熱伝導圧縮性粘性流体の半空間上の定常解について

西畑 伸也　東京工業大学 情報理工学研究科

本稿では，圧縮性粘性流体の熱伝導理想気体モデル (1) に対する，半空間 $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$ 上の時間大域解の存在と漸近挙動について考察した結果を報告する．

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{1a}$$

$$(\rho u)_t + \big(\rho u^2 + p(\rho,\theta)\big)_x = \mu u_{xx}, \tag{1b}$$

$$\Big\{\rho\Big(c_{\mathrm{v}}\theta + \frac{u^2}{2}\Big)\Big\}_t + \Big\{\rho u\Big(c_{\mathrm{v}}\theta + \frac{u^2}{2}\Big) + p(\rho,\theta)u\Big\}_x = \big(\mu u u_x + \kappa\theta_x\big)_x. \tag{1c}$$

ここで， $\rho\,(>0)$, u, $\theta\,(>0)$ は，それぞれ，流体密度，流体速度，絶対温度を表す未知関数である．理想気体では，圧力 $p = p(\rho,\theta)$ は，ボイル・シャルルの法則 $p(\rho,\theta) := R\rho\theta$ で与えられる．ここで，R は気体常数．また，物理定数 μ, κ, c_{v} は，それぞれ，粘性係数，熱伝導係数，定積比熱を意味する．さらに，定積比熱は，断熱定数 $\gamma\,(>1)$ を用いて，$c_{\mathrm{v}} = R/(\gamma-1)$ と表わされる．

方程式系 (1) に対する初期条件を

$$(\rho,u,\theta)(0,x) = (\rho_0,u_0,\theta_0)(x) \tag{2}$$

とする．初期値 (ρ_0,u_0,θ_0) は，空間無限遠方 $(x\to\infty)$ で定数状態 $(\rho_+,\,u_+,\,\theta_+)$ に漸近し，密度と絶対温度は真に正とする．つまり，

$$\lim_{x\to\infty}(\rho_0,u_0,\theta_0)(x) = (\rho_+,u_+,\theta_+), \quad \rho_+ > 0, \quad \theta_+ > 0, \tag{3}$$

$$\inf_{x\in\mathbb{R}_+}\rho_0(x) > 0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}_+}\theta_0(x) > 0. \tag{4}$$

熱伝導理想気体モデル (1) に対する境界条件は，境界上での流速の正負に応じ，三つのケースが考えられる：

$$u(t,0) = u_{\mathrm{b}} < 0, \quad \theta(t,0) = \theta_{\mathrm{b}} > 0, \tag{5a}$$

$$\rho(t,0) = \rho_b > 0, \quad u(t,0) = u_{\mathrm{b}} > 0, \qquad \theta(t,0) = \theta_{\mathrm{b}} > 0, \tag{5b}$$

$$u(t,0) = u_{\mathrm{b}} = 0, \quad \theta(t,0) = \theta_{\mathrm{b}} > 0. \tag{5c}$$

ここで，ρ_b, u_{b}, θ_{b} は与えられた定数である．条件 (5a) 中の $u_{\mathrm{b}} < 0$ は，境界から流体が流れ出すことを意味し，**流出境界条件**と呼ばれている．このとき，双曲型方程式 (1a) の特性速度 u は境界近傍で負となり，密度 ρ に対する境界条件を課さずに，初期境界値問題 (1), (2), (5a) は適切となる．一方，条件 (5b) では境界近傍での流速は正で有り，**流入境界条件**と呼ばれる．この場合，(1a) の境界近傍での特性速度は正となり，初期境界値問題が適切となる為に，密度に対する条件が必要となる．最後に，条件 (5b) は境界で流れは無く，**不透過境界条件**と呼ばれる．この条件に関する研究成果は，数多く知られている．

