用いられた手法を多安定型非線形項の場合に適用できるように修正することで証明できる。具体的には、Theorem 1 の証明には優解と劣解を構成し比較定理を適用する手法を用いる。

第2ステージ : Generation of metastable steps

次に、 $x = \xi_1^k$ ($k = 1, \dots, n$) に界面が形成された後の解の挙動を調べる。時刻 t_1^ε 経過後は $u_x = O(\varepsilon^{-1})$ となり、(1) の拡散項と反応項が同じオーダーとなる。

$n = 1$ (すなわち、界面が1つ) の場合には、 $u(x, t)$ は $t \rightarrow +\infty$ において standing wave のどれかに漸近することが知られている ([8]):

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \|u(\cdot, t) - \Phi(\cdot; \xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +\infty.$$

一方、 $n \geq 2$ の場合は、 $f(u)$ の周期性により、0 と n を結ぶ n 段の standing wave は存在しないことが相平面図を用いた解析から容易にわかる。しかし、各 $k = 1, \dots, n$ に対し $k-1 < u < k$ なる範囲においては、 $u(x, t)$ は $k-1$ と k を結ぶ1段の standing wave $\Phi(x; \xi) + k-1$ に非常に近い形状になる。

Theorem 2 $t_2^\varepsilon = O(\varepsilon) > 0$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^n) = \xi_1 + O(\varepsilon)$ が存在して、 $k = 1, \dots, n$ に対し

$$\sup_{\frac{\xi_1^{k-1} + \xi_1^k}{2} \leq x \leq \frac{\xi_1^k + \xi_1^{k+1}}{2}} |u(x, t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon) - \{\Phi(x; \xi_2^k) + k - 1\}| = O(e^{-\frac{C}{\varepsilon} d_1})$$

が成り立つ (ただし、 $\xi_1^0 = -\infty$, $\xi_1^{n+1} = +\infty$ と解釈する)。ここで、 C は ε によらない正定数で、 $d_1 := \min_{1 \leq k \leq n-1} (\xi_1^{k+1} - \xi_1^k) > 0$ とする。したがって、

$$\left\| u(\cdot, t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon) - \sum_{k=1}^n \Phi(\cdot; \xi_2^k) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(e^{-\frac{C}{\varepsilon}})$$

が成り立つ。

すなわち、時刻 $t_1^\varepsilon + t_2^\varepsilon$ 経過後の解 u は、1 段の standing wave を積み重ねた図 3 のような階段状の形をしている。

Theorem 2 の証明には、Theorem 1 より $u(\cdot, t_1^\varepsilon) \in X_n(\xi_1, \delta_1\varepsilon)$ であることに着目し、初期値問題

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = u_{xx}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u^\varepsilon), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u^\varepsilon(\cdot, 0) \in X_n(\xi_1, \delta_1\varepsilon) \end{cases}$$

について解析を行う。

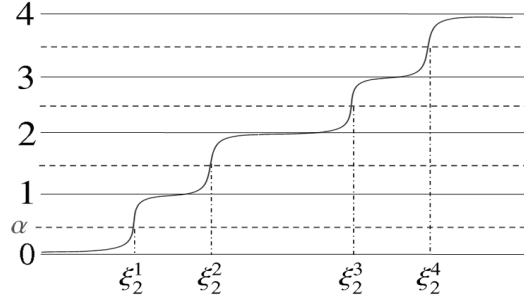


図 3: $u(x, t_1^\epsilon + t_2^\epsilon)$ のプロファイル (概念図)

第 3 ステージ : Very slow motion

Theorem 2 より, u_0 を初期値とする (1) の解 $u(x, t)$ は時刻 $t_1^\epsilon + t_2^\epsilon = O(\epsilon)$ 経過後には

$$M := \left\{ \sum_{k=1}^n \Phi(\cdot, \xi^k) \mid \xi^1 < \dots < \xi^n \right\}$$

で定義される集合の $O(e^{-\frac{c}{\epsilon}})$ -近傍に含まれることになる. この近傍内では拡散項と反応項がつりあって解はほとんど平衡状態にあるが, 近傍内には平衡解は存在しない. そのため, 隣接するフロント間の非常に弱い相互作用により界面が非常にゆっくりと動くことになる. このような準安定なパターンのゆっくりとした動きについては, 最初に述べた Allen-Cahn 方程式に対する Carr-Pego [2], Fusco-Hale [9] の研究の他, Cahn-Hilliard 方程式に対する Alikakos-Bates-Fusco [1] の結果, Gierer-Meinhardt 方程式系に対する Chen-Kowalczyk [4], Ei-Wei [7] の結果等が知られている.

(1) において, 次が成り立つ:

Theorem 3 M の $O(e^{-\frac{c}{\epsilon}})$ -近傍内にある解を

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \Phi(x; \xi^k(t)) + r(x, t), \quad r(x, t) = O(e^{-\frac{c}{\epsilon}})$$

と表したとき, 隣接フロント間の (スケーリングした) 距離

$$l^k(t) := \frac{\xi^{k+1}(t) - \xi^k(t)}{\epsilon} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

は次の方程式系をみたす (ただし, $l^0(t) = +\infty = l^n(t)$ と解釈する).

$$\epsilon^2 \frac{dl^k}{dt} = M \left(2e^{-\lambda l^k} - e^{-\lambda^{k+1}} - e^{-\lambda^{k-1}} \right) (1 + O(e^{-\gamma d(t)})) \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

ここで, M, λ, γ は正定数, $d(t) := \min_{1 \leq k \leq n-1} (\xi^{k+1}(t) - \xi^k(t))$ である.