本稿では，流出境界条件 (5a) 及び流入境界条件 (5b) の下での，筆者等によって得られた研究結果について報告する．主要な結果は，定常解が一意的に存在し，漸近安定であることである．さらに，流出境界条件下では，初期摂動の空間無限遠方 $(x\to\infty)$ での収束の速さに応じて，時間無限 $(t\to\infty)$ での定常解への収束レートが得られている．

$\boxed{\textbf{流出境界条件}:\ u_b < 0}$

流出境界条件 (5a) に関する，川島秀一，中村徹, P. Zhu 諸氏との共同研究による論文 [2] の主要定理を紹介する．具体的な結果は，初期境界値問題 (1), (2), (5a) に時間大域解が存在し，その漸近挙動が定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ で与えられることである．定常解とは，時間変数 t に独立な方程式系 (1) の解で境界条件 (3), (4), (5a) を満たす関数を意味する．従って，定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ は，常微分方程式系

$$(\tilde{\rho}\tilde{u})_x = 0, \tag{6a}$$

$$\big(\tilde{\rho}\tilde{u}^2 + p(\tilde{\rho}, \tilde{\theta})\big)_x = \mu \tilde{u}_{xx}, \tag{6b}$$

$$\Big\{\tilde{\rho}\tilde{u}\Big(c_{\mathrm{v}}\tilde{\theta} + \frac{\tilde{u}^2}{2}\Big) + p(\tilde{\rho}, \tilde{\theta})\tilde{u}\Big\}_x = \big(\mu\tilde{u}\tilde{u}_x + \kappa\tilde{\theta}_x\big)_x, \tag{6c}$$

境界条件

$$(\tilde{u}, \tilde{\theta})(0) = (u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}}), \quad \lim_{x\to\infty}(\tilde{\rho}(x), \tilde{u}(x), \tilde{\theta}(x)) = (\rho_+, u_+, \theta_+), \tag{7}$$

及び，正値性

$$\inf_{x\in\mathbb{R}_+} \tilde{\rho}(x) > 0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}_+} \tilde{\theta}(x) > 0. \tag{8}$$

を満たす．定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ が存在しているとき，方程式 (6a) を $[0, \infty)$ 上で積分して，関係式

$$\tilde{\rho}(0)u_b = \rho_+ u_+$$

を得る．密度の正値性 $\tilde{\rho} > 0$ より，境界と無限遠方における速度の符号が一致することが解かる．従って，流出境界条件「$u_b < 0$」下では，定常解が存在する為には条件「$u_+ < 0$」が必要となる．

定常解の存在と性質の解析では，無限遠方 (ρ_+, u_+, θ_+) でのマッハ数 M_+ と音速 c_+

$$M_+ := \frac{|u_+|}{c_+}, \quad c_+ := \sqrt{R\gamma\theta_+} \tag{9}$$

及び，境界条件の強さ δ

$$\delta := |(u_+, \theta_+) - (u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}})|. \tag{10}$$

が重要な役割をはたす．

Proposition 1 (定常解の存在). $u_+ < 0$ とする．

(i) 無限遠方で $\underline{超音速\ M_+ > 1}$ のとき，定数 ε_0 が存在して，$\delta \le \varepsilon_0$ ならば，定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ が存在して，

$$|\partial_x^k(\tilde{\rho}(x) - \rho_+, \tilde{u}(x) - u_+, \tilde{\theta}(x) - \theta_+)| \le C\delta e^{-cx} \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{11}$$

を満たす．

(ii) 無限遠方で $\underline{音速\ M_+ = 1}$ のとき，平衡点 (u_+, θ_+) の近傍に局所安定多様体 $\theta = \tilde{h}^{\mathrm{s}}(u)$ と 局所中心多様体 $\theta = \tilde{h}^{\mathrm{c}}(u)$ が存在し，$\delta \le \varepsilon_0$ かつ $\theta_{\mathrm{b}} \le \tilde{h}^{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{b}})$ ならば，定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ が存在し，

$$|\partial_x^k(\tilde{\rho}(x) - \rho_+, \tilde{u}(x) - u_+, \tilde{\theta}(x) - \theta_+)| \le C\frac{\delta^{k+1}}{(1 + \delta x)^{k+1}} + C\delta e^{-cx} \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{12}$$

が成立する．

(iii) 無限遠方で 遷音速 $M_+ < 1$ のとき，平衡点 (u_+, θ_+) の近傍に局所安定多様体 $\theta = \tilde{h}^{\mathrm{s}}(u)$ と局所不安定多様体 $\theta = \tilde{h}^{\mathrm{u}}(u)$ が存在し，境界値 $(u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}})$ が条件 $\delta \le \varepsilon_0$ と $\theta_{\mathrm{b}} = \tilde{h}^{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{b}})$ とを満たすならば，境界値問題 (6c), (13), (8) に一意的に解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ が存在する．さらに，$(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ は (11) を満たす．

本定理は，主に中心多様対定理を用いて証明される．定理中の局所安定多様体，局所中心多様体等の詳細な形状については，論文 [2] を参照されたい．定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ は，小さな摂動に対して漸近安定となる．詳しくは，次の定理が成立する．

Theorem 2 (**漸近安定性**). 前命題と同じ仮定が成立し，定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ が存在するものとする．初期値 (ρ_0, u_0, θ_0) がヘルダー空間 $(\rho_0, u_0, \theta_0) \in (\mathcal{B}^{1+\sigma} \times \mathcal{B}^{2+\sigma} \times \mathcal{B}^{2+\sigma})(\mathbb{R}_+)$ に属するとする．ここで，$\sigma \in (0, 1)$. このとき，正定数 ε_1 が存在して，

$$\|(\rho_0, u_0, \theta_0) - (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})\|_{H^1} + \delta \le \varepsilon_1,$$

ならば，初期境界値問題 (1), (2), (5a) には時間大域解が一意的に存在し，

$$(\rho, u, \theta) \in (\mathcal{B}^{1+\sigma/2, 1+\sigma} \times \mathcal{B}^{1+\sigma/2, 2+\sigma} \times \mathcal{B}^{1+\sigma/2, 2+\sigma})([0, \infty) \times \mathbb{R}_+),$$
$$(\rho - \tilde{\rho}, u - \tilde{u}, \theta - \tilde{\theta}) \in C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}_+))$$

を満たす．さらに，解 (ρ, u, θ) は，時間漸近的に定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ に収束する．

$$\lim_{t \to \infty} \|(\rho, u, \theta)(t) - (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})\|_{L^\infty} = 0.$$

本定理は，定常解の満たす減衰評価 (11) または (12) を利用して，エネルギー法によって証明される．さらに，超音速 $M_+ > 1$ または音速 $M_+ = 1$ の場合には，重み付きのエネルギー法によって，定常解への収束の速さが得られている．

Theorem 3 (**収束レート**). 前定理と同じ仮定が，成立しているとする．

(i) 無限遠方で 超音速 $M_+ > 1$ とする．初期値が条件 $(1+x)^{\alpha/2}(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u}, \theta_0 - \tilde{\theta}) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ を満たすならば (α は正定数)，任意の時間 $t > 0$ で解 (ρ, u, θ) は評価式

$$\|(\rho, u, \theta)(t) - (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\alpha/2}$$

を満たす．ここで，C は時間 t に依存しない正定数である．

(ii) 無限遠方で 音速 $M_+ = 1$ とする．$1 \le \alpha < 2(1+\sqrt{2})$ を満たす定数 α に対し，正定数 ε_2 が存在して，不等式

$$\delta^{-1/2}\|(1+x)^{\alpha/2}(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u}, \theta_0 - \tilde{\theta})\|_{H^1} \le \varepsilon_2,$$

が成立するならば，任意の時間 $t > 0$ で解 (ρ, u, θ) は評価式

$$\|(\rho, u, \theta)(t) - (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})\|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-\alpha/4}$$