特に, 界面の個数が2のときは,

$$\varepsilon^2 \frac{dl^1}{dt} = 2Me^{-\lambda l^1} (1 + O(e^{-\gamma d(t)})) > 0$$

が成り立つので, 図4のように隣接フロント間の相互作用は斥力的 (repulsive) であることがわかる.

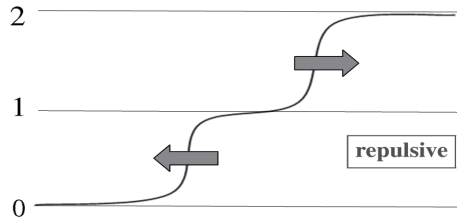


図 4: 多安定系の界面ダイナミクス

Remark 1 (3) は, Ei-Nishiura-Ueda [6] により導出された, Gray-Scott 系の隣接パルス間距離のみたす方程式系と全く同じ形をしている.

第4ステージ: Limiting behavior

以下では, $f(u)$ にさらに次の条件を課す:

(A6) $f(1-u) = -f(u)$ for $u \in \mathbb{R}$.

初期値 u_0 に対するある対称性の仮定の下で, 解 $u(x, t)$ の時間無限大での漸近形が決定できる.

Theorem 4 初期値 $u_0 \in X$ が (2) をみたすとき,

$$u_0(x) + u_0(-x) = n, \quad x \in \mathbb{R}$$

が成り立てば, \mathbb{R} 上広義一様に

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \Phi(x; 0) + \frac{n-1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

である.

これより, (1) の解 $u(x, t)$ は時間無限大で, n が偶数ならば安定定数平衡解 $u \equiv n/2$ に漸近し (図5), n が奇数ならば $(n-1)/2$ と $(n+1)/2$ を結ぶ1段の standing wave に漸近する (図6) ことがわかる.

初期値 u_0 に対する仮定

$$u_0(x, 0) + u_0(-x, 0) = n, \quad x \in \mathbb{R}$$

より

$$u_0(x, t) + u_0(-x, t) = n, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

が成り立つ, つまり, $t > 0$ のとき $u(\cdot, t)$ も $x = 0$ に関し対称な形をしている. このことに着目し, 半区間 $(-\infty, 0]$ 上の初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u), & x < 0, t > 0, \\ u(0, t) = \frac{n}{2}, & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x < 0 \end{cases}$$

に対し比較定理を用いることにより Theorem 4 は証明できる.

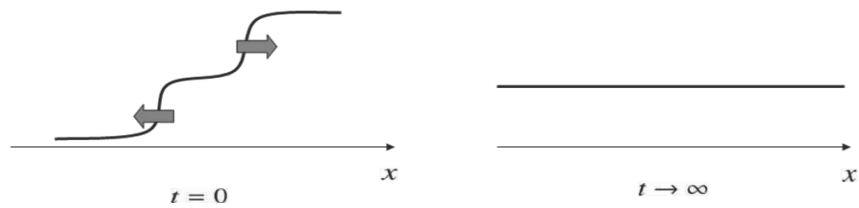


図 5: 多安定系における解の漸近形 (n が偶数のとき)

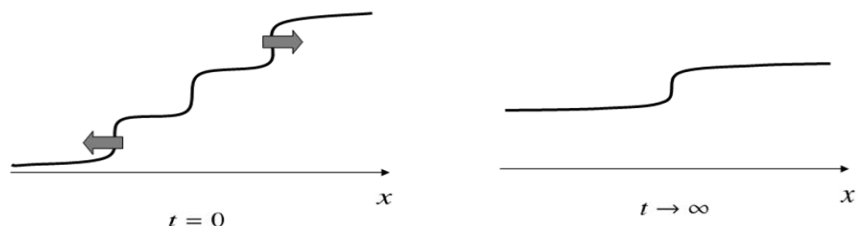


図 6: 多安定系における解の漸近形 (n が奇数のとき)

References

- [1] N. D. Alikakos, P. W. Bates and G. Fusco, *Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension*, J. Differential Equations, **90** (1991), 81–135.
- [2] J. Carr and R. L. Pego, *Metastable patterns in solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$* , Comm. Pure. Appl. Math., **42** (1989), 523–576.
- [3] X. Chen, *Generation, propagation, and annihilation of metastable patterns*, J. Differential Equations, **206** (2004), 399–437.
- [4] X. Chen and M. Kowalczyk, *Slow dynamics of interior spikes in the shadow Gierer-Meinhardt system*, Adv. Differential Equations, **6** (2001), 847–872.
- [5] S.-I. Ei, *The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems*, J. Dynam. Diff. Eqs., **14** (2002), 85–137.
- [6] S.-I. Ei, Y. Nishiura and K. Ueda, *2^n -Splitting or Edge-Splitting? — A manner of Splitting in Dissipative Systems —*, Japan J. Indust. Appl. Math., **18** (2001), 181–205.
- [7] S.-I. Ei and J. Wei, *Dynamics of metastable localized patterns and its application to the interaction of spike solutions for the Gierer-Meinhardt systems in two spatial dimensions*, Japan J. Indust. Appl. Math., **19** (2002), 181–226.
- [8] P. C. Fife and J. B. McLeod, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to traveling front solutions*, Arch. Rational Mech. Anal., **65** (1977), 335–361.
- [9] G. Fusco and J. K. Hale, *Slow-motion manifolds, dormant instability, and singular perturbations*, J. Dynam. Diff. Eqs., **1** (1989), 75–94.