を満たす．ここで，C は時間 t に依存しない正定数である．

流入境界条件： $u_b > 0$

中村徹氏との共同研究 ([7]) による，流出境界条件下での時間大域解の存在及びその漸近挙動に関する結果を紹介する．主要な結果は，初期・境界値問題 (1), (2), (5b) に対する定常解の存在及び漸近安定性の証明である．ここでは，定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ は境界条件 (5b) 及び初期値に対する条件 (3) を満たし，時間 t には依存しない方程式 (1) の解である．従って，方程式系 (6) をみたす．さらに，境界条件

$$(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})(0) = (\rho_{\mathrm{b}}, u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}}), \quad \lim_{x\to\infty} (\tilde{\rho}(x), \tilde{u}(x), \tilde{\theta}(x)) = (\rho_+, u_+, \theta_+), \tag{13}$$

と，正値性 (8) を満たす.

定常解の存在や漸近安定性の証明では，やはり (9) で定義される無限遠方におけるマッハ数 M_+, 音速 c_+ 及び定常解の大きさ δ

$$\delta := |(\rho_+, u_+, \theta_+) - (\rho_{\mathrm{b}}, u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}})|$$

が重要となる．定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ が存在しているとき，方程式 (6a) を $[0, \infty)$ 上で積分して，定常解存在の為の必要条件

$$\rho_b u_b = \rho_+ u_+ \tag{14}$$

を得る.

Proposition 4 (**定常解の存在**). 境界条件は，(14) を満たすとする．

(i) $\underline{M_+ < 1}$ とする．このとき状態空間 $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ での平衡点 (u_+, θ_+) の周りに局所安定多様体 $\tilde{h}^{\mathrm{s}}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) = 0$ と局所不安定多様体 $\tilde{h}^{\mathrm{u}}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) = 0$ が存在する．さらにある正定数 ε_0 が存在して $\delta \leq \varepsilon_0$ かつ $h^{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}}) = 0$ ならば，定常問題 (6c), (13) は一意の滑らかな解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ を持ち，次の評価式が成立する．

$$|\partial_x^k (\tilde{\rho}(x) - \rho_+, \tilde{u}(x) - u_+, \tilde{\theta}(x) - \theta_+)| \leq C\delta e^{-cx} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

(ii) $\underline{M_+ = 1}$ とする．このとき平衡点 (u_+, θ_+) の周りに局所不安定多様体 $\tilde{h}^{\mathrm{u}}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) = 0$ と局所中心多様体 $\tilde{h}^{\mathrm{c}}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) = 0$ が存在する．さらにある正定数 ε_0 が存在して $\delta \leq \varepsilon_0$ かつ $h^{\mathrm{c}}(u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}}) = 0$ かつ $h^{\mathrm{u}}(u_{\mathrm{b}}, \theta_{\mathrm{b}}) \leq 0$ ならば，定常問題 (6c), (13) は一意の滑らかな解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$ を持ち，次の評価式が成立する．

$$|\partial_x^k (\tilde{\rho}(x) - \rho_+, \tilde{u}(x) - u_+, \tilde{\theta}(x) - \theta_+)| \leq C \frac{\delta^{k+1}}{(1 + \delta x)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{16}$$

(iii) $\underline{M_+ > 1}$ とする．このとき定常問題 (6c), (13) の解は存在しない．

本定理の局所中心多様体等の詳細な性質は，論文 [7] を参照．この論文では，流入境界条件下で理想気体モデル (1) の定常解の漸近安定性も示している．

Theorem 5 (**漸近安定性**). $M_+ \leq 1$ とし，命題 4 と同じ条件を仮定する．さらにある $\sigma \in (0, 1)$ に対して $(\rho_0, u_0, \theta_0) \in (\mathcal{B}^{1+\sigma} \times \mathcal{B}^{2+\sigma} \times \mathcal{B}^{2+\sigma})(\mathbb{R}_+)$ とする．このときある正定数 ε_0 が存在して $\|(\rho_0, u_0, \theta_0) - (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})\|_{H^1} + \delta \leq \varepsilon_0$ ならば，問題 (1), (2), (5) の一意時間大域解 $(\rho, u, \theta) \in (\mathcal{B}^{1+\sigma/2, 1+\sigma} \times \mathcal{B}^{1+\sigma/2, 2+\sigma} \times \mathcal{B}^{1+\sigma/2, 2+\sigma})([0, \infty) \times \mathbb{R}_+)$ が存在し，$(\rho - \tilde{\rho}, u - \tilde{u}, \theta - \tilde{\theta}) \in C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}_+))$ 及び $\lim_{t\to\infty} \|(\rho, u, \theta)(t) - (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\theta})\|_{L^\infty} = 0$ を満たす.

証明はエネルギー法による解のアプリオリ評価を導出することによる．

等エントロピーモデル対する関連結果.

本研究に先行して成された等エントロピーモデルに対する半空間上の時間大域的可解性に関する諸結果を述べる．まず，この問題では，定常解のみならず，希薄波や進行波，またこれらの重ね合わせ等，様々な非線形波が時間大域解の漸近挙動となる．論文 [4] では，境界条件と無限遠方の条件に応じた漸近挙動と成りうる非線形波が分類されている．そのうち，本稿と同じく漸近挙動が定常解で与えられる場合は，論文 [3]，[5] で厳密な議論がなされている．流入境界条件に対する，定常解の一意的存在と漸近安定性は，論文 [5] で証明された．論文 [3] では，流出境界条件に対して同じ結果が証明されている．さらに，後者での定常解への収束レートが，論文 [8] で与えられた．

流出境界条件を課した多次元半空間上での一次元定常解 (平面定常波) の漸近安定性は，論文 [1] で示されている．さらに，論文 [6] では，平面定常波への収束レートが求められている．当然，熱伝導理想気体モデル (1) に対しても同じく，多次元半空間上での平面定常波の漸近安定性が課題となるが，この研究は現在進行中である．

Acknowledgment.

本稿で紹介した結果は，九州大学教授川島秀一氏，同学助教中村徹氏，及び BCAM 教授 Peicheng Zhu 氏との共同研究に基づく．

参考文献

[1] Y. Kagei and S. Kawashima, *Stability of planar stationary solutions to the compressible Navier-Stokes equation on the half space*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), no. 2, pp. 401–430.

[2] S. Kawashima, T. Nakamura, S. Nishibata, and P. Zhu, *Stationary waves to viscous heat-conductive gases in half space: existence, stability and convergence rate*, Math. Models and Methods Appl. Sci., **20**, (2010) pp. 1–28.

[3] S. Kawashima, S. Nishibata, and P. Zhu, *Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space*, Comm. Math. Phys., **240** (2003), pp. 483–500.

[4] A. Matsumura, *Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas*, Methods Appl. Anal., **8** (2001), pp. 645–666. IMS Conference on Differential Equations from Mechanics (Hong Kong, 1999).

[5] A. Matsumura and K. Nishihara, *Large-time behaviors of solutions to an inflow problem in the half space for a one-dimensional system of compressible viscous gas*, Comm. Math. Phys., **222** (2001), pp. 449–474.

[6] T. Nakamura and S. Nishibata, *Convergence rate toward planar stationary waves for compressible viscous fluid in multi–dimensional half space*, SIAM J. Math. Anal., **41**, (2009) pp. 1757–1791.

[7] T. Nakamura and S. Nishibata, *Stationary waves to viscous heat-conductive gas in half space with inflow boundary condition*, 準備中.

[8] T. Nakamura, S. Nishibata and T. Yuge, *Convergence rates toward the stationary solution for the compressible Navier–Stokes equation in half space*, Journal of Differential Equations, **241**, (2007) pp. 94–111